МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1996

УДК 531.8

© 1996 г. Н.В. ДУНСКАЯ, Е.С. ПЯТНИЦКИЙ

АВТОМАТИЧЕСКОЕ СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА НА ЭВМ

При моделировании движения многозвенных манипуляционных роботов существенное значение имеет выбор формы, в которой представляются уравнения движения. При этом должны выполняться два естественных требования: вид уравнений должен быть удобным для представления в ЭВМ, а затраты машинного времени на моделирование должны быть по возможности минимальными.

В публикуемой работе разработан метод компьютерного составления уравнений движения манипулятора. В рамках этого метода задача составления уравнений движения сведена к задаче квадратичного программирования, а процесс интегрирования сводится к последовательности решения таких задач на каждом шаге разностной схемы.

1. Постановка задачи. Уравнения движения манипуляторов и других многозвенных систем в независимых обобщенных координатах q_i могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа второго рода [1, 2]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i(q,\dot{q},t) \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1.1}$$

где n – число степеней свободы, $L(q,\dot{q})=T(q,\dot{q})-\Pi(q)$, $Q_i(q,\dot{q},t)$ – непотенциальные обобщенные силы. Кинетическая энергия системы T в обобщенных координатах представляет собой положительно определенную квадратичную форму обобщенных скоростей $\dot{q}_i$:

$$T=2^{-1}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k \tag{1.2}$$

Если выполнить все операции над функцией Лагранжа, предписанные в (1.1), то в векторной форме система уравнений движения будет иметь вид

$$A(q)\ddot{q}-b(q,\dot{q})=Q(q,\dot{q},t), \quad A(q)=\|\partial^2 L/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_k\|_{i,k=1}^{n}=\|a_{ik}(q)\|_{i,k=1}^{n} \tag{1.3}$$

где $A(q)$ – симметрическая матрица коэффициентов кинетической энергии, которая при всех q является матрицей положительной квадратичной формы, т.е. выполнены неравенства

$$\lambda_0\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k \leqslant \lambda_1\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2 \tag{1.4}$$

где λ_0 и λ_1 – положительные числа. Это значит, что кинетическая энергия является строго выпуклой функцией обобщенных скоростей $\dot{q}_i$. Через $b(q,\dot{q})$ обозначена n-мерная вектор-функция, компонентами которой являются квадратичные формы угловых скоростей $\dot{q}_i$. Основная особенность уравнений (1.3) состоит в том, что они не разрешены относительно старших производных $\ddot{q}_i$. В то же время при численном решении этих уравнений на ЭВМ их необходимо предварительно привести к форме

$$\ddot{q} = \Psi(q, \dot{q}, t) \tag{1.5}$$

разрешенной относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}_i$. Задача состоит в представлении функции $\Psi(q, \dot{q}, t)$ в форме, удобной для вычислений.

В публикуемой работе предлагается метод решения уравнения (1.3) на ЭВМ, основанный на оригинальном представлении уравнений (1.1) в нормальной форме Коши. Этот метод включает в себя решение задачи квадратичного программирования.

2. Алгоритм составления уравнения движения на ЭВМ. Предлагаемый метод связан с возможностью описывать механические системы в канонических переменных, совокупность которых образуется обобщенными координатами q_i и обобщенными импульсами p_i ($i = 1, 2,\dots, n$). Обобщенные ипульсы p_i для системы (1.1) определяются с помощью преобразования Лежандра

$$p_i = \partial L(q, \dot{q}) / \partial \dot{q}_i \tag{2.1}$$

Определим, как обычно, функцию Гамильтона $H(q, p, t)$ равенством

$$H(q, p) = \widetilde{\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q})} \tag{2.2}$$

Здесь тильда означает [1] замену всех обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ на их выражения от канонических переменных $\{q, p, t\}$, которые однозначно определяются системой (2.1). Единственность решения системы (2.1) вытекает из свойства строгой выпуклости функции $L(q, \dot{q})$ по обобщенным скоростям $\dot{q}_i$. Уравнения движения (1.1) в переменных $\{q, p, t\}$ будут иметь форму полуканонической системы дифференциальных уравнений [2, 3]:

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i + Q_i(q, \partial H / \partial p_i, t) \tag{2.3}$$

В отличие от уравнений Лагранжа полуканоническая система разрешена относительно производных $\dot{q}_i, \dot{p}_i$. Поэтому для ее решения на ЭВМ можно использовать различные известные разностные схемы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, приведенных к нормальной форме Коши.

Таким образом, для того, чтобы получить систему (2.3), необходимо разрешить систему (2.1) относительно переменных $\dot{q}_i$. Пусть функции $\dot{q}_i = \varphi_i(q, p)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) определяют это решение системы (2.1). Так как функция $L(q, \dot{q})$ является строго выпуклой функцией $\dot{q}_i$, то решение $\varphi(q, p)$ системы (2.1) существует и единственно.

В соответствии с формализмом Гамильтона функции $\varphi_i(q, p)$ будут определять первую группу уравнений системы (2.3):

$$\dot{q}_i = \varphi_i(q, p) \tag{2.4}$$

Чтобы получить вторую группу уравнений (2.3) для обобщенных импульсов, продифференцируем соотношения (2.1) по времени с учетом равенства

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + Q_i,$$

вытекающего из уравнений (1.1). В результате, с учетом (2.4), получим

$$\dot{p}_i = [\partial L(q, \dot{q}) / \partial q_i]_{\dot{q} = \varphi(q, p)} + Q_i(q, \varphi(q, p), t) \tag{2.5}$$

Таким образом, окончательно уравнения движения многозвенной системы будут иметь форму (2.4), (2.5).

Поскольку выражения для частных производных в (2.5) могут быть выведены непосредственно из функции Лагранжа, а обобщенные силы Q_i предполагаются заданными функциями, задача составления уравнений движения сводится к определению функций $\varphi_i(q, p)$, определяющих решение алгебраической системы (2.1). В рассматриваемом случае задача определения функций $\varphi_i(q, p)$ из уравнений (2.1) может быть сведена к задаче на экстремум, для решения которой в свою очередь могут быть использованы различные численные методы.

С этой целью выражение (2.2) для функции Гамильтона представим в эквивалентной форме [3]:

$$H(q,p)=\max_{z\in R^n}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i z_i - L(q,z)\right] \tag{2.6}$$

поскольку функция Лагранжа является строго выпуклой функцией обобщенных скоростей. Из равенства нулю градиента строго вогнутой по переменным z функции $[\Sigma p_i z_i - L(q, z)]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ непосредственно вытекают соотношения (2.1) для обобщенных импульсов. Поэтому в силу единственности стационарной точки

$$\varphi(q,p)=\arg\max_{z\in R^n}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i z_i - L(q,z)\right] \tag{2.7}$$

где $\arg\max f(x)$ понимается в обычном смысле, как обозначение той точки x^*, для которой $f(x^*) = \max f(x)$ $(x \in G)$.

Указанный метод, по существу, представляет процедуру автоматического составления уравнений движения путем алгоритмического решения экстремальной задачи (2.6). Действительно, с учетом принятых обозначений уравнения (2.4) и (2.5) записываются в форме

$$\dot q_i=\arg\max_{z\in R^n}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i z_i - L(q,z)\right]=\varphi_i(q,p) \tag{2.8}$$

$$\dot p_i=\left[\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial q_i}\right]_{\dot q_\nu=\varphi_\nu(q,p)}+[Q_i(q,\dot q,t)]_{\dot q_\nu=\varphi_\nu(q,p)} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

При заданных $L(q,\dot q)$ и $Q_i(q,\dot q,t)$ нахождение значений производных $\dot q_i$ и $\dot p_i$ в каждой точке фазового пространства $\{q, p\}$ сводится, в силу (2.8), к решению задачи максимизации (2.6) и к подстановке решения в Q_i и $\partial L/\partial q_i$.

В случае натуральных систем общего вида [1] задача выпуклого программирования (2.6) переходит в задачу квадратичного программирования, которая имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i - 0{,}5z'A(q)z-\sum_{i=1}^{n} a_i(q)z_i - L_0(q)=\max_{z\in R^n} \tag{2.9}$$

так как $L=0{,}5\dot q' A(q)\dot q+\Sigma a_i(q)\dot q_i+L_0(q)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Для решения этой задачи существует ряд эффективных методов, например, метод сопряженных направлений [4], который дает решение за конечное число шагов.

3. Численный метод интегрирования уравнений движения. Для решения полуканонических уравнений (2.8) можно использовать различные разностные схемы. Суть предлагаемого метода разъясним на примере простейшей схемы Рунге–Кутта. В этом случае системе (2.8) ставится в соответствие разностная схема

$$q_i^{s+1}=q_i^s+hz_i^s \tag{3.1}$$

$$p_i^{s+1}=p_i^s+h\frac{\partial L(q^s,z^s)}{\partial q_i^s}+hQ_i(q^s,z^s,t^s) \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

где h – шаг интегрирования, а вектор z^s определяется из решения задачи квадратичного программирования

$$D(q^s, p^s, z^s) = \sum_{i=1}^{n} p_i^s z_i - 0{,}5z'A(q^s)z - \sum_{i=1}^{n} a_i(q^s)z_i - L_0(q^s) = \max_{z\in R^n} \tag{3.2}$$

Таким образом, в схеме (3.1), (3.2) на каждом шаге решается задача квадратичного программирования (3.2). При этом в качестве начальной точки для вектора z^s при решении задачи (3.2) можно использовать значение $z^{(s-1)}$. Это позволяет сократить число итераций при решении этой задачи.

Для решения задачи (3.2) можно использовать также метод минимальных невязок [5]. Именно, для отыскания стационарных точек z^* функции $D(q^s, p^s, z^s)$ можно воспользоваться рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} &\xi_{m+1} = \xi_m - \gamma_m(A\xi_m - b) \\ &\gamma_m = (Ay_m, y_m)/(Ay_m, Ay_m), \quad b = p^s - a(q^s) \\ &y_m = A\xi_m - b, \quad \xi_0 = q^s \end{aligned} \tag{3.3}$$

Точное решение задачи (3.2) в этом случае определяется предельным соотношением $z^* = \lim \xi_m$, $m \to \infty$. Приближенное решение z^s находится из соображений точности. Выбирая число m из условия достижимости требуемой точности вычислений, в качестве искомого вектора z^s можно принять вектор $\xi_{\bar{m}}$. В частности, число $\bar{m}$ может определяться неравенством $|\xi_{\bar{m}+1} - \xi_{\bar{m}}| < \varepsilon$, или в эквивалентной форме $\|y_m\| \leq \varepsilon / \gamma_{\bar{m}}$. Величину $\gamma_{\bar{m}}$ можно заменить наибольшей величиной $\gamma_{\max} = \max_m \gamma_m$, оценка которой $\bar{\gamma} < \gamma_{\max}$ может быть получена в процессе многократного счета. Тогда условием остановки алгоритма будет выполнение неравенства

$$\|y_m\| \leq \varepsilon / \bar{\gamma} \tag{3.4}$$

В качестве примера использования описанного метода решения уравнений движения рассмотрим задачу моделирования движений плоского многозвенного манипулятора в однородном поле тяжести [6–10] с n звеньями, первое звено которого закреплено в неподвижной точке 0, а все последующие звенья связаны между собой цилиндрическими шарнирами. Введем следующие обозначения: $L_1, \ldots, L_n$ – длины звеньев; $l_1, \ldots, l_n$ – расстояния от центров тяжести $c_1, \ldots, c_n$ звеньев до шарниров, соединяющих их с предыдущими звеньями; $q_1, \ldots, q_n$ – углы, образованные звеньями с вертикалью; $M_1, \ldots, M_n$ – управляющие моменты в шарнирах.

Кинетическая и потенциальная энергия рассматриваемой модели манипулятора имеют вид

$$\begin{aligned} &T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_{ic}^2 + \dot{y}_{ic}^2) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} J_i\dot{q}_i^2 \\ &\Pi = -g\sum_{i=1}^{n} m_i x_{ic} \end{aligned} \tag{3.5}$$

где J_i – моменты инерции звеньев, m_i – массы звеньев. Координаты центров тяжести звеньев x_{ic}, y_{ic} – выражаются через значения углов $q_1, \ldots, q_n$ с помощью геометрических соотношений

$$x_{ic} = \sum_{\nu=1}^{i-1} L_\nu \cos q_\nu + l_i \cos q_i, \quad y_{ic} = \sum_{\nu=1}^{i-1} L_\nu \sin q_\nu + l_i \sin q_i \tag{3.6}$$

Обозначая $\dot{q}_i = z_i$, для скоростей $\dot{x}_{ic}$, $\dot{y}_{ic}$ будем иметь выражения

$$\dot{x}_{ic} = -\sum_{\nu=1}^{i-1} z_\nu L_\nu \sin q_\nu - z_i l_i \sin q_i$$
$$\dot{y}_{ic} = \sum_{\nu=1}^{i-1} z_\nu L_\nu \cos q_\nu + z_i l_i \cos q_i \tag{3.7}$$

Управляющие обобщенные силы Q_i в рассматриваемой модели образуются моментами приводов, причем, $Q_i = M_i - M_{i+1}$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и $Q_n = M_n$. Если (3.6) и (3.7) подставить в выражения (3.5) для кинетической и потенциальной энергий и составить функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, то разностная схема (3.1) после проведения необходимых выкладок, принимает вид [9]:

$$q_i^{s+1} = q_i^s + hz_i^s$$
$$p_i^{s+1} = p_i^s + h\left[\sum_{k=1}^{n} m_k(\dot{x}_{kc}\lambda_{ki} + \dot{y}_{kc}\mu_{ki}) + g\sum_{k=1}^{n} m_k\gamma_{ki} + M_i - M_{i+1}\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.8}$$

где через $\dot{x}_{kc}$, $\dot{y}_{kc}$ обозначены функции (от q_i и z_i) (3.7). Параметры λ_{ki}, μ_{ki}, γ_{ki}, зависящие от q_i, z_i, определяются равенствами

$$\lambda_{ki} = \frac{\partial \dot{x}_{kc}}{\partial q_i} = \begin{cases} 0 & (k < i) \\ -l_i \cos q_i\, z_i & (k = i) \\ -L_i \cos q_i\, z_i & (k > 1) \end{cases}$$
$$\mu_{ki} = \frac{\partial \dot{y}_{kc}}{\partial q_i} = \begin{cases} 0, & (k < i) \\ -l_i \operatorname{sing} q_i\, z_i & (k = i) \\ -L_i \operatorname{sing} q_i\, z_i & (k > i) \end{cases} \tag{3.9}$$
$$\gamma_{ki} = \frac{\partial x_{kc}}{\partial q_i} = \begin{cases} 0, & (k < i) \\ -l_i \operatorname{sing} q_i & (k = i) \\ -L_i \operatorname{sing} q_i & (k > i) \end{cases}$$

В разностных уравнениях (3.8) через z_s обозначен вектор, определяемый из решения задачи квадратичного программирования (3.2), где

$$-0,5z'Az = -\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{\nu=1}^{i-1} L_\nu L_k \cos(q_k - q_\nu) z_\nu z_k + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{\nu=1}^{i-1} l_i L_\nu \cos(q_i - q_\nu) z_i z_\nu + l_i^2 z_i^2\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} J_i z_i^2 \tag{3.10}$$
$$a_i(q^s) = 0, \quad L_0(q) = g\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\sum_{\nu=1}^{i-1} L_\nu \cos q_\nu + l_i \cos q_i\right)$$

Для решения задачи (3.2), (3.10) использовались как метод минимальных невязок, так и метод сопряженных направлений. Метод сопряженных направлений позволяет отыскать экстремум квадратичной функции, за конечное число шагов, равное n. Один шаг итерационной процедуры решения разностных уравнений (3.8) и задачи квадратичного программирования (3.2), (3.10) с использованием метода сопряженных направлений требует осуществления $6n^2 + 13n$ умножений и $7n^2 + 15n$ сложений. При применении метода минимальных невязок на одном шаге итерационной процедуры потребное число умножений равно $12n + (16n)N$, а сложений $14n + (18n)N$, где через N обозначено число шагов рекуррентной процедуры (3.3), реализующее заданную точность алгоритма. Численные эксперименты показали, что в большинстве случаев быстродействие алгоритма при использовании метода минимальных невязок оказывается выше, чем при использовании метода сопряженных направлений, причем преимущество метода минимальных невязок растет с увеличением числа n.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N93-013-16251).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
3. *Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н.* Сборник задач по аналитической механике. М.: Наука, 1980. 320 с.
4. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.
5. *Красносельский М.А., Емелин И.В., Козякин В.С.* Об итерационных процедурах в линейных задачах. М., 1979. 62 с. (Препринт Ин-та проблем управления).
6. *Виттенбург И.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
7. *Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С.* Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978. 416 с.
8. *Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л.* Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 398 с.
9. *Дунская Н.В.* Итерационные методы моделирования механических систем на ЭВМ // Синтез систем управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции. М.: Ин-т проблем управления, 1987. С. 51–54.
10. *Лилов Л.К.* Моделирование систем связанных тел. М.: Наука, 1993. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.II.1994