МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1996

УДК 539.3

© 1996 г. С.В. КУЗНЕЦОВ

О ПЕТЛЯХ ДИСЛОКАЦИЙ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Рассматриваются дислокации с постоянным вектором Бюргерса в средах с произвольной упругой анизотропией. Доказано, что поля напряжений и перемещений в окрестности дислокации определяются только «дислокационной петлей» т.е. контуром, ограничивающим область, занятую дислокацией. Получены выражения для полей напряжений и перемещений в окрестности дислокационной петли.

1. Введение. Для изотропных упругих сред в [1, 2] получен следующий результат о дислокациях и дислокационных петлях, известный в теории упругости как теорема Пича – Колера

Теорема 1.1. Для дислокации в изотропной среде с постоянным вектором Бюргерса собственные поля напряжений и перемещений, вызванные этой дислокацией, определяются интегралом по контуру области несущей дислокацию (в теории дислокаций этот контур именуется дислокационной петлей).

Из теоремы 1.1 в [2] на основе интуитивных соображений сформулирован следующий результат

Следствие. Собственные поля напряжений и перемещений не зависят от поверхности, несущей дислокацию.

Замечания. (*а*) В случае постоянного вектора Бюргерса энергия образования дислокации оказывается бесконечной из-за слишком большой особенности поля напряжений вблизи от петли. Для получения конечных значений энергии обычно из рассмотрения исключают некоторую тороидальную окрестность петли [3, 4], или же переходят к дислокациям с переменным вектором Бюргерса [5].

(*в*) Методами [1, 2] в [6] приведено доказательство теоремы 1.1 для дислокаций, лежащих в плоскости изотропии трансверсально изотропной упругой среды.

Ниже теорема 1.1 обобщается на случай дислокаций с постоянным вектором Бюргерса, расположенных в средах с произвольной упругой анизотропией.

2. Основные соотношения. Большая часть приводимых ниже формул записана в бескоординатной форме по аналогии с [7]. Единственное отличие от обозначений, принятых в [7], состоит в том, что действие четырехвалентного тензора на двухвалентный в настоящей работе записывается в форме свертки по двум индексам. Для справок первые несколько соотношений представлены также в часто используемой координатной форме [8]. Обозначения символов дифференциальных и интегродифференциальных матричных операторов в основном соответствуют [9].

Рассматривается анизотропная упругая среда, уравнения равновесия которой записываются в виде

$$\mathbf{A}(\partial_x)\mathbf{u} \equiv -\mathrm{div}_x \mathbf{C} \cdot\cdot \nabla_x \mathbf{u} \equiv -C^{ijmn} u_{m,nj} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{A}$ – матричный дифференциальный оператор уравнений равновесия, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\mathbf{C}$ – четырехвалентный тензор упругости. В формуле (2.1) и далее применяется соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу, запятая в нижних индексах обозначает ковариантное дифференцирование. Предполагается, что исследуемая среда гиперупругая, а тензор **C** – строго эллиптичен [7].

Фундаментальные решения уравнений (2.1) в R^3 в замкнутом виде известны лишь для некоторых частных видов упругой анизотропии. При произвольной анизотропии среды для построения фундаментальных решений используют либо метод разложения на плоские волны, либо применяют метод мультиполярных разложений [10]. И в том, и в другом случае используется интегральное преобразование Фурье

$$f^\wedge(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{R^3} f(\mathbf{x}) \exp(2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) dx =$$

$$= \int\limits_{R^3} f(x^1, x^2, x^3) \exp(2\pi i x^i \xi_i) dx_1 dx_2 dx_3, \quad \boldsymbol{\xi} \in R^3$$

позволяющее преобразованное по Фурье фундаментальное решение (символ) записать в виде

$$\mathbf{E}^\wedge(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A}^\wedge(\boldsymbol{\xi})^{-1}, \quad \mathbf{A}^\wedge(\xi)^{-1} = \mathbf{A}^\wedge_{co}(\boldsymbol{\xi}) / \det \mathbf{A}^\wedge(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.2}$$

где $\mathbf{A}^\wedge(\boldsymbol{\xi}) \equiv (2\pi)^2 \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\xi} \equiv (2\pi)^2 \xi_j C^{ijmn} \xi_m$ – (матричный) символ дифференциального оператора уравнений (2.1), $\mathbf{A}^\wedge_{co}$ – матрица алгебраических дополнений символа $\mathbf{A}^\wedge$.

Формула (2.2) показывает, что символ $\mathbf{E}^\wedge$ положительно однороден степени –2 и строго эллиптичен, ввиду предположенной строгой эллиптичности тензора **C**. Применение обратного преобразования Фурье к (2.2) при учете однородности символа $\mathbf{E}^\wedge$ позволяет получить [10]

Предложение 2.1. При любой анизотропии упругой среды фундаментальное решение **E** положительно однородно по $|x|$ степени –1.

3. Формула контурного интегрирования. Представим поле (собственных) перемещений в среде, вызванных дислокацией, в виде потенциала двойного слоя

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\cdot\int\limits_{\Omega} \mathbf{T}(\boldsymbol{\upsilon}_{y'}, \partial_{y'}) \mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y}') dy' \tag{3.1}$$

где **b** – постоянный вектор Бюргерса: $\Omega \subset \Pi_\nu$, $(\mathbf{x}\in\Pi_\nu \Leftrightarrow \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\upsilon} = c)$ – ограниченная область на плоскости Π_ν, занятая дислокацией; **T** – оператор поверхностных напряжений; $d\omega$ – поверхностная мера Лебега на Π_ν. В формуле (3.1) и далее предполагается, что $\mathbf{x} \notin \Omega \cup \partial\Omega$. С помощью теоремы о дивергенции интеграл в правой части (3.1) может быть преобразован к сумме контурного интеграла и интеграла по плоской области

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{T}(\boldsymbol{\upsilon}_y, \partial_y)\mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\omega_y = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\upsilon}_y \cdot \mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\omega'_y +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\upsilon}_y \cdot \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_{\nu_y} \otimes \mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\omega_y \tag{3.2}$$

где $d\omega'$ – мера Лебега, сосредоточенная на контуре $\partial\Omega$, $\mathbf{n}_y$ – вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$, лежащий в плоскости Π_ν, оператор ∇_ν обозначает дифференцирование в направлении вектора $\boldsymbol{\upsilon}$.

Для преобразования оставшегося интеграла по Ω в правой части (3.2) введем векторную функцию

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}') = \tfrac{1}{2}[h(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{e}_1)\delta(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 + \delta(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{e}_1)h(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2], \quad \mathbf{x}'\in\Pi_\nu \tag{3.3}$$

где h, δ – функции Хевисайда и Дирака соответственно, определенные в R^1, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – векторы аффинного базиса, лежащие в Π_ν. Из определения функции **k** следует

$$\operatorname{div}\mathbf{k}(\mathbf{x}') = \delta_2(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}'\in\Pi_\nu \tag{3.4}$$

где δ_2 – функция Дирака, определенная на Π_ν. С учетом (3.4), применяя теорему о дивергенции, получим искомое представление для интеграла по Ω в правой части (3.2) в виде контурного интеграла

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\otimes\mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\omega_y = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{H}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}_y d\omega'_y \tag{3.5}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \int_{\Pi_\mathbf{v}} \nabla_\mathbf{v}\mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{z})\otimes\mathbf{k}(\mathbf{y}-\mathbf{z})d\omega_z$$

Интеграл по гиперплоскости Π_ν в (3.5) оказывается корректно определенным, поскольку в силу предложения 2.1 для оператора $\nabla_\mathbf{v}\otimes\mathbf{E}$ в подынтегральном выражении (3.5) выполняется асимптотическая оценка $|\nabla_\mathbf{v}\otimes\mathbf{E}| = O(|\mathbf{x}|^{-2})$, $|\mathbf{x}|\to\infty$, далее используется определение функции $\mathbf{k}$.

Объединение (3.1), (3.2), (3.5) дает

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\cdot\left[\int_{\partial\Omega}(\mathrm{v}_y\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{n}_y\otimes\mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\mathbf{v}_y\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_\mathbf{y}\otimes\mathbf{H}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}_y)d\omega'_y\right] \tag{3.6}$$

Таким образом, из (3.6) вытекает основной результат

Теорема 3.1. Для дислокации с постоянным вектором Бюргерса, находящейся в анизотропной среде с произвольной упругой анизотропией, собственное поле перемещений, вызванное этой дислокацией, определяется интегралом по контуру области несущей дислокацию (петлей дислокации).

Применяя оператор напряжений к (3.6), получим тензорное поле собственных напряжений в анизотропной среде:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_x\otimes\left[\int_{\partial\Omega}(\mathbf{v}_y\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{n}_y\otimes\mathbf{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\mathbf{v}_y\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_y\otimes\mathbf{H}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}_y)d\omega'_y\right]^t\cdot\mathbf{b} \tag{3.7}$$

Следствие. В условиях теоремы 3.1 собственное поле напряжений (3.7) определяется интегралом по контуру дислокации.

Исследования, приведенные в настоящей работе, частично финансировались Международным научным фондом (грант M7Y000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burgers J.M.* Some cosiderations of the field of sterss connected with dislocations in a regular crystal lattice // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. 1939. V. 42. P. 293–325; 378–399.
2. *Peach M.O., Koehler J.S.* The forces exerted in dislocations and the stress field produced by them // Phys. Rev. Ser. 2. 1950. V. 80. P. 436–439.
3. *Nabarro F.R.N.* The mathematical theory of stationary dislocations // Adv. Phys. 1952. V. 1. № 3. P. 269–394.
4. *Chou Y.T., Eshelby J.D.* The energy and line tension of a dislocation in a hexagonal crystal // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. № 1. P. 27–34.
5. *Кузнецов С.В.* Энергия образования дислокации в анизотропной упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 55–60.
6. *Tupholme G.E.* Dislocation loops in hexagonal crystals // J. Mech. Phys. Solids. 1974. V. 22. № 4. P. 309–321.
7. *Gurtin M.E.* The Linear Theory of Elasticity. In: Handbuch der Physik. Bd. Via / 2. Springer, 1973. P. 1–295.
8. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости. М.: Изд. МГУ, 1981. 344 с.
9. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т.1. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1984. 360 с.
10. *Кузнецов С.В.* Фундаментальные решения уравнений Ламе для анизотропных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 50–54.

Москва

Поступила в редакцию
24.XI.1994