МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1996

УДК 531.382

© 1996 г. **В.Н. КОШЛЯКОВ**

О ПОНИЖЕНИИ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛИ

В уравнениях возмущенного движения вращающегося около вертикали тяжелого несимметричного твердого тела, рассматриваемых в пространстве параметров Родрига–Гамильтона, осуществляется понижение порядка. Показано, что использование интеграла площадей облегчает исследование устойчивости. Принятые обозначения соответствуют [1].

1. Уравнения возмущенного движения. Телу произвольной формы с неподвижной точкой O сообщается быстрое вращение с угловой скоростью ω относительно неподвижной восходящей вертикали $O\zeta$. С телом связан ортогональный трехгранник $Oxyz$, оси которого совпадают с направлениями главных осей инерции тела в точке O. В обобщение [1] предполагается, что в начальный момент ось Oz находится вблизи вертикали $O\zeta$, но не совпадает с ней. Координатами x_c, y_c, z_c определяется положение центра тяжести тела в осях Ox, Oy и Oz. Диссипацией энергии пренебрегается.

В [1] получен матричный аналог уравнений Эйлера–Пуассона

$$a_0 d^2u / dt^2 + a_0 \Omega du / dt + Su = 0 \quad (a_0 = 2ABC) \tag{1.1}$$

где A, B, C – моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy и Oz соответственно, $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ – матрица-столбец параметров Родрига – Гамильтона λ_s ($s = 0$, 1, 2, 3), подвергнутых преобразованию вращения

$$\begin{aligned} &u_0 = \lambda_0 \cos\chi + \lambda_3 \sin\chi, \quad u_2 = -(\lambda_1 \cos\chi + \lambda_2 \sin\chi) \\ &u_2 = \lambda_2 \cos\chi - \lambda_1 \sin\chi, \quad u_3 = \lambda_0 \sin\chi - \lambda_3 \cos\chi \\ &(\chi = \chi(0) + \omega t / 2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

не изменяющего, как известно, свойства нормировки параметров λ_s. Явные выражения матрицы Ω, а также матрицы S, нелинейно зависящей от переменных u_s, приведены в [1]. Там же показано, что матричное уравнение (1.1) допускает некоторое точное частное решение $u = u^*$, которое в составляющих u_s имеет вид

$$u_0^* = [1 - (u_1^{*2} + u_2^{*2})]^{1/2}, \quad u_3^* = 0 \tag{1.3}$$

где u_1^* и u_2^* удовлетворяют нелинейной системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &2\{(C-B)[1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2})]\omega^2 - Pz_c\}[1 - (u_1^{*2} + u_2^{*2})]^{1/2} u_1 = P[1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2})]y_c \\ &2\{(C-A)[1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2})]\omega^2 - Pz_c\}[1 - (u_1^{*2} + u_2^{*2})]^{1/2} u_2 = P[1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2})]x_c \end{aligned} \tag{1.4}$$

где P – вес тела. Отсюда получим

$$u_1^* = Py_c / 2[(C-B)\omega^2 - Pz_c] + o(u_s^{*3}), \quad u_2^* = Px_c / 2[(C-A)\omega^2 - Pz_c] + o(u_s^{*3}) \tag{1.5}$$

где символом $o(u_s^{*3})$ обозначена совокупность слагаемых порядка u_s^{*3} и выше, имеющая, в свою очередь, порядок ω^{-6} и выше [1]. При достаточно большой начальной угловой скорости ω эти слагаемые могут быть неучитываемы. Когда $C > B \geqslant A$ или $C < B \leqslant A$, что соответствует вращениям относительно наименьшей или наибольшей полуосей эллипсоида инерции для точки O, малость величин (1.5) всегда может быть обеспечена выбором достаточно большой величины ω. Случай, когда $A < C < B$, что соответствует вращению вокруг средней оси эллипсоида инерции, а также случай $A + B = C$, соответствующий вырождению тела в бесконечно тонкую пластинку в плоскости Oxy, из рассмотрения исключаются.

Движение тела, соответствующее рашениям (1.3), (1.4), принимаем в качестве невозмущенного. В невозмущенном движении ось Oz отклонена от вертикали $O\zeta$ на некоторый угол ϑ^*, вращаясь при этом вокруг вертикали с угловой скоростью ω. Точное выражение для ϑ^*, полученное в [1], имеет вид

$$\sin\vartheta^* / 2 = (u_1^{*2} + u_2^{*2})^{1/2} \tag{1.6}$$

где u_1^* и u_2^* – решения системы (1.4).

В возмущенном движении полагаем

$$u_k = u_k^* + x_k \tag{1.7}$$

где x_k – вариации величин u_k, полагающиеся малыми. В результате приходим к дифференциальной системе, являющейся частным случаем системы, описываемой матричным уравнением [2, 3]:

$$a_0 d^2x / dt^2 + V dx / dt + Wx = X \tag{1.8}$$

где V и W – некоторые квадратные матрицы с постоянными элементами, X – матрица с элементами, зависящими от x_k и $\dot{x}_k$ в степенях выше первой.

Выпишем теперь в явной форме полученную в [1] линейную часть системы уравнений возмущенного движения в рассматриваемой задаче:

$$\begin{gathered}
a_0\ddot{x}_0 + a_0\omega u_0^*(u_2^*\dot{x}_1 - u_1\dot{x}_2) - a_2' u_1^* + a_3' u_2^* = 0 \\
a_0\ddot{x}_1 + a_0\omega u_1^* u_2^*\dot{x}_1 + a_0\omega(1 - u_1^{*2})\dot{x}_2 + a_2' u_0^* + a_4' u_2^* = 0 \\
a_0\ddot{x}_2 - a_0\omega(1 - u_1^{*2})\dot{x}_1 - a_0\omega u_1^* u_2^*\dot{x}_2 - a_3' u_0^* - a_4' u_1^* = 0
\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered}
a_2' = -2BC\{m_2(u_1^* x_0 + u_0^* x_1) - m_2'(u_1^* x_1 + u_2^* x_2) + \\
+(C - B)\omega[-n_2 u_2^*\dot{x}_0 + 2n_3 u_2^*\dot{x}_1 + (n_3 u_0^* - 2n_3 u_1^*)\dot{x}_2]\} \\
a_3' = 2CA\{m_3(u_2^* x_0 + u_0^* x_2) - m_3'(u_1^* x_1 + u_2^* x_2) + \\
+(C - A)\omega[n_2 u_1^*\dot{x}_0 - (n_2 u_0^* - 2n_3' u_2^*)\dot{x}_1 - 2n_3' u_1^*\dot{x}_2]\} \\
a_4' = 2AB\{m_4(u_1^* x_0 + u_0^* x_1) - m_4'(u_2^* x_0 + u_0^* x_2) + \\
+2(B - A)\omega[(n_3 u_1^* - n_3' u_2^*)\dot{x}_0 - n_3 u_0^*\dot{x}_1 + n_3' u_0^*\dot{x}_2]\}
\end{gathered} \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered}
m_2 = Pz_c - (C - B)\omega^2 n_2, \quad m_2' = Py_c - 4(C - B)\omega^2 n_3, \quad n_3 = u_0^* u_1^* \\
m_3 = Pz_c - (C - A)\omega^2 n_2, \quad m_3' = Px_c - 4(C - A)\omega^2 n_3', \quad n_3' = u_0^* u_2^* \\
m_4 = Px_c - 2(B - A)\omega^2 n_3', \quad m_4' = Py_c - 2(B - A)\omega^2 n_3, \quad n_2 = 1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2})
\end{gathered} \tag{1.11}$$

Переменные u_k удовлетворяют, как уже отмечалось, условию нормировки

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \tag{1.12}$$

Это условие, естественно, должно соблюдаться и в возмущенном движении. Используя подстановку (1.7), частное решение (1.3)–(1.4) и учитывая постоянство величин $\overset{*}{u}_k$, имеем, в рамках линейного приближения в отношении величин x_k и их производных, условия вида

$$\sum_{s=0}^{2} \overset{*}{u}_s x_s = 0, \qquad \sum_{s=0}^{2} \overset{*}{u}_s \dot{x}_s = 0, \qquad \sum_{s=0}^{2} \overset{*}{u}_s \ddot{x}_s = 0 \tag{1.13}$$

из которых последнее, в силу системы (1.9), соблюдается тождественно.

2. Понижение порядка системы (1.9). Покажем, что порядок системы (1.9) может быть понижен. Для этого выпишем два последних уравнения системы (1.9):

$$\begin{aligned} &a_0\ddot{x}_1 + a_0\omega \overset{*}{u}_1 \overset{*}{u}_2 \dot{x}_1 + a_0\omega(1-\overset{*}{u}_1{}^2)\dot{x}_2 + a_2' \overset{*}{u}_0 + a_4' \overset{*}{u}_2 = 0 \\ &a_0\ddot{x}_2 - a_0\omega(1-\overset{*}{u}_2{}^2)\dot{x}_1 - a_0\omega \overset{*}{u}_1 \overset{*}{u}_2 \dot{x}_2 - a_3' \overset{*}{u}_0 - a_4' \overset{*}{u}_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Согласно выражениям (1.10) в коэффициентах a_2', a_3' и a_4' уравнений (2.1) присутствуют члены с x_0 и $\dot{x}_0$. С помощью первого и второго из условий (1.13) названные члены могут быть выражены через переменные x_1, x_2 и их первые производные. В результате уравнения (2.1) переходят в систему уже двух дифференциальных уравнений относительно x_1 и x_2, являющихся частным случаем системы, описываемой однородной частью матричного уравнения (1.8). Однако полученная таким способом система в своем окончательном виде имеет определенное неудобство: в первом из уравнений системы (2.1) сохраняются члены с $\dot{x}_1$, а во втором – члены с $\dot{x}_2$. При этом след матрицы V оказывается не равным нулю. В [1] отмечалось, что наличие таких членов обусловлено спецификой параметров Родрига – Гамильтона. Отмеченное неудобство устраняется, если в качестве дополнительной информации использовать интеграл площадей

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = h = \text{const} \tag{2.2}$$

выражающий постоянство проекции кинетического момента тела на ось $O\zeta$. Фигурирующие в (2.2) проекции p, q, r угловой скорости тела на оси Ox, Oy и Oz, а также направляющие косинусы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ вертикали $O\zeta$ с указанными осями, выражаются через переменные u_s и $\dot{u}_s$ следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} &p = 2[u_1\dot{u}_0 - u_0\dot{u}_1 - u_3\dot{u}_2 - u_2\dot{u}_3 + \omega(u_1u_3 - u_0u_2)] \\ &q = 2[-u_2\dot{u}_0 + u_0\dot{u}_2 - u_3\dot{u}_0 + u_1\dot{u}_3 + \omega(u_0u_2 + u_2u_3)] \\ &r = \omega - 2\omega(u_1^2 + u_2^2) + 2(u_3\dot{u}_0 - u_3\dot{u}_1 + u_1\dot{u}_2 - u_0\dot{u}_3) \\ &\gamma_1 = 2(u_1u_3 - u_0u_2), \qquad \gamma_2 = -2(u_0u_1 + u_2u_3), \qquad \gamma_3 = 1 - 2(u_1^2 + u_2^2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Интеграл (2.2) следует представить применительно к возмущенному движению. Осуществляя для этой цели постановку (1.7) и учитывая выражения (2.3) имеем, с учетом условий (1.13) и (1.14):

$$\begin{aligned} &Ap\gamma_1 = 4A\overset{*}{u}_2(\dot{x}_1 + 2\omega x_2) + 4A\omega \overset{*}{u}_2{}^2 + o(\overset{*}{u}_s{}^3) \\ &Bq\gamma_2 = -4B\overset{*}{u}_1(\dot{x}_2 - 2\omega x_1) + 4B\omega \overset{*}{u}_1{}^2 + o(\overset{*}{u}_s{}^3) \\ &Cr\gamma_3 = -2C(\overset{*}{u}_1\dot{x}_2 - \overset{*}{u}_2\dot{x}_1) - 8C\omega(\overset{*}{u}_1 x_1 + \overset{*}{u}_2 x_2) + C\omega[1 - 2(\overset{*}{u}_1{}^2 + \overset{*}{u}_2{}^2)] + o(\overset{*}{u}_s{}^3) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для определения постоянной h в интеграле (2.2) зададимся начальными условиями движения применительно к угловым переменным Эйлера, полагая при $t = 0$:

$$\psi = \psi(0), \quad \vartheta = \vartheta(0), \quad \varphi = \varphi(0), \quad \psi^{\cdot}(0) = \omega, \quad \vartheta^{\cdot}(0) = \varphi^{\cdot}(0) = 0 \tag{2.5}$$

При достаточно малом значении $\vartheta(0)$ угла нутации ϑ ось Oz тела в своем начальном положении будет находиться вблизи вертикали $O\zeta$. Пользуясь известными выражениями параметров Родрига – Гамильтона посредством функций эйлеровых углов и принимая во внимание преобразование (1.2), получаем соответственные условиям (2.5) выражения для начальных значений параметров u_s и $u_s^{\cdot}$:

$$\begin{gathered} u_0(0) = \cos\frac{\vartheta(0)}{2}, \quad u_1(0) = -\sin\frac{\vartheta(0)}{2}\cos\left[\frac{\psi(0)-\varphi(0)}{2} - \chi(0)\right] \\ u_2(0) = \sin\frac{\vartheta(0)}{2}\sin\left[\frac{\psi(0)-\varphi(0)}{2} - \chi(0)\right], \quad u_0^{\cdot}(0) = u_1^{\cdot}(0) = u_2^{\cdot}(0) = 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Значения (2.6) удовлетворяют условиям нормировки. Им отвечают определенные начальные значения возмущенных переменных x_s и $x_s^{\cdot}$. Имеем, в частности, $x_0^{\cdot}(0) = x_1^{\cdot}(0) = x_2^{\cdot}(0) = 0$. Если ограничиться точностью выражений (1.5), то интеграл (2.2), отнесенный к возмущенному движению, после нахождения постоянной h представляется в виде

$$(C-2B)\overset{*}{u_1}x_2^{\cdot} - (C-2A)\overset{*}{u_2}x_1^{\cdot} - 4\omega(C-A)\overset{*}{u_2}x_2 - 4\omega(C-B)\overset{*}{u_1}x_1 = h_1 + o(u_s^{*3}) \tag{2.7}$$

$$h_1 = -4\omega[(C-A)\overset{*}{u_2}x_2(0) + (C-B)\overset{*}{u_1}x_1(0)] \tag{2.8}$$

Формулы (2.6) упрощаются, если, в соответствии с [1], положить $\chi(0) = \frac{1}{2}[\psi(0) + \varphi(0)]$.

Уравнение (2.8) дает возможность произвести эквивалентную замену членов с $x_1^{\cdot}$ в первом из уравнений (2.1) и с $x_2^{\cdot}$ – во втором из них. Этим устраняется отмеченное выше неудобство. В результате систему (2.1) можно представить в форме

$$a_0 x^{\cdot\cdot} + Vx^{\cdot} + Wx = 0 \tag{2.9}$$

в которой $x = (x_1, x_2)$ – матрица-столбец переменных x_1 и x_2. Постоянные квадратные матрицы V и W размера 2×2 имеют вид

$$V = \begin{Vmatrix} 0 & v_{12} \\ v_{21} & 0 \end{Vmatrix}, \quad W = \begin{Vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{Vmatrix} \tag{2.10}$$

причем след матрицы V оказывается тождественно равным нулю. Характеристическое уравнение, соответствующее системе (2.9), будет

$$(ABC)^2\rho^4 + b_2\rho^2 + b_3\rho + b_4 = 0 \tag{2.11}$$

$$b_2 = ABC(w_{11} + w_{22}) - v_{12}v_{21}, \quad b_3 = -(w_{12}v_{21} + w_{21}v_{12}), \quad b_4 = w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} \tag{2.12}$$

Простые вычисления, на которых не останавливаемся, показывают, что составляющие v_{12}, v_{21}, w_{11} и w_{22} в рамках принятой точности совпадают с теми, которые получены в работе [1], а именно

$$\begin{gathered} v_{12} = 2BC(A+B-C)\omega, \quad v_{21} = -2AC(A+B-C)\omega \\ w_{11} = 2BC[(C-B)\omega^2 - Pz_c], \quad w_{22} = 2CA[(C-A)\omega^2 - Pz_c] \end{gathered} \tag{2.13}$$

Таким образом

$$b_3 = 2C\omega(A+B-C)(Aw_{12} - Bw_{21}) \tag{2.14}$$

Явные выражения составляющих w_{12} и w_{21} матрицы W, в силу произведенного понижения порядка и использования интеграла (2.8), можно представить в виде

$$w_{12} = 2B\{4\omega^2(C-A)\varkappa_1 - C[3(C-B)\omega^2 + Pz_c] - 2A[(C-A)\omega^2 - Pz_c]\}\overset{*}{u}_1\overset{*}{u}_2 \tag{2.15}$$

$$w_{21} = 2A\{4\omega^2(C-B)\varkappa_2 - C[3(C-A)\omega^2 + Pz_c] - 2B[(C-B)\omega^2 - Pz_c]\}\overset{*}{u}_1\overset{*}{u}_2$$

$$\varkappa_1 = [3C(C-B) + 2A(B-A) - AC](C-2A)^{-1} \tag{2.16}$$

$$\varkappa_2 = [3C(C-A) - 2B(B-A) - BC](C-2B)^{-1}$$

Здесь следует считать $C-2A \neq 0$ и $C-2B \neq 0$, а величины $\overset{*}{u}_1$ и $\overset{*}{u}_2$ определяющимися выражениями (1.5).

Из представлений (2.14)–(2.16) следует, что, помимо исключенного из рассмотрения случая $A + B = C$, коэффициент b_3 обращается в нуль в случае симметричного тела ($A = B$); в случае, когда одна из координат x_c и y_c равна нулю (это соответствует расположению центра тяжести тела в одной из главных плоскостей инерции Oyz или Ozx); в случае тождественного обращения в нуль разности $Aw_{12} - Bw_{21}$. Последний случай, однако, малореален. Действительно, положим [4, 5] C = 3,3 гсмс^2, A = 2,0 гсмс^2, B = 2,1 гсмс^2, P = 0,6 кГ, ω = 1800 с$^{-1}$. Величина z_c, соответствующая тождественному обращению в нуль разности $Aw_{12} = Bw_{21}$, оказывается для этих данных отрицательной. Имеем $l = -z_c \approx$ 3,3 км.

Во всех остальных случаях, помимо оговоренных, независимо от того, выше или ниже точки опоры расположен центр тяжести тела, имеет место неустойчивость тривиального решения системы (2.9), что полностью согласуется с результатом [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кошляков В.Н.* Об одном эффекте неустойчивости в движении быстровращающегося тела вблизи вертикали // Изв. АН. МТТ. 1993. № 1. С. 10–19.
2. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
3. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
4. *Климов Д.М., Харламов С.А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.
5. *Сигачев Н.И.* Гироскопические навигационные приборы. М.: Издание гидрографического управления ВМС, 1954, 342 с.

Киев

Поступила в редакцию
9. II. 1995