

УДК 539.3

© 1996 г. А.Н. КОВШОВ

## О ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ В НЕУПРУГОМ СЛОЕ, ВЫЗВАННОЙ ДВИЖЕНИЕМ МАССИВНОГО ШТАМПА

Процессы, связанные с локализацией деформаций, интенсивно исследуются многими авторами (см. [1–2], где представлена большая библиография). Исследования направлены на изучение общих вопросов расчета больших деформаций, на построение алгоритмов и получение численных решений краевых задач. В работах [3–4] изучалось влияние локализации деформации на устойчивость и разрушение откоса из упруго-пластического материала под действием силы тяжести и статических нагрузок. В данной работе изучается возможность локализации деформации в откосе при нестационарных нагрузках. Для описания процессов деформирования используется модель, разработанная в работах [5–6] для описания разрушения геоматериалов.

Пусть откос моделируется слоем, лежащем на жестком основании. Правая криволинейная граница слоя свободна от напряжений. На горизонтальной поверхности слоя расположен жесткий массивный штамп, который приводится в движение внешней силой и моментом. Предполагается наличие полного или гладкого контакта штампа со слоем. Сила тяжести не учитывается. Используемая модель учитывает повреждаемость среды и ее вязкие свойства следующим образом. Считается, что тензор скоростей полной деформации  $\epsilon_{ij}(v)$  есть сумма трех тензоров

$$\epsilon_{ij}(v) = \dot{e}_{ij} + e_{ij}^* / \tau + \Lambda_0 F(e_{ij}, k) \delta_{ij} \quad (1.1)$$

где  $\epsilon_{ij}(v) = (V_{ij} + V_{ji})/2$ ,  $\epsilon_{ij}$  – тензор упругих деформаций,  $e_{ij}^*$  – его девиатор,  $\tau$  – время релаксации,  $\Lambda_0 F(e_{ij}, k)$  – слагаемое, описывающее накопление повреждаемости  $D$ , для которой имеется уравнение

$$\dot{D} = F(e_{ij}, k) \quad (1.2)$$

Тензор напряжений в такой среде представляется в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda(D)(e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu(D)e_{ij}$$

т.е. принимается связь аналогичная соотношениям Гука, но модули Ламе зависят от повреждаемости  $D$ .

Экспериментальные данные по измерениям скоростей продольных и поперечных волн в разрушенных средах показывают уменьшение скоростей распространения волн при увеличении повреждаемости среды [7]. Это позволяет принять зависимости модулей от повреждаемости  $D$  в виде

$$\mu = \mu_0 \exp(-bD), \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu_0(1 - \exp(-bD)) \quad (1.3)$$

$b$  – постоянная величина. Зависимость (1.3) качественно согласуется с результатами [7] и обеспечивает постоянство объемного модуля  $K_0 = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ , что кажется естественным.

Отметим, что разрушение в среде учитывается скалярным параметром  $D$  – повреждаемостью и носит дилатационный характер. Как показано в [6], использование соотношений (1.1), (1.2) для описания поведения среды приводит к непротиворечивой системе уравнений, удовлетворяющей соотношениям термодинамики.

Чтобы получить систему уравнений, записанную относительно скоростей и напряжений (в этих переменных легко учитываются граничные условия) используем соотношения

$$e_{ij} = \frac{3\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} p \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}, \quad e_{ij}^* = \frac{1}{2\mu} s_{ij} \quad (1.4)$$

где  $p = -\sigma_{kk}/3$  – давление,  $s_{ij}$  – девиатор тензора напряжений.

Получим следующую систему определяющих уравнений и уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \right) + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} p \right) = \varepsilon_{ij}(v) - \frac{1}{\tau} \frac{1}{2\mu} s_{ij} - \Lambda_0 F(\sigma_{ij}, k) \quad (1.5)$$

$$\rho \partial V_i / \partial t = \nabla \sigma_{ij}$$

Функция  $F(\sigma_{ij}, k)$ , описывающая скорость роста повреждаемости принимается в виде

$$F = D_0 (S_2 - k^2) h(S_2 - k^2) \quad (1.6)$$

$h(S_2 - k^2)$  – функция Хевисайда,  $S_2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}$  – второй инвариант девиатора напряжений,  $k$  – постоянная величина.

Будем рассматривать задачу в условиях плоской деформации и в полярной системе координат. В отличие от линейной теории упругости, из системы (1.5) при плоской деформации нельзя получить конечную связь между  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ . Поэтому в нашем случае необходимо привлекать уравнение либо для  $\sigma_z$ , либо для  $p$ . Для давления  $p$  получим такое соотношение из уравнений системы (1.5), записанных для одинаковых индексов:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{3\lambda + 2\mu} \right) = \frac{\varepsilon_{kk}(v)}{3} + \Lambda_0 F \quad (1.7)$$

Будем использовать это уравнение и уравнения для  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ . Для определения  $\sigma_z$  имеется соотношение  $p = -\sigma_{kk}/3$ . Введем безразмерные переменные ( $L$  – характерный размер):

$$\hat{r} = r / L, \quad \hat{t} = a_0 t / L, \quad \rho_0 a_0^2 = \lambda_0 + 2\mu_0$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / (\lambda_0 + 2\mu_0), \quad \hat{v}_i = v_i / a_0$$

и безразмерные скорости распространения

$$C_2^2 = g \exp(-bD), \quad C_1^2 = 1 - \frac{1}{3}g + \frac{1}{3}C_2^2, \quad g = \mu_0 / \lambda_0 + 2\mu_0$$

Примем, что  $\rho_0 = 1$ ,  $a_0 = 1$  и  $L = 1$  и опустим значки над безразмерными переменными.

Таким образом, задача о деформировании откоса свелась к решению системы (1.5) в области  $r_1 < r < r_2$ ,  $0 < \theta < \theta_0$  с нулевыми начальными и соответствующими граничными условиями. Заметим, что задание ненулевых начальных данных для повреждаемости  $D(r, \theta, 0) = d(r, \theta)$  будет соответствовать задаче для неоднородного, например, по глубине откоса.

Граничные условия брались следующими. Считалось, что при  $\theta = \theta_0$  имеет место либо гладкий контакт слоя с основанием, либо полное сцепление последних, т.е. при  $\theta = \theta_0$ ,  $V_r = 0$ ,  $V_\theta = 0$ , либо  $V_\theta = 0$ ,  $\tau_{r\theta} = 0$ . На правой свободной границе слоя  $\sigma_r = 0$ ,

$\tau_{r\theta} = 0$ . На горизонтальной поверхности ( $\theta = 0$ ) вне штампа  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\tau_{r\theta} = 0$ , а под штампом  $v_r = V_x$ ,  $v_\theta = V_y$ ,  $V_x$ ,  $V_y$  – составляющие скорости точек штампа. Они определяются из уравнения движения штампа

$$m\dot{V}_0 = F + R, \quad \frac{d}{dt}(K) = M + Q \quad (1.8)$$

где  $m$  – масса штампа,  $K$  – кинетический момент относительно центра масс,  $R$  и  $Q$  – сила и момент от взаимодействия штампа со средой. В проекциях получим

$$m\dot{V}_{0x} = F_x + R_x, \quad m\dot{V}_{0y} = F_y + R_y, \quad J\dot{\omega} = M_z + Q_z \quad (1.9)$$

где  $J$  – момент инерции относительно центра масс, а  $R_x = \int \tau_{r\theta} dr$ ,  $R_y = \int \sigma_\theta dr$ ,  $Q_z = \int \sigma_\theta r dr$ , и интегрирование проводится в пределах  $-L_0/2, +L_0/2$ ,  $L_0$  – длина штампа. Штамп считается бесконечно тонким, так что центр его лежит на прямой  $\theta = 0$ . Поэтому в выражения для  $Q_z$  не входят касательные напряжения. Учитывая, что для скоростей точек штампа при движении имеется соотношение  $V = V_0 + \omega Xr$  и, учитывая малость угла поворота (фактически это означает снос граничных условий на плоскость  $\theta = 0$ ), получим

$$m\dot{V}_x = F_x + R_x \quad (1.10)$$

$$m\dot{V}_y = F_y + R_y + mr\dot{\omega}, \quad J\dot{\omega} = M_z + Q_z$$

Так как мы используем условие полного прилипания, т.е.  $V_x = v_r$ ,  $V_y = v_\theta$  при  $\theta = 0$ , то получим

$$m\dot{v}_r = F_x + R_x \quad (1.11)$$

$$m\dot{v}_\theta = F_y + R_y + m(M_z + Q_z) / J$$

Таким образом, получили связь между производными от скоростей  $\dot{v}_r$ ,  $\dot{v}_\theta$  и напряжениями  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  при  $\theta = 0$ ,  $x_0 - L_0/2 < r < x_0 + L_0/2$  в виде:

$$\dot{v}_r = (F_x + \int \tau_{r\theta} dr) / m \quad (1.12)$$

$$\dot{v}_\theta = (F_y + \int \sigma_\theta dr) / m + (M_z + \int \sigma_\theta r dr) / J$$

Эти уравнения, с использованием пошаговой процедуры по  $t$ , позволяют определить сами скорости  $v_r$  и  $v_\theta$  на верхнем слое по  $t$ , используя  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $Q_z$  на нижнем слое.

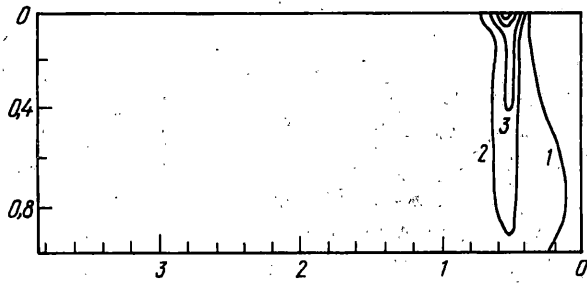
2. Решение задачи строилось методом конечных разностей. Квазилинейную систему (1.5) можно записать в матричном виде

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A1(D) \frac{\partial y}{\partial r} + A2(D) \frac{\partial y}{r \partial \theta} + A3(D)y + \Phi(D) \quad (2.1)$$

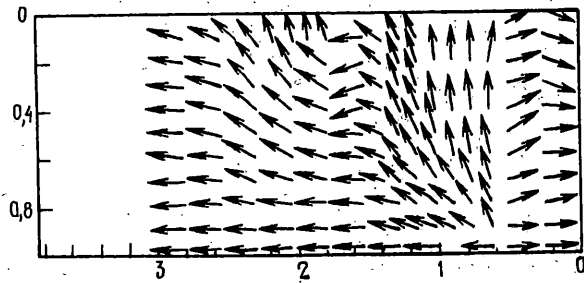
где  $y$  – вектор с компонентами  $v_r$ ,  $v_\theta$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $p$ ,  $D$ ,  $A1(D)$ ,  $A2(D)$ ,  $A3(D)$  – матрицы размера  $7 \times 7$ , зависящие от  $D$ ;  $\Phi(D)$  – вектор [8]. Область решения в переменных  $r$ ,  $\theta$  бралась в виде прямоугольника  $r_1 < r < r_2$ ,  $0 < \theta < \theta_0$ . Дополнительная граница  $r = r_2$ , соответствующая левой границе, ограничивает расчетную область и на ней ставились условия неотражения [9]:

$$\sigma_r + C_1(D)v_r = 0, \quad \tau_{r\theta} + C_2(D)v_\theta = 0 \quad (2.2)$$

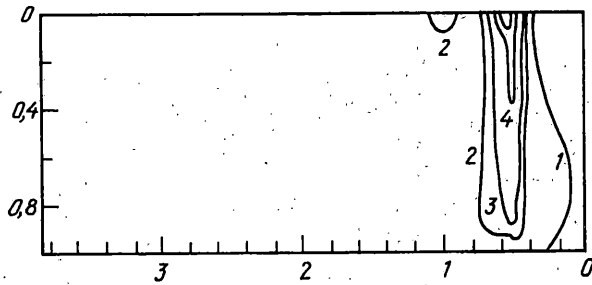
Во внутренних точках применялась разностная схема Мак Кормака [10]. Граничные точки рассчитывались с использованием бихарактеристических соотношений для системы (1.5) [9]. При этом использовались "замороженные" значения характеристических скоростей на каждом временном слое.



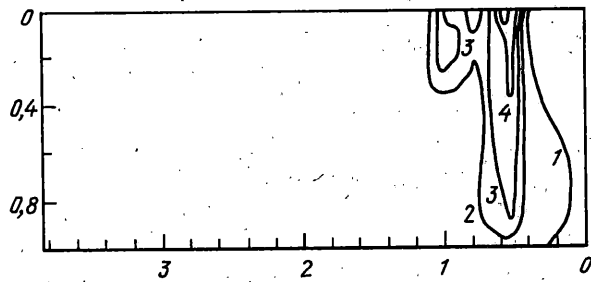
Фиг. 1



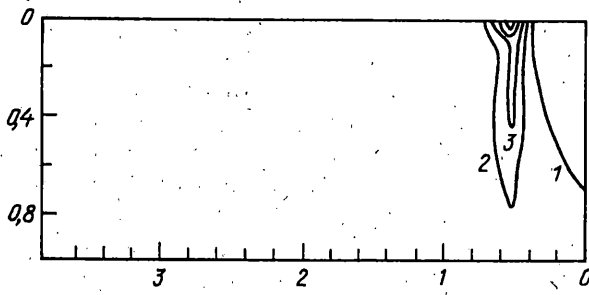
Фиг. 2



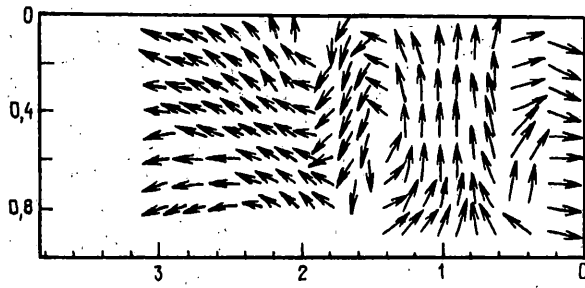
Фиг. 3



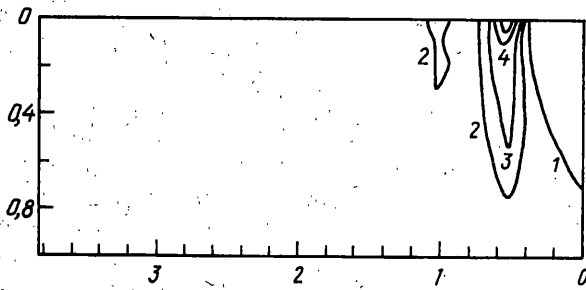
Фиг. 4



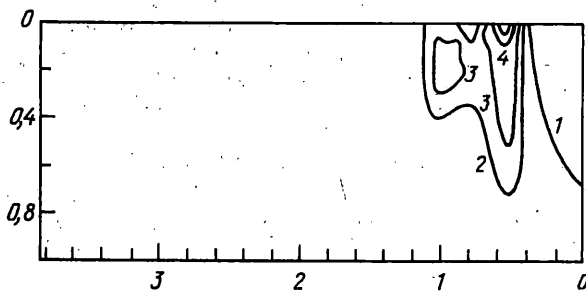
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Некоторые результаты расчетов представлены на фиг. 1–8 для  $r_1 = 310$ ,  $r_2 = 314$  на сетке  $31 \times 11$  по  $r$  и  $\theta$  соответственно. Масштаб выбран таким образом, что высоту правого склона слоя  $L = 1$  продольная волна по неразрушенному материалу проходит за время  $t = 1$ . Постоянные  $D_0$ ,  $k$ ,  $g$  и  $b$  были выбраны по результатам расчетов задачи о распространении сферических волн в среде, которые дали удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными по затуханию массовой скорости на фронте волны (см. [11]). Принято  $D_0 = 100$ ;  $k = 0,02$ ;  $g = 0,33$ ;  $b = 10$ .

На фигурах представлены изолинии повреждаемости  $D = D(r, \theta)$  и поле направлений вектора полной скорости для различных моментов времени. Штамп нагружается силой и моментом имеющими одинаковую зависимость от времени в виде трапеции с временем нарастания до единицы  $t_n = 0,1$ , длительностью 0,8 и временем спада до нуля  $t_c = 0,1$ . Рассмотрен вариант  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0,04$ ,  $M_z = 0$ , что соответствует напряжениям под штампом, при которых начинается процесс накопления повреждаемости. Безразмерный коэффициент вязкости был взят малым ( $1/\tau = 0,1$ ). Фиг. 1–4 соответствуют слою, лежащему на гладком основании, фиг. 5–8 – полному контакту с основанием. Для  $t = 2$  на фиг. 1–2 показаны нестационарное поле скоростей и наличие узкой области повреждаемости, образовавшейся под правым концом штампа, с которым взаимодействует отраженная от свободной границы склона волна. На фиг. 1 цена изолинии повреждаемости  $D_i$  соответствует выражению  $D_i = 0,042(i - 1)$ ,  $i$  – номер изолинии. Фиг. 3 соответствует  $t = 4$ . При этом повреждаемость локализуется в виде узкой полосы, проникающей на всю глубину слоя. Цена изолинии определяется выражением  $D_i = 0,058(i - 1)$ . На фиг. 4 для  $t = 6$  представлено установившееся распределение повреждаемости. Цена изолиний такая же, как на фиг. 3. Подобным образом локализуется и деформация, например по оси  $r$ . Это приводит к образованию области пониженной прочности, что может быть причиной обрушения склона. Фиг. 5–6 соответствуют полному контакту слоя с основанием и  $t = 2$ . Поле скоростей отличается от поля скоростей для случая гладкого основания, уровень повреждаемости ниже и локализуется она внутри слоя. Фиг. 7–8 для  $t = 4$  и  $t = 6$  с ценой изолиний повреждаемости  $D_i = 0,062(i - 1)$  показывают распределение повреждаемости, близкое к установившемуся, хотя имеющееся движение частиц в слое и поле скоростей неоднородно.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что применение модели среды, в которой локально учитывается накопление повреждаемости в зависимости от уровня напряженного состояния, приводит в рассматриваемой начально-краевой задаче к глобальной локализации зон повреждаемости под штампом вблизи края слоя, свободного от напряжений. Хотя, при этом нагрузка от движения штампа распространяется на весь слой.

Таким образом, можно ожидать, что и в общем случае, свойства специально используемых моделей окажут влияние на возможность описания такого явления как локализация деформаций. Граничные условия окажут влияние на расположение зон локализации деформаций.

Автор выражает глубокую признательность В.Н. Кукуджанову за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-013-16525).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ortiz M., Leroy Y., Needleman A. A finite element method for localized failure analysis // Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng.-ing. 1987. V. 61. No. 2. P. 189–214.
2. Leroy Y., Ortiz M. Localization analysis under dynamic loading // Paper Intern. Conf. Mech. Prop. Materials at High Rates of Strain, Oxford, 1989.

3. *Drucker D.C., Präger W.* Soil mechanics and plastic analysis or design // *Quart. Appl. Math.* 1952. V. 10. No. 2. P. 157–165.
4. *Коротков П.Ф.* Образование поверхности скольжения при обрушении склона // *Докл. АН СССР.* 1982. Т. 267, № 4. С. 818–822.
5. *Глушко А.И., Нейцетов И.И.* О кинетическом подходе к разрушению горных пород // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1986. № 6. С. 140–146.
6. *Глушко А.И.* Об одном подходе к разрушению горных пород // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1988. № 3. С. 130–135.
7. *Gupta I.N.* Seismic velocities in rock subjected to axial loading up to shear fracture // *J. Geophys. Res.* 1973. V. 78. № 29. P. 6936–6942.
8. *Кукуджанов В.Н.* Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // *Успехи механики.* 1985. Т. 8: Вып. 4. С. 21–65.
9. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
10. *Маккормак Р.В.* Численный метод решения уравнений вязких сжимаемых течений // *Аэрокосмич. техника.* 1983. Т. 1. № 4. С. 114–123.
11. *Замышляев Б.В., Евтерев Л.С.* Модели динамического деформирования и разрушения грунтовых сред. М.: Наука, 1990. 212 с.

Москва

Поступила в редакцию  
7.XII.1994