

УДК 531.8

© 1996 г. В.Г. МОСКВИН

## **НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Рассмотрена постановка задачи, возникающие проблемы и возможности упрощения динамического анализа сложных механических систем.

**1. Предварительные замечания.** Нормальная работа любого технического объекта во многом зависит от его механической прочности, понимаемой в самом широком смысле [1], поэтому вопросам прочности необходимо уделять особое внимание. На практике цель расчетов на прочность чаще всего состоит в определении характерных параметров напряженно-деформированного состояния (перемещений, деформаций, напряжений, ускорений) в контролируемых точках конструкции с последующим сравнением этих параметров со значениями, устанавливаемыми нормами или техническими требованиями. Эти характерные параметры будем называть далее динамическими характеристиками. Численное определение динамических характеристик систем является сложной в вычислительном отношении проблемой и проводится с использованием соответствующих программных продуктов.

Современная вычислительная техника и эффективное программное обеспечение позволяют по новому ставить и решать задачи моделирования для получения новых технических решений и(или) совершенствования существующих. Проведение предварительных расчетов (так называемого численного эксперимента) позволяет значительно снизить сроки проектирования и объем экспериментальных исследований. Натурные испытания не дают возможности проверить достаточно большое число вариантов изделий. Математическое моделирование позволяет не только сократить число макетов и количество испытаний, но и разрабатывать принципиально новые конструкции. Появляется возможность выбора оптимальных значений конструктивных параметров, анализа работы конструкции в реальных условиях эксплуатации при различных видах воздействий и, как следствие, предварительной оценки прочности и надежности проектируемой конструкции. В настоящее время наиболее универсальные способы моделирования сложных систем основаны на методе конечных элементов (МКЭ) [2]. При использовании МКЭ моделируемая система представляется в виде совокупности отдельных, простых, связанных между собой подсистем, для которых известны математические модели и имеются программные модули для их отображения. Таким образом, создается машинный аналог моделируемой системы с учетом особенностей структуры, геометрии, физико-механических свойств, времени, температуры, нагрузок и т.п. Сложность большинства современных технических объектов заставляет искать различные способы упрощения методов динамического анализа. Сформулируем некоторые проблемы, решение которых позволяет существенно ускорить процесс динамического анализа сложных механических систем и повысить его эффективность: упрощение расчетной модели большого порядка с точки зрения различного рода "слабых связей" в системе, отражающих ее качественные особенности; исследование чувствительности динамических характеристик системы к изменению ее

конструктивных параметров; возможность быстрого количественного оценивания изменений динамических характеристик конструкции, связанных с ее модификацией; эффективное моделирование внешнего динамического воздействия на систему; уменьшение времени работы программы.

Ниже остановимся более подробно на некоторых из перечисленных проблем на примере транспортировки аппаратуры различного назначения. В процессе транспортировки любым видом транспорта (автомобильным, железнодорожным, водным, воздушным) аппаратура испытывает многократные виброударные воздействия, которые могут привести к накоплению усталостных микрповреждений в несущей конструкции и элементах аппаратуры. Переменность нагружения различных узлов аппаратуры при транспортировке наземными видами транспорта обусловлена главным образом характеристиками самого изделия, транспортного средства и дорожных неровностей. Естественное стремление не допустить снижения несущей способности перевозимого объекта в результате переменных воздействий со стороны дороги предполагает необходимость динамического анализа сложной механической системы "транспортируемое изделие – транспортное средство – дорога", причем транспортируемое изделие (аппаратура), в свою очередь, может являться сложной механической системой. На основе этого анализа возможно принятие мер для снижения характерных параметров напряженно-деформированного состояния в опасных точках объекта. Эти меры обычно сводятся к виброударозащите объекта и предполагают умение рассчитывать требуемые для анализа характеристики рассматриваемой системы, в том числе и параметры виброизоляции. Необходимо также знать спектр собственных колебаний транспортной системы, так как при анализе колебаний в самом общем случае (на дороге произвольного микропрофиля) преобладающее значение имеют колебания с собственными частотами.

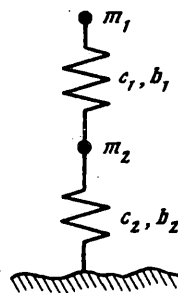
В качестве инструмента исследования будем использовать разработанный в МЭИ программный комплекс FEAMS, предназначенный для определения основных, наиболее часто встречающихся в инженерной практике динамических характеристик механических систем: частот и форм собственных колебаний; амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик; перемещений, скоростей и ускорений для заданных узлов конструкции как при силовом, так и при кинематическом воздействии [3–5]. В частности, в [4] рассмотрена задача динамического анализа транспортных агрегатов. В дальнейшем будем следовать постановке задачи определения динамических характеристик конструкций, подробно изложенной в [3, 4].

**2. Уравнения движения. Модельные примеры.** В большинстве случаев цель расчета динамических характеристик и показателей виброударостойкости транспортного агрегата и груза состоит в определении допустимых ускорений и (или) перемещений в точках конструкции, критичных к виброперегрузкам. При расчетах на случайные воздействия требования к этим параметрам необходимо рассматривать в вероятностной формулировке. При решении задач динамики автомобиля нужно выбрать некоторый оценочный параметр-критерий, характеризующий плавность хода автомобиля, по которому можно оценить качество подвески для виброамортизации автомобиля и сравнить ее различные варианты. В настоящее время еще не выработано единого мнения относительно критериев плавности хода. Однако, если оценка качества подвески транспортного агрегата ведется по виброударным перегрузкам, действующим на груз, что актуально при транспортировке изделий электронной техники, то вопрос решается однозначно – оценку необходимо вести по ускорениям (виброперегрузкам) [4].

Для многих транспортных средств реальные характеристики настолько сложны, что не поддаются точному описанию. Поэтому при решении задач динамики транспортных агрегатов принимают определенные упрощения. Для большей наглядности (возможности вычислительного комплекса позволяют анализировать и пространственные колебания) примем плоскую расчетную схему транспортного агрегата, удовлетворяющую следующим допущениям: движение автомобиля прямолинейно; несущая рама и расположенные на ней узлы и агрегаты симметричны относительно продольной верти-

кальной плоскости; жесткости упругих элементов подвески, шин и сопротивления амортизаторов левых и правых опор одинаковы; профиль дороги под правыми и левыми колесами одинаков; шины имеют точечную двустороннюю связь с дорогой, то есть случай отрыва колес от опорной поверхности исключается; жесткостные и демпфирующие характеристики амортизаторов в пределах рабочих ходов линейны.

Расчетная схема прицепа-тележки к легковому автомобилю показана на фиг. 1. Точечные массы  $m_1$  и  $m_2$  моделируют инерционные свойства кузова и колес прицепа соответственно. Жесткости  $c_1$  и  $c_2$  учитывают соответственно жесткость



Фиг. 1

упругого элемента подвески (пружина, рессора или торсион) и жесткость пневматической шины. Коэффициенты вязкого трения  $b_1$  и  $b_2$  учитывают сопротивление гидравлического амортизатора подвески и потери энергии при деформировании шины. Эта расчетная схема, имея всего две степени свободы, тем не менее отражает все особенности конечноэлементной модели транспортного агрегата, что позволяет эффективно использовать ее для проведения отладочных и тестовых расчетов.

Расчетная модель грузовой транспортной машины с прицепом и с транспортируемым объектом приведена на фиг. 2. Модель состоит из абсолютно твердых тел (АТТ) и точечных масс, соединенных с АТТ и "дорогой" упругими и демпфирующими элементами. АТТ моделируют надрессорные части тягача  $A$  и прицепа  $B$  без учета их деформирования. Точечные массы моделируют колеса. Набор упругих и демпфирующих элементов, соединенных с АТТ, выполняет роль подвесок. Набор упругих и демпфирующих элементов, соединяющих точечные массы с "дорогой", моделирует шины. При необходимости учета деформируемости кузова его можно рассматривать в виде набора пластин и стержней. Транспортируемый груз (аппаратура) с виброзащитными прокладками также может моделироваться или в виде АТТ  $C$  с набором пружин (фиг. 2), или в более детализированном виде, изображенном на фиг. 3 и состоящем из пластины (платы), АТТ (блок аппаратуры), точечной массы (реле), несущих стержневых элементов и демпфирующих пружин.

При сделанных выше предположениях уравнение движения ансамбля узлов конечных элементов расчетной модели транспортного агрегата и транспортируемой аппаратуры в матричной форме имеет вид [2-4]:

$$M\ddot{u} + D\dot{u} + Ku = F(t) \quad (2.1)$$

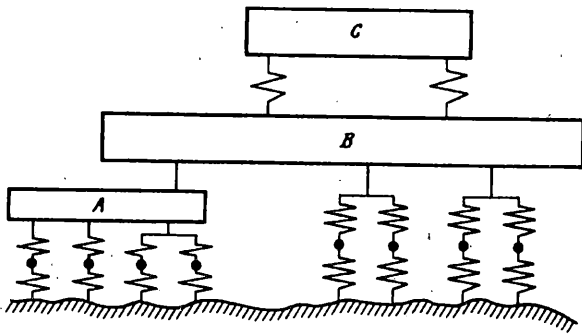
где  $M$ ,  $D$ ,  $K$  – глобальные матрицы инерции, демпфирования и жесткости соответственно,  $F(t)$  – вектор внешних обобщенных узловых нагрузок,  $u(t)$  – вектор неизвестных узловых перемещений системы.

В случае кинематического возбуждения

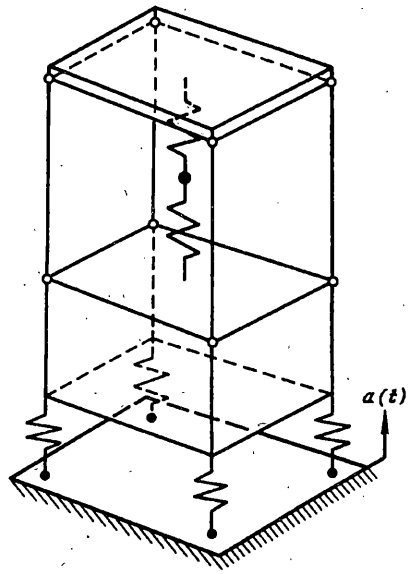
$$F(t) = -Ma(t)I \quad (2.2)$$

где  $a(t)$  – заданное ускорение основания (детерминированное или случайное),  $I$  – вектор, компоненты которого равны единице, если возбуждается соответствующая степень свободы, и равны нулю при отсутствии возбуждения в направлении этой степени свободы. Формула (2.2) применима в том случае, когда одновременно возбуждаются все узлы конструкции (например, при расчете аппаратуры или при испытаниях изделий на вибростенде). Для транспортных агрегатов компоненты вектора  $F(t)$  зависят от положения колес на неровностях дороги (что определяется скоростью движения), от деформаций, жесткостей и коэффициентов демпфирования шин и рессор и определяются в соответствующем модуле программного комплекса.

Рассмотрим более подробно сформулированные выше проблемы динамического анализа конструкций.



Фиг. 2



Фиг. 3

**3. Моделирование внешних воздействий.** Проблема обеспечения требуемых механических характеристик несущих узлов и частей конструкций различного назначения предполагает необходимость учета динамического воздействия на этапе проектирования и отработки изделия, так как колебательные процессы являются наиболее частой причиной отказов и наступления предельных состояний различных элементов аппаратуры. Область применения аналитических методов теории колебаний обычно ограничена требованиями малости коэффициентов демпфирования и возбуждения, необходимостью раздельного анализа каждого из резонансов, в то время как методы математического моделирования позволяют на основе современных ПЭВМ получать решение поставленных задач: с высокой степенью точности; в широкой области изменения параметров; для систем большой размерности; при воздействиях, существенно отличных от гармонических (в том числе случайных). Практически любая задача статистического моделирования динамических характеристик содержит в качестве самостоятельного этапа генерирование реализаций случайных воздействий на систему. Эти вопросы более подробно обсуждаются в [6], где для моделирования реализаций случайного процесса с заданной спектральной плотностью применяется метод линейной теории прогнозирования, использующий цифровой линейный рекурсивный фильтр, на вход которого подается гауссовский белый шум.

**4. Упрощение расчетной модели.** При исследовании динамики сложных конструкций, в частности, транспортных агрегатов, возникают значительные трудности вследствие большого числа степеней свободы расчетных моделей. Поэтому анализ качественных явлений, происходящих в подобных системах, и их оптимизация достаточно трудоемки и неэффективны. За последние годы появилось большое число работ по методам понижения порядка расчетных моделей, среди которых наиболее часто используются метод синтеза по подконструкциям (метод синтеза форм колебаний) и метод итерированных подпространств. Упрощение расчетной модели осуществляется наиболее просто и корректно, если использовать различного рода "слабые связи" [7], имеющиеся в системе и отражающие ее качественные особенности. Тогда подсистемы, на которые расчленяется система, составляют ее ядро, а динамические характеристики близки к соответствующим характеристикам отдельных подсистем.

Понятие слабых связей допускает существенное обобщение, удобное для исследования многомерных систем различной природы, имеющих матричную форму записи

уравнений. Были установлены энергетические и спектральные слабые связи [7]. Такого рода связи достаточно часто встречаются при исследовании различных конструкций. Для сложных систем разбиение на энергетические слабо связанные подсистемы возможно, в частности, если в состав основной подсистемы входит значительно большее число упругих элементов, чем в подсистеме связи. В том случае, если полностью известно решение для подсистем, не представляет труда точно оценить степень связанности различных форм колебаний подсистем. Однако, если порядок подсистем велик, в лучшем случае имеется информация только о низших формах колебаний или ее нет совсем. Поэтому, для эффективного использования слабых связей необходимы приближенные способы оценки связанности подсистем до решения или при неполной информации, например, по коэффициентам исходных матриц  $K$  и  $M$ . Понятие энергетических и спектральных слабых связей дает возможность достаточно просто построить низкочастотную модель системы минимального порядка, которая с хорошей степенью точности позволяет получать динамические характеристики системы в выбранном низкочастотном диапазоне ( $0 - \omega_{\max}$ ) и отсекает высокочастотный спектр.

Процесс анализа связности подсистем и построения расчетной модели меньшего порядка в заданном частотном диапазоне реализован на ЭВМ. Программа позволяет анализировать модели достаточной для инженерной практики размерности. Покажем возможность применения метода построения модели минимального порядка и оценки с помощью данного метода низших собственных частот сложной системы (транспортный агрегат + транспортируемый объект), изображенных на фиг. 2, 3. Для заданной механической системы были построены глобальные матрицы жесткости и инерции и определены собственные частоты всей системы. Используя полученные матрицы жесткости и инерции показано, что основная система является слабо связанной и, следовательно, возможно упрощение расчетной модели. Затем, основная система разделялась на подсистемы и определялись низшие собственные частоты для каждой из этих подсистем. Построение матриц жесткости и инерции, как основной, так и входящих в нее подсистем и вычисление собственных частот проводилось по методу конечных элементов с помощью вычислительного комплекса FEAMS. Для определения условий слабой связанности подсистем для простоты вычислений был использован следующий способ: глобальная матрица жесткости разбивалась на блоки, причем диагональные блоки соответствуют матрицам жесткости входящих в основную систему подсистем, а внедиагональные блоки характеризуют жесткостную связь между подсистемами; вычислялись нормы этих блоков. В том случае, если нормы внедиагональных блоков много меньше нормы диагональных, делался вывод о том, что подсистемы являются слабо связанными. После этого основная система разбивается на подсистемы. Размерности матриц жесткости и инерции каждой из подсистем, естественно, меньше размерности исходной системы. Вычислялись собственные частоты всех подсистем и сравнивались низшие частоты самой низкочастотной подсистемы с частотами основной модели. На основании этих результатов можно сделать выводы о работоспособности и погрешности данного метода. С учетом закрепленных степеней свободы размерность глобальной матриц жесткости и инерции исходной модели равна 64. Для транспортируемой аппаратуры были выделены следующие три подсистемы: первая подсистема состоит из абсолютно твердого тела на четырех пружинах с размерностью матриц равной 6; вторая подсистема включает в себя пластину на четырех стержнях, размерность ее равна 28; третья подсистема состоит из точечной массы с двумя пружинами, она имеет 3 степени свободы. Визуальный анализ фиг. 2 показывает, что подсистемы, моделирующие тягач и прицеп, связаны между собой лишь стержнем с узлами  $A$  и  $B$ . Расчеты по предложенной методике показывают, что эта связь "слабая", поэтому вместо рассмотрения полной системы транспортного агрегата можно рассмотреть две подсистемы меньшей размерности. Анализ частот и форм колебаний основной системы и подсистем показывает, что погрешность определения низших частот и форм колебаний с учетом разбивки конструкции на подсистемы не превышает 10–15%. В случае

более сложных систем эффективность использования данного метода может быть гораздо более высокой.

**5. Анализ чувствительности динамических характеристик.** Системный подход к конструированию и надежности транспортных агрегатов обуславливает большую размерность и сложность возникающих задач. В связи с этим возникает потребность в таких методах анализа систем, которые дают возможность инженеру-проектировщику получить информацию об изменениях характеристик автомобиля при возможных вариациях тех или иных параметров и на этой основе принять обоснованные варианты конструкторских решений. Одним из таких методов является расчет функций чувствительности (ФЧ). В литературе вопрос анализа чувствительности при проектировании конструкций рассматривается в различных аспектах [8–10].

Пусть  $y = [y_1 y_2 \dots y_j \dots y_N]^T$  – вектор выходных характеристик, а  $q = [q_1 q_2 \dots q_k \dots q_L]^T$  – вектор внутренних параметров. Тогда в принятых нами обозначениях абсолютную ФЧ  $j$ -й выходной характеристики к  $k$ -ому параметру будем записывать так:

$$A_{q_k}^{y_j} = \left. \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \right|_{q_0} \quad (5.1)$$

где  $q_0$  – вектор расчетных значений параметров, при которых вычисляется частная производная. Смысл введения количественных показателей параметрической чувствительности конструкции в виде функции (5.1) состоит в том, что в инженерной практике в большинстве случаев при малых вариациях входных параметров  $\Delta q = [\Delta q_1 \Delta q_2 \dots \Delta q_k \dots \Delta q_L]^T$  вариации выходных характеристик  $\Delta y = [\Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_j \dots \Delta y_N]^T$  с приемлемой точностью можно выразить через абсолютные ФЧ (5.1) при помощи абсолютной матрицы чувствительности  $A_q^y$  следующим образом:

$$\Delta y = A_q^y \Delta q, \quad A_q^y = \left\{ A_{q_k}^{y_j} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots, L). \quad (5.2)$$

Фактически выражение (5.2) представляет собой линейную часть разложения  $y$  в ряд Тейлора в окрестности расчетной точки. Полная формула ряда Тейлора для  $j$ -ой выходной характеристики имеет вид:

$$y_j = \sum_{k=1}^L \left. \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \right|_{q_0} \Delta q_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \left. \frac{\partial^2 y_j}{\partial q_k^2} \right|_{q_0} \Delta q_k^2 + \sum_{k < m} \left. \frac{\partial^2 y_j}{\partial q_k \partial q_m} \right|_{q_0} \Delta q_k \Delta q_m + \dots \quad (5.3)$$

Поэтому в случае необходимости более точного получения вариации  $\Delta y_j$  требуется предварительно каким-либо образом определить частные производные второго и более высоких порядков. Именно эти производные отождествляют часто с ФЧ соответствующего порядка. Существуют также другие представления ФЧ высокого порядка, которые подробно описаны в [10], где также вводятся понятия относительно  $o$ -абсолютных, относительных, абсолютно-относительных и осредненных ФЧ. Однако, в данной работе было решено ограничиться абсолютными ФЧ первого порядка.

Таким образом, в применении к анализу чувствительности динамических усилий, частот и форм собственных колебаний, получаем следующие абсолютные ФЧ первого порядка (в дальнейшем будем их называть просто функциями чувствительности или коэффициентами чувствительности):

$$A_{C_k}^{\omega_j} = \left. \frac{\partial \omega_j}{\partial C_k} \right|_{C_0} \quad (5.4)$$

функция чувствительности  $j$ -й собственной частоты  $\omega_j$  транспортного агрегата к изменению жесткости  $k$ -й пружины

$$A_{C_k}^{F_j \max} = \left. \frac{\partial F_j \max}{\partial C_k} \right|_{C_0} \quad (5.5)$$

функция чувствительности максимального за все время наблюдения усилия в  $j$ -й пружине к изменению жесткости  $k$ -й пружины, где  $C_0$  – вектор начальных значений жесткостей.

Для численного анализа чувствительности динамических характеристик (5.4) и (5.5) рассмотрим пример конструкции, расчетная схема которой изображена на фиг. 2. Вычисления показывают, что характер графической зависимости частот от жесткостей пружин представляет собой либо монотонные функции, либо на графиках появляются участки, на которых значение исследуемой частоты практически не зависит от жесткости рассматриваемой пружины. Отмечены более сложные зависимости. При анализе зависимостей максимальных динамических усилий от жесткости пружин можно отметить, что существуют два основных вида зависимостей – непрерывная и имеющая разрыв. Эти графики могут использоваться при подборе конструктивных параметров системы с целью получения требуемых динамических характеристик при заданных внешних воздействиях. Например, при анализе зависимостей для собственных частот можно явно выделить диапазон значений жесткости, при работе в котором можно получить значительное изменение частоты и диапазон, в котором изменение частоты практически не происходит. Оба эти случая могут иметь место при решении различных конструкторских задач. Аналогичный анализ можно провести и в отношении динамических усилий в узлах конструкции.

**6. Упрощение расчетов при модификации конструкции.** Покажем, как для модифицированной модели можно получить результаты, не проводя весь громоздкий цикл проектного расчета, при условии, что конструктивные изменения являются малыми. Заметим, что малость конструктивных изменений не обязательно означает малость изменений кинематических динамических характеристик системы, поскольку последние связаны с характером внешних динамических воздействий. При дальнейшем изложении будем следовать, в основном, работе [11].

Система основных уравнений движения конструкции, рассматриваемой в рамках МКЭ, представима уравнением (2.1). Конструктивные изменения, вносимые в систему, могут отражаться в модификациях матриц жесткостей  $K$ , инерции  $M$  и демпфирования  $D$ . Обычно эти изменения малы по сравнению с первоначальными значениями указанных параметров, так что модифицированные матрицы жесткостей и инерции можно представить в виде

$$K = K_0 + \epsilon K_1, \quad M = M_0 + \epsilon M_1 \quad (6.1)$$

Здесь  $K_0$  и  $M_0$  – исходные матрицы соответственно жесткости и инерции системы, а  $\epsilon K_1$  и  $\epsilon M_1$  – соответствующие изменения этих матриц,  $\epsilon$  – малый параметр, представляющий различия между исходной и модифицированной моделью. Если  $\epsilon \rightarrow 0$ , то эти различия становятся пренебрежимо малыми и измененные значения параметров стремятся к исходным значениям:  $K \rightarrow K_0$ ,  $M \rightarrow M_0$ . В настоящем исследовании не рассматриваются изменения матриц демпфирования, которые могут быть учтены аналогичным образом.

Из соотношений (6.1) видно, что матрицы жесткости  $K$  и инерции  $M$  являются аналитическими функциями малого параметра  $\epsilon$ . В соответствии с теорией возмущений можно записать

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (6.2)$$

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (6.3)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \dots \quad (6.4)$$

где  $u_0$  – вектор динамических перемещений исходной модели,  $\omega$  и  $\Phi$  – соответственно матрицы собственных частот и собственные векторы модифицированной модели, а  $\omega_0$  и  $\Phi_0$  – матрицы собственных частот и собственные векторы исходной модели, причем матрицы  $\omega$  и  $\omega_0$  – диагональные. Важно определить это новое решение  $u$ ,  $\omega$ ,  $\Phi$  для модифицированной модели, не решая повторно уравнение (2.1). Если известно решение  $u_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\Phi_0$  для исходной модели, то необходимо лишь найти поправки (возмущения)  $u_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\Phi_1$  и так далее.

Воспользовавшись условиями ортогональности собственных векторов и отбросив члены порядка  $\varepsilon^2$ , можно получить следующие соотношения [11]:

$$A + A^T = -\Phi_0^T M_1 \Phi_0 \quad (6.5)$$

$$2\omega_0 \omega_1 = \omega_0^2 A + A^T \omega_0^2 + \Phi_0^T K_1 \Phi_0 \quad (6.6)$$

$$\Phi_1 = \Phi_0 A \quad (6.7)$$

При заданных изменениях матриц  $K_1$  и  $M_1$  на основании формул (6.5), (6.6) и (6.7) определяются матрицы  $A$  и  $\omega_1$ , а затем собственные векторы и частоты, уточненные в приближении первого порядка метода возмущений. Аналогичные процедуры можно применить для вычисления возмущений высших порядков.

Для разрешения системы  $n$  матричных уравнений (6.5), (6.6) запишем их в следующем виде:

$$\alpha_{j,k} + \alpha_{k,j} = -m_{j,k}^* \quad (6.8)$$

$$2\omega_{0,j,k} \omega_{1,j,k} = \alpha_{j,k} \omega_{0,j,j}^2 + \alpha_{k,j} \omega_{0,k,k}^2 + k_{j,k}^* \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

$$m_{j,k}^* = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Phi_{0\alpha,j} m_{1\alpha,\beta} \Phi_{0\beta,k}$$

$$k_{j,k}^* = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Phi_{0\alpha,j} k_{1\alpha,\beta} \Phi_{0\beta,k}$$

Вследствие диагональности матриц собственных частот  $\omega$  сразу получим выражения для возмущений собственных частот и диагональных элементов матрицы  $A$ :

$$\omega_{1,j,j} = \frac{m_{j,j}^*}{2} \omega_{0,j,j} + \frac{k_{j,j}^*}{2\omega_0}, \quad \alpha_{j,j} = \frac{m_{j,j}^*}{2} \quad (6.9)$$

которые имеют смысл при  $\omega_{0,j,j} \neq 0$  для всех  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Для внедиагональных элементов матрицы  $A$  получим выражение

$$\alpha_{j,k} = -\frac{m_{j,k}^* \omega_{0,k,k}^2 + k_{j,k}^*}{\omega_{0,j,j}^2 - \omega_{0,k,k}^2} \quad (6.10)$$

при условии, что  $\omega_{0,j,j}^2 - \omega_{0,k,k}^2 \neq 0$  для всех  $j, k = 1, 2, \dots, n$ . Обратим внимание на то, что собственные частоты находятся всегда (в случае отсутствия нулевых частот), а собственные векторы – только при отсутствии кратных частот. Вообще говоря, этот вопрос требует специального исследования.

Результатом разработки данного метода является программный модуль, интегрируемый в пакет прикладных программ FEAMS. В качестве иллюстрирующего тестового примера выбрана модель транспортного агрегата, представленная на фиг. 1. Модификация конструкции заключалась в изменении жесткостей пружин на небольшую величину (порядка нескольких процентов). Вычисления по формулам (6.9) и (6.10)



Таблица 1

$n$	$c_x$	$c_y$	$\overset{\circ}{c}_x$	$\overset{\circ}{c}_y$	$c_x^*$	$c_y^*$
1	$0,275 \cdot 10^8$	$0,275 \cdot 10^8$	$0,1 \cdot 10^7$	0,00	3,64	0,00
2	$0,367 \cdot 10^9$	$0,367 \cdot 10^9$	0,00	$0,2 \cdot 10^8$	0,00	5,45

Таблица 2

$i$	$\omega_0$	$\omega_*$
1	184,7	184,7
2	2378	2377

Таблица 3

$n$	$c_x$	$c_y$	$\overset{\circ}{c}_x$	$\overset{\circ}{c}_y$	$c_x^*$	$c_y^*$
1	$0,275 \cdot 10^8$	$0,275 \cdot 10^8$	$0,1 \cdot 10^8$	0,00	3,64	0,00
2	$0,367 \cdot 10^9$	$0,367 \cdot 10^9$	0,00	$0,2 \cdot 10^9$	0,00	5,45

Таблица 4

$i$	$\omega_0$	$\omega_*$
1	209,4	212,3
2	2405	2414

оформлены в виде отдельного программного модуля. Для получения численных результатов составим две модели: модель № 1, рассматриваемая в качестве исходной, и модель № 2, которая получается модификацией модели № 1 при изменении жесткостей пружин расчетной схемы конструкции, представленной на фиг. 1. Результаты решения проблемы собственных значений для модели № 2, полученные программным модулем FREQ вычислительного комплекса FEAMS, будем использовать в качестве контрольного точного решения. Задача состоит в том, чтобы на основании результатов расчета модели № 1 по известным изменениям матрицы жесткостей, соответствующих переходу к модифицированной модели № 2, построить приближенное решение по описанному выше методу возмущений и сравнить это решение с точным.

Ниже в табличной форме представлены результаты расчетов. В табл. 1 представлены жесткости  $c_x$ ,  $c_y$  [Н/м] пружин с номерами  $n = 1, 2$  исходной модели, а также их абсолютные  $\overset{\circ}{c}_x$ ,  $\overset{\circ}{c}_y$  и относительные изменения  $c_x^*$ ,  $c_y^*$  (в процентах). В табл. 2 приводятся собственные частоты ( $i = 1, 2$ ) для модифицированной модели, полученные в первом приближении метода возмущений  $\omega_*$  и их точные значения  $\omega_0$  [рад/сек]. Табл. 3, 4 аналогичны табл. 1, 2 с той лишь разницей, что изменения жесткостей пружин достаточно велики.

Пример показывает, что при помощи матричного метода возмущений можно находить решения для конструкций с малыми изменениями матриц жесткости (а в общем случае и матриц инерции и демпфирования). Видно, что малые изменения матрицы жесткости приводят к малым изменениям собственных частот и форм колебаний. Следует также отметить, что метод возмущений дает неплохие результаты даже при

сравнительно больших изменениях матрицы жесткости (порядка десятков процентов). Рассмотренный метод позволяет находить новые решения без повторения расчетов для всей конструкции, что обеспечивает эффективность расчетов и снижение вычислительных затрат при проведении вычислительного эксперимента на этапе проектирования, поскольку принятию окончательного решения, как правило, предшествует значительное число изменений первоначального варианта конструкции.

Создание технических объектов с определенными динамическими свойствами является сложной проблемой. Ее решение неизбежно связано с применением динамических расчетов на всех этапах разработки объектов. Следует всегда иметь в виду, что качество объекта во многом определяется качеством проектных решений на самой начальной стадии разработки проекта. В дальнейшем изменение или уточнение конструктивно-силовой схемы объекта могут вызвать возрастание общих сроков разработки и удорожание проекта. Вопросы динамической отработки объектов должны решаться на всех стадиях разработки конструкций, но особенно важным является учет динамических особенностей на самых ранних этапах. В публикуемой работе рассмотрены некоторые методы, позволяющие проводить динамический анализ сложных конструкций наиболее эффективно с точки зрения экономии вычислительных ресурсов при проведении этапа математического моделирования функционирования исследуемой системы.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта по фундаментальным исследованиям в области сельхозмашиностроения (проект 1-11-01).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.
2. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
3. *Москвин В.Г.* Использование метода конечных элементов для статических и динамических расчетов машин, оборудования и аппаратуры // Вестник МЭИ. 1994. Вып. 3. С. 71-77.
4. *Москвин В.Г.* Динамический анализ транспортных машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. Вып. 2. С. 96-100.
5. *Синицын Е.Н., Москвин В.Г.* Расчеты на прочность при проектировании аппаратуры: модели, методы, программные коды, нормы // Надежность и контроль качества. Сер. "Надежность". 1995. Вып. 3. С. 15-19.
6. *Москвин В.Г., Чернов В.К., Шарин А.Б.* Моделирование динамических процессов на ЭВМ // Измерительная техника. 1996. Вып. 3. С. 16-19.
7. *Ахметханов Р.С., Банах Л.Я., Соколин Е.Г.* Построение расчетной модели минимального порядка для сложных колебательных систем // Машиноведение. 1987. № 3. С. 87-94.
8. *Хог Э., Чой К., Комков В.* Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428 с.
9. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Шаранюк А.В.* Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. М.: Наука, 1989. 262 с.
10. *Кофанов Ю.Н.* Теоретические основы конструирования, технологии и надежности радиоэлектронных средств. М.: Радио и связь, 1991. 260 с.
11. *Chen J.C., Wada B.K.* Matrix Perturbation for Structural Dynamic Analysis // AIAA J. 1977. V. 15. No. 8. P. 1095-1100.

Москва

Поступила в редакцию  
4. II. 1996