

УДК 539.3

© 1996 г. А.А. ЕВТУШЕНКО, Р.Д. КУЛЬЧИЦКИЙ-ЖИГАЙЛО

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ФРИКЦИОННОГО ТЕПЛООБРАЗОВАНИЯ

Осесимметричные контактные задачи для двух вращающихся полубесконечных тел исследовались в работах [1–5]. Задача о скольжении упругой теплопроводной сферы по жесткому теплоизолированному полупространству решена в [6]. Одновременный учет тепловыделения от трения и абразивного износа при вращении кольцевого штампа на поверхности шероховатого полупространства рассмотрен в [7].

В работах [3, 5, 6] установлено существование в таких задачах предельной (критической) величины радиуса площадки контакта при неограниченном увеличении прижимающей силы. В данной работе предложен подход, позволяющий достаточно просто получить приближенное решение таких задач и найти значение критического радиуса области взаимодействия. Основная идея состоит в представлении искомого контактного давления в виде суммы герцевских распределений с неизвестными коэффициентами. Последние находятся из системы линейных алгебраических уравнений.

1. Пусть упругий осесимметричный штамп (тело 1), форма контактирующей поверхности которого описывается функцией $z = g(r)$, вдавливаются силой P в упругое полупространство (тело 2).

Рассматривается два варианта движения штампа:

- 1) равномерное скольжение со скоростью v (задача 1);
- 2) вращение вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω (задача 2).

Площадка контакта имеет в плане форму кольца с внутренним радиусом a и наружным радиусом b . Силы трения, связанные с давлением законом Амонтона, приводят к возникновению тепловых потоков, распределенных по области контакта. Полагаем, что теплоотдача со свободных поверхностей тел отсутствует и все тепло, генерируемое на площадке контакта в случае задачи 1 поглощается штампом, а в случае задачи 2 – оба соприкасаемыми телами (при условии равенства температур в области взаимодействия). В случае задачи 1 влиянием касательных напряжений на распределение контактного давления можно пренебречь [8].

В такой постановке задачи сводятся к определению осесимметричных составляющих $u_r^{(i)}(r, z)$, $u_z^{(i)}(r, z)$ вектора перемещений и температуры $T^{(i)}(r, z)$ ($i = 1, 2$) в полупространствах $z \geq 0$ и $z \leq 0$ из системы уравнений Ламе–Неймана:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_r^{(i)} - \frac{1}{r^2} u_r^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu_i} \frac{\partial \Theta^{(i)}}{\partial r} &= \frac{2(1+\nu_i)\alpha_i}{1-2\nu_i} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial r} \\ \nabla^2 u_z^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu_i} \frac{\partial \Theta^{(i)}}{\partial z} &= \frac{2(1+\nu_i)\alpha_i}{1-2\nu_i} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial z} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1)$$

уравнений теплопроводности

$$\nabla^2 T^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

и граничных условий на поверхности $z = 0$:

$$\partial u_z^{(1)} / \partial r - du_z^{(2)} / \partial r = dg(r) / dr \quad (a \leq r \leq b) \quad (3)$$

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} = -p(r) \quad (a \leq r \leq b) \quad (4)$$

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} = 0 \quad (r \leq a \text{ или } r \geq b) \quad (5)$$

$$\sigma_{rz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(2)} = 0 \quad (r \geq 0) \quad (6)$$

$$-\lambda_1 \partial T^{(1)} / \partial z = f \nu p(r) H(b-r) \quad (\text{задача 1}) \quad (7)$$

$$-\lambda_1 \partial T^{(1)} / \partial z + \lambda_2 \partial T^{(2)} / \partial z = f \omega r p(r) (H(b-r) - H(a-r)) \quad (\text{задача 2}) \quad (8)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)} \quad (a \leq r \leq b) \quad (\text{задача 2}) \quad (9)$$

$$u_r^{(i)}, u_z^{(i)}, T^{(i)} \rightarrow 0 \quad \text{при } r^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad (10)$$

где $p(r)$ – контактное давление, f – коэффициент трения, $\Theta^{(i)}$ – объемная деформация, $\sigma_z^{(i)}, \sigma_{rz}^{(i)}$ – компоненты тензора напряжений, $\nu_i, \lambda_i, \alpha_i$ – коэффициенты Пуассона, теплопроводности и линейного температурного расширения соответственно, ∇^2 – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , жестко связанной со штампом, $H(r)$ – функция Хевисайда. Индекс $i = 1, 2$ здесь и в дальнейшем характеризует величины, относящиеся к штампу (движущееся тело) и полупространству (неподвижное тело) соответственно.

2. Решение уравнений (1) и (2), удовлетворяющее условиям (10), находим с помощью интегрального преобразования Ганкеля в форме

$$u_z^{(i)}(r, z) = \eta_i \int_0^\infty [-A_i(\xi) + B_i(\xi) (3 - 4\nu_i - \eta_i \xi z)] \exp(\eta_i \xi z) J_0(\xi r) d\xi + \\ + \alpha_i (1 + \nu_i) \eta_i \int_0^\infty \xi^{-1} C_i(\xi) \exp(\eta_i \xi z) J_0(\xi r) d\xi \quad (11)$$

$$T^{(i)}(r, z) = \int_0^\infty C_i(\xi) \exp(\eta_i \xi z) J_0(\xi r) d\xi, \quad \eta_i = (-1)^i \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

Соответствующие интегральные представления для напряжений имеют вид (μ_i – модули сдвига):

$$\sigma_z^{(i)}(r, z) = 2\mu_i \int_0^\infty [-A_i(\xi) + B_i(\xi) (2 - 2\nu_i - \eta_i \xi z)] \times \\ \times \exp(\eta_i \xi z) J_0(\xi r) \xi d\xi \quad (13)$$

$$\sigma_{rz}^{(i)}(r, z) = 2\mu_i \int_0^\infty [A_i(\xi) - B_i(\xi) (1 - 2\nu_i - \eta_i \xi z)] \times \\ \times \exp(\eta_i \xi z) J_1(\xi r) \xi d\xi \quad (14)$$

Используя условия (4)–(6), из соотношений (13)–(14) находим

$$A_i(\xi) = (1 - 2\nu_i) B_i(\xi) \quad (15)$$

$$2\mu_1 B_1(\xi) = 2\mu_2 B_2(\xi) = B(\xi) = - \int_a^b sp(s) J_0(\xi s) ds \quad (16)$$

Краевые условия (7)–(9) и соотношение (12) дают

$$C_1(\xi) = \frac{f_0}{\lambda_1} \int_0^b sp(s)J_0(\xi s)ds, \quad C_2(\xi) = 0 \quad (\text{задача 1}) \quad (17)$$

$$C_1(\xi) = C_2(\xi) = \frac{f_0}{\lambda} \int_a^b s^2 p(s)J_0(\xi s)ds, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (\text{задача 2}) \quad (18)$$

В результате подстановки соотношений (11), при учете формул (15)–(18), в граничное условие (3) приходим к интегральному уравнению

$$\int_0^\infty \xi J_1(\xi r) d\xi \int_a^b sp(s)J_0(\xi s)ds - \gamma_j r^{-1} \int_a^r s^j p(s)ds = \mu dg / dr \quad (19)$$

$$(a \leq r \leq b, j = 1, 2)$$

$$\gamma_1 = \delta_1 f_0 \mu, \quad \gamma_2 = \delta f_0 \mu, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1 - \nu_1}{\mu_1} + \frac{1 - \nu_2}{\mu_2}$$

$$\delta = \frac{\delta_1 \lambda_1 + \delta_2 \lambda_2}{\lambda}, \quad \delta_i = \frac{(1 + \nu_i) \alpha_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2)$$

где $j = 1, 2$ здесь и в дальнейшем соответствует задачам 1 и 2 соответственно.

К уравнению (18) следует прибавить условие равновесия штампа

$$2\pi \int_a^b rp(r)dr = P \quad (20)$$

Введем обозначения

$$p = r/b, \quad a^* = a/b, \quad p^* = \pi p / (4\mu b) \quad (21)$$

При учете (21) соотношения (19), (20) примут вид

$$\int_0^\infty \xi J_1(\xi \rho) \int_{a^*}^1 sp^*(s)J_0(\xi s)ds - \beta_j \rho^{-1} \int_{a^*}^\rho s^2 p^*(s)ds =$$

$$= G(\rho) \quad (a^* \leq \rho \leq 1)$$

$$\int_{a^*}^1 \rho p^*(\rho) d\rho = \frac{P}{8\mu b^3} \quad (23)$$

$$\beta_1 = \gamma_1 b, \quad \beta_2 = \gamma_2 b^2, \quad G(\rho) = \frac{1}{4} \pi d g(\rho) / d\rho \quad (24)$$

3. Для приближенного решения интегрального уравнения (22) разобьем круг $0 \leq \rho \leq a^*$ на n колец точками $\rho_{k1} = k\Delta_1\rho$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $\Delta_1\rho = a^*/n$, а кольцо $a^* \leq \rho \leq 1$ на m частей точками $\rho_{k2} = a^* + k\Delta_2\rho$ ($k = 1, 2, \dots, m$), $\Delta_2\rho = (1 - a^*)/m$. Контактное давление $p^*(\rho)$ ищем в виде

$$p^*(\rho) = \sum_{k=j}^{n+m} X_k (\rho_k^2 - \rho)^{1/2} \quad (25)$$

где $\rho_k = \rho_{k1}$ ($1 \leq k \leq n$) и $\rho_k = \rho_{k2}$ ($n < k \leq n+m$, $k2 = k-n$); значение j выбираем из условия $\rho_{j-1} \leq \rho \leq \rho_j$.

Поскольку $p^*(\rho) = 0$ ($0 \leq \rho \leq a^*$), то из соотношения (25) следует

$$\sum_{k=i}^{n+m} X_k (\rho_k^2 - s_{i1}^2)^{1/2} = 0, \quad s_{i1} = (i - 0,5)\Delta_1\rho \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (26)$$

С другой стороны, при выполнении равенства (26) в интегральном уравнении (22) нижний предел интегрирования a^* можно заменить нулем. Последующая подстановка в (22) значения $p^*(\rho)$ (25) и вычисление интегралов в точках $s_{i2} = a^* + (i - 0,5)\Delta\rho_2$ ($i = 1, 2, \dots, m$), приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n+m} X_k (a_{ik} - \beta_j b_{ik}^j) = d_i, \quad d_i = G(s_{i2}), \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2) \quad (27)$$

$$a_{ik} = s_{i2} \quad \text{при} \quad \rho_k \geq s_{i2}$$

$$a_{ik} = 2\pi^{-1} \left[-\rho_k s_{i2}^{-1} \sqrt{s_{i2}^2 - \rho_k^2} + s_{i2} \arcsin(\rho_k / s_{i2}) \right] \quad \text{при} \quad \rho_k < s_{i2}$$

$$b_{ik}^1 = {}^4/3 \rho_k^3 (\pi s_{i2})^{-1}, \quad b_{ik}^2 = {}^1/4 \rho_k^4 s_{i2}^{-1}, \quad \text{при} \quad \rho_k < s_{i2}$$

$$b_{ik}^1 = {}^4/3 (\pi s_{i2})^{-1} \left[\rho_k^3 - (\rho_k^2 - s_{i2}^2)^{3/2} \right], \quad b_{ik}^2 = {}^1/2 (\pi s_{i2})^{-1} \times$$

$$\times \left[\rho_k^4 \arcsin[s_{i2} / \rho_k] - s_{i2} (\rho_k^2 - 2s_{i2}^2) (\rho_k^2 - s_{i2}^2)^{1/2} \right] \quad \text{при} \quad \rho_k \geq s_{i2}$$

Система линейных алгебраических уравнений (26), (27) порядка $(n + m)$ служит для определения такого же количества неизвестных коэффициентов X_k ($k = 1, 2, \dots, n + m$). Величину a^* находим методом последовательных приближений из условия $p^*(a^*) = 0$. В случае, если $p^*(0) > 0$ принимаем $a^* = 0$. Неизвестный параметр b определяем, удовлетворяя условию равновесия штампа (23).

4. Сначала исследуем решение задач в случае, когда геометрия поверхности штампа хорошо аппроксимируется параболоидом вращения $g(r) = r^2/2R$, R — радиус кривизны в точке $r = 0$ до деформации. Тогда a равно нулю и область контакта — круг радиуса b . Входными параметрами при численном анализе такой задачи являются величины β_j ($j = 1, 2$) (24). На фиг. 1 показано изменение величины $P^* = P_H/P$ ($P_H = {}^8/3 b^3 \mu R^{-1}$ — прижимающая сила в изотермической задаче Герца, необходимая для получения области контакта радиуса b [9]) в зависимости от β_j ($j = 1, 2$). Зависимость оказалась линейной в соответствии с уравнением

$$P_H P^{-1} + \beta_j (\beta_j^*)^{-1} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (28)$$

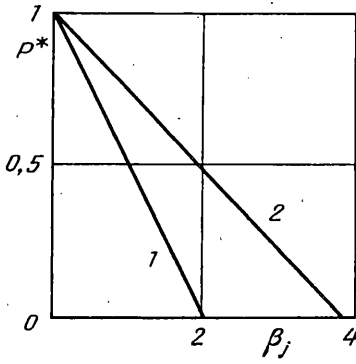
$$\beta_1^* = 2, 01, \quad \beta_2^* = 3, 84 \quad (29)$$

Величины β_j^* ($j = 1, 2$) в (29) это предельные значения параметров β_j , при которых решение рассматриваемых задач существует и единственно. При учете обозначений (24) из (29) получаем предельные (критические) значения радиуса площадки контакта b_j^* ($j = 1, 2$):

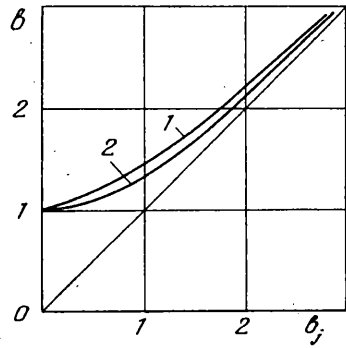
$$b_1^* = \beta_1^* (\delta_1 f_0 \mu)^{-1} \quad (30)$$

$$b_2^* = (\beta_1^*)^{1/2} (\delta f_0 \mu)^{-1/2} \quad (31)$$

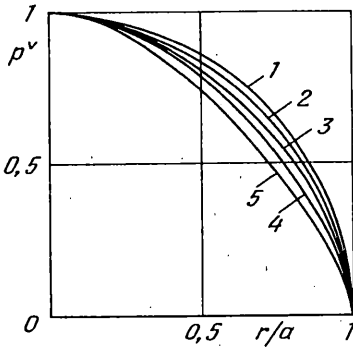
Графики на фиг. 1 показывают, что с ростом β_j (увеличением скорости скольжения или вращения) нагрузка, необходимая для образования области контакта фиксированного радиуса b , увеличивается, стремясь при $\beta_j \rightarrow \beta_j^*$ к бесконечности. Если же прижимающая сила P постоянна, то с увеличением скорости радиус площадки контакта уменьшается. При постоянной скорости скольжения (или вращения) равенства (30), (31) дают предельные значения радиуса круга контакта при увеличении сжимающей силы P . Отметим, что при отсутствии тепловыделения такого предела не существует.



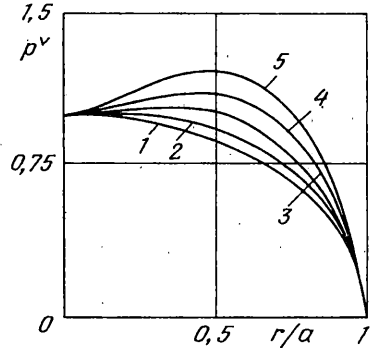
Фиг. 1



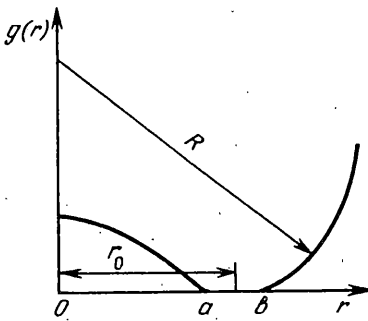
Фиг. 2



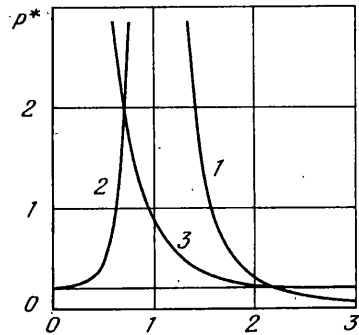
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Величины b_j^* из (30), (31) можно также интерпретировать как радиус площадки контакта, получаемый при взаимодействии с учетом фрикционного теплообразования первоначально плоских поверхностей. В этом случае интегральное уравнение (22) становится однородным, и поэтому радиус площадки контакта b_j^* , определяемый соотношениями (30), (31), не зависит от прижимающей силы P .

Введем обозначения

$$c = b'_H / b, \quad c_j = b_H / b_j^*, \quad b_H = [3PR / (8\mu)]^{1/3} \quad (j=1,2) \quad (32)$$

где b_n – радиус площадки контакта задачи Герца при заданной силе P [9]. Величина c характеризует уменьшение площадки контакта, вызванное теплообразованием. Отметим также, что c^2 равно отношению среднего контактного давления, получаемого в данной задаче, к среднему контактному давлению соответствующей изотермичной задачи Герца. При учете (32) равенство (28) перепишем в виде

$$c^3 - c_j^j c^{3-j} = 1 \quad (j=1,2) \quad (33)$$

Параметр c_j зависит от механических, теплофизических и геометрических свойств взаимодействующих тел, а также условий на контакте: коэффициента трения и скорости скольжения (вращения) и может быть входным параметром. На фиг. 2 показана зависимость величины c от c_j ($j=1,2$), найденная из решения уравнения (33). Кривые 1 и 2 соответствуют задачам 1 и 2. При отсутствии теплообразования ($b_j^* = \infty$) $c_j = 0$ и $c = 1$ ($b = b_n$). С ростом параметра c_j (например, скорости движения), радиус b площадки контакта уменьшается, стремясь при $c_j > 2,5$ к предельному значению b_j^* ($j=1,2$).

Эпюры распределения приведенного контактного давления (задача 1) $p^0(r) = p(r)/p(0)$, рассчитанные для значений параметра $\beta_1^* = 0; 0,5; 1,0; 1,5$ и $2,01$ (кривые 1–5 соответственно), показаны на фиг. 3. Максимальное значение давления при скольжении достигается в центре контактного круга. В случае задачи 2 распределение $p^0(r)$ представлено на фиг. 4. Здесь кривые 1–5 построены для значений $\beta_2^* = 0; 1,0; 2,0; 3,0$ и $3,84$ соответственно. В отличие от случая скольжения, максимальное давление при вращении достигается на расстоянии от центра, примерно равном половине радиуса круга контакта. Так, при $\beta_2^* = 3,84$, $p_{\max}^0 = 1,202$ имеем при $r = 0,52$.

5. Выберем для случая задачи 2 функцию $g(r)$ в виде единичной волны (фиг. 5):

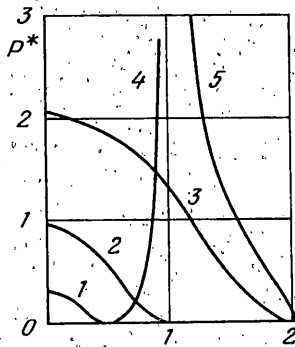
$$2R g(r) = (0,5r_0^2 - r^2) H(r_0 - r) + (r - r_0)^2 H(r - r_0) \quad (34)$$

Исследуем сначала решение задачи в изотермическом случае (при отсутствии теплообразования). Тогда $\beta_2 = 0$ и решение задачи полностью определяется заданием параметра $b_0 = b/r_0$. На фиг. 6 представлены зависимости параметра $P^* = P_n^1 / P$ ($P_n^1 = 8/3 r_0^3 \mu R^{-1}$) от безразмерного внешнего радиуса области контакта b_0 (кривая 1), безразмерного внутреннего радиуса $a_0 = a/r_0$ (кривая 2) и безразмерной ширины области контакта $h_0 = (b-a)/r_0$ (кривая 3). При увеличении прижимающей силы P внутренний радиус a_0 уменьшается, а внешний b_0 – увеличивается. По достижении силой P значения $4,72 P_n^1$ величина $a_0 = 0$ и кольцевая область контакта превращается в круговую радиуса $b = 2,21 r_0$.

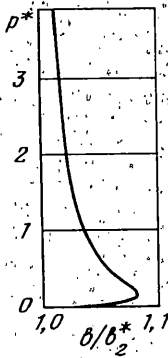
Перейдем к изучению влияния теплообразования от трения на величину основных контактных характеристик. В случае кольцевого штампа удобно все линейные размеры относить к величине b_2^* (см. (31)). Тогда входными параметрами при решении задачи с учетом фрикционного тепловыделения будут r_0 / b_2^* и b / b_2^* . При этом параметр β_2 равен $\beta_2 = 3,84 (b / b_2^*)^2$.

На фиг. 7 показано изменение безразмерного внутреннего a / b_2^* и внешнего b / b_2^* радиусов площадки контакта в зависимости от величины прижимающей силы P / P_n^2 ($P_n^2 = 8/3 (b_2^*)^3 \mu R^{-1}$).

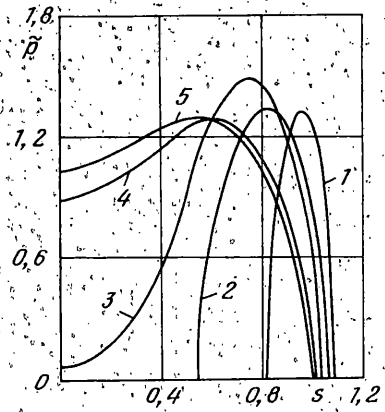
С увеличением силы P внутренний радиус a / b_2^* убывает и при определенном (разном для различных значений параметров r_0 / b_2^*) значении прижимающей силы



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

кольцевая площадка контакта становится круговой (кривые 1–3). Изменение внешнего радиуса b/b_2^* от величины P/P_n^2 существенным образом зависит от параметра r_0/b_2^* . Для значений $r_0/b_2^* < 1$ между величинами P/P_n^2 и b/b_2^* существует взаимнооднозначное соответствие: большему значению прижимающей силы соответствует большее значение внешнего радиуса участка контакта (кривая 4). Для значений $r_0/b_2^* = 1$ это соответствие нарушается: нескольким значениям прижимающей силы может соответствовать одно и то же значение внешнего радиуса участка контакта (фиг. 8). Видно, что значение b/b_2^* с ростом P/P_n^2 сначала увеличивается от 1 до 1,084, после чего снова уменьшается до единицы. При $r_0/b_2^* > 1$ (кривая 5 на фиг. 7) внешний радиус с увеличением силы убывает (за исключением малого диапазона P в окрестности нуля).

Отметим, также что при неограниченном возрастании прижимающей силы и произвольном значении r_0/b_2^* величина внешнего радиуса кольцевой области контакта b стремится к критическому значению b_2^* (31).

На фиг. 9 приведено распределение приведенного давления $\bar{p} = p/p_m$ (p_m – среднее контактное давление) для фиксированного значения $r_0/b_2^* = 1$ и нескольких значений силы P/P_n^2 . Видно, что при небольшом значении прижимающей силы ($P/P_n^2 < 1$) область контакта остается кольцевой (кривые 1, 2). Дальнейшее увеличение силы приводит к переходу кольцевой области контакта в круговую (кривые 3–5). В частности, при $P/P_n^2 = 20$ распределение контактного давления \bar{p} (кривая 5) совпадает с соответствующим распределением для параболидального штампа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barber J.R. Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space // Wear. 1975. V. 35. No. 2. P. 283–289.
2. Генералов М.Б., Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Контактная задача термоупругости для вращающихся тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 46–52.
3. Грилицкий Д.В., Кульчицкий-Жигайло Р.Д. Осесимметричная контактная задача термоупругости для вращающихся тел // Физ.-хим. механика материалов. 1991. № 3. С. 93–96.
4. Александров В.М. Осесимметричная контактная задача термоупругости с учетом износа // Изв. АН. МТТ. 1992. № 5. С. 73–80.

5. *Yevtushenko A.A., Kulchytsky-Zhyhailo R.D.* Determination of limiting radii of the contact area in axi-symmetric contact problems with frictional heat generation // *J. Mech. Phys. Solids*. 1995. V. 43. No. 4. P. 599–604.
6. *Barber J.R.* Some thermoelastic contact problems involving frictional heating // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1976. V. 29. No. 1. P. 1–13.
7. *Александров В.Н.* Осесимметричная контактная задача термоупругости с учетом износа. // *Изв. АН. МГТ*. 1992. № 5. С. 73–80.
8. *Kuznetsov Ye.A., Gorokhovskiy G.A.* Effect of tangential load on the stressed state of rubbing rough bodies // *Wear* 1981. V. 73. No. 1. P. 41–59.
9. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.

Львов

Поступила в редакцию
27.IV.1994