

УДК 534.1

© 1996 г. М.И. ФЕЙГИН

О ДИНАМИКЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВИБРОУДАРНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Исследуемая система представляет некоторую базовую модель устройств с зазорами в сочленениях. Широкое распространение она получила при исследовании ударного виброгашения.

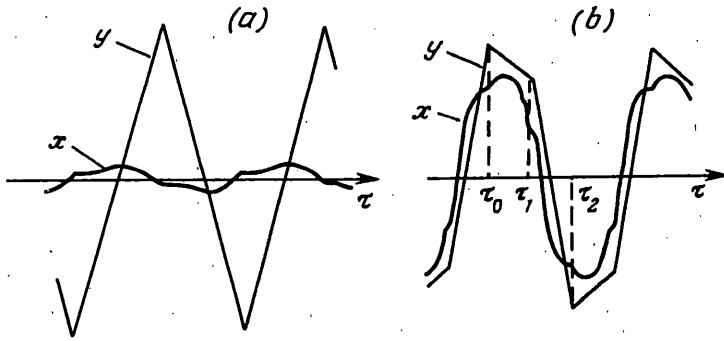
Анализ движений кусочно гладкой динамической системы сведен к исследованию последовательностей отображений Пуанкаре. В широком интервале частот установлено существование источника зарождения интенсивных вибраций – узкой полосы устойчивых периодических решений, включающих специфическое чередование соударений. Показано, что при росте амплитуды возбуждения амплитуда колебаний может возрастать на порядок интенсивней. Предложена методика оценочного расчета вынужденных колебаний.

1. Введение и постановка задачи. Из многочисленных режимов движения колебательной системы с полостью, содержащей виброударный элемент, по характеру воздействия на интенсивность колебаний можно выделить два типа движений – антиподов, в которых проявляются конкурирующие механизмы ударных взаимодействий. Сначала был обнаружен и исследован режим эффективного виброгашения [1–3], при котором устанавливается своеобразная «противофазная синхронизация»: соударения происходят в момент, когда кинетическая энергия системы близка к наибольшей, а скорости соударяющихся масс имеют разные знаки (фиг. 1, а). Теоретическое рассмотрение показало, что указанный режим имеет место при установившихся вынужденных колебаниях простейшего типа с одним ударом за полупериод (в симметричных системах) или за период (в несимметричных системах) и при соответствующей настройке параметров ударника.

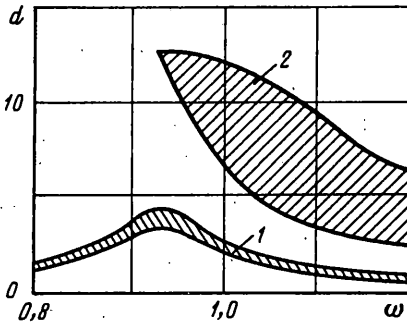
Позднее экспериментально [1] и машинным моделированием был обнаружен противоположный эффект – существенное увеличение вибраций системы при постоянной частоте возбуждения, но изменении некоторых физических параметров. Наблюдавшийся механизм «раскачки» колебаний включал определенную последовательность соударений [3]. В некоторый момент t_0 , когда скорость колеблющейся массы dx/dt близка к нулю, происходит удар, увеличивающий ее кинетическую энергию за счет потери скорости ударником (фиг. 1, б). Последующий удар в момент t_1 восстанавливает скорость ударника dy/dt , но уже с обратным знаком. Вместе с тем, задача теоретического исследования процесса виброударной раскачки оставалась нерешенной.

В публикуемой работе при постановке указанной задачи использован бифуркационный подход к исследованию сильно нелинейных динамических систем, предполагающий априорное знание возможных бифуркационных структур пространства параметров [3, 4]. Применительно к нашему случаю следует иметь представление о бифуркационной картине (или источнике) зарождения описанных режимов движения.

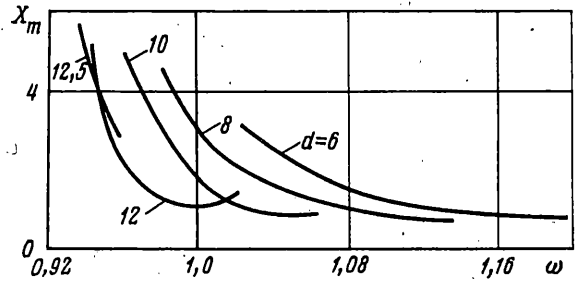
Естественно предположить, что таким источником будет периодическое решение с указанным чередованием ударных взаимодействий. Повидимому, это решение устойчиво в очень узкой полосе пространства параметров, если оно не было зафиксировано машинным моделированием уравнений движения системы. Потеря устойчивости должна происходить на безопасных границах [5], соответствующих бифуркации удвоения



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

периода (N_-) или рождения инвариантного тора (N_ϕ). В этом случае специфическая картина соударений сохранится и за пределами области устойчивости.

Перейдем далее к отысканию и исследованию периодических решений указанного типа.

2. Уравнения движения. Принимаемые к рассмотрению уравнения движения симметричной колебательной системы с массой M , содержащей в полости свободно расположенный ударник с массой m и зазором $2D$, на участке безударных движений имеют вид

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + C \frac{d\xi}{dt} + K\xi = F \cos(\Omega t) \quad (2.1)$$

$$m d^2 \eta / dt^2 = 0, \quad |\eta - \xi| < D$$

Перейдем от размерных смещений колеблющейся массы и ударника ξ, η , а также времени t к безразмерным переменным

$$x = K\xi / F, \quad Y = K\eta / F, \quad \tau = \sqrt{K / Mt} \quad (2.2)$$

и введем безразмерные параметры

$$\mu = m / M, \quad d = KD / F, \quad \omega = \sqrt{M / K} \Omega, \quad \nu = C / (2\sqrt{KM}) \quad (2.3)$$

В результате уравнения (2.1) примут вид

$$x'' + 2\nu x' + x = \cos(\omega\tau) \quad (2.4)$$

$$y' = \text{const}, \quad |y - x| < d$$

Для описания удара воспользуемся стереомеханической моделью, ньютоновским коэффициентом восстановления $0 < R < 1$ и примем обычное соотношение между доударными и послеударными скоростями

$$(1 + \mu)x'_+ = \mu(1 + R)y'_- + (1 - \mu R)x'_- \quad (2.5)$$

$$(1 + \mu)y'_+ = (\mu - R)y'_- + (1 + R)x'_-, \quad |y - x| = d$$

Будем также полагать, что при возникновении учащающихся соударений на одной из поверхностей ($y = x + d$ или $y = x - d$) после некоторого числа ударов и при соответствующем знаке ускорения будет иметь место «слипшееся» движение двух масс [3]. На таком участке принимаем следующие уравнения движения

$$(1 + \mu)x'' + 2\nu x' + x = \cos(\omega t) \quad (2.6)$$

$$|y - x| = d, \quad (y - x)x'' < 0$$

Для исследования движений в кусочно гладкой системе (2.4) – (2.6) вводим в рассмотрение последовательности отображений Пуанкаре поверхностей ударных взаимодействий $y = x \pm d$ на самое себя или одной поверхности на другую.

3. Периодическое решение, соответствующее интенсивным колебаниям. Для построения области существования и устойчивости периодического решения заданного типа (фиг. 1, в) обратимся к процедуре нахождения неподвижных точек соответствующего отображения.

Выбираем начальную точку отображения M_0 на поверхности $y - x = d$ непосредственно после удара. Обозначим соответственно ее координаты $\tau_0, x_0, x'_0, y_0 = x_0 + d, y'_0$. Очередное пересечение фазовой траектории должно произойти с той же поверхностью в доударной точке $M_{1-} \{ \tau_1, x_1, x'_{1-}, y_1 = x_1 + d, y'_{1-} \}$. Координаты M_{1-} определяются решением уравнений (2.4):

$$x_1 = p_1 + e^{-\nu\tau_{01}} ((x_0 - p_0)(C_{01} + \frac{\nu}{\sigma} S_{01}) + \frac{x'_0 - p'_0}{\sigma} S_{01}) \quad (3.1)$$

$$x'_{1-} = p'_1 + e^{-\nu\tau_{01}} ((x'_0 - p'_0)(C_{01} - \frac{\nu}{\sigma} S_{01}) - \frac{x_0 - p_0}{\sigma} S_{01})$$

$$y_1 = y_0 + y'_0 \tau_{01}, \quad y'_{1-} = y'_0, \quad y_1 = x_1 + d$$

$$\tau_{01} = \tau_1 - \tau_0, \quad C_{01} = \cos(\sigma\tau_{01}), \quad S_{01} = \sin(\sigma\tau_{01})$$

$$p_i = \frac{(2\nu\omega)\sin(\omega\tau_i) + (1 - \omega^2)\cos(\omega\tau_i)}{(1 - \omega^2)^2 + 4\nu^2\omega^2}$$

Координаты послеударной точки $M_{1+} \{ \tau_1, x_1, x'_{1+}, y_1, y'_1 \}$ отличаются от координат M_{1-} лишь значением скоростей, определяемых соотношениями (2.5).

Выходящий из точки M_{1+} участок траектории заканчивается в момент τ_2 (фиг. 1, в) на другой поверхности соударений в точке M_{2-} . Ее координаты определяются уравнениями, аналогичными (3.1):

$$x_2 = p_2 + e^{-\nu\tau_{12}} ((x_1 - p_1)(C_{12} + \frac{\nu}{\sigma} S_{12}) + \frac{x'_{1+} - p'_{1+}}{\sigma} S_{12})$$

$$x'_{2-} = p'_2 + e^{-\nu\tau_{12}} ((x'_{1+} - p'_{1+})(C_{12} - \frac{\nu}{\sigma} S_{12}) - \frac{x_1 - p_1}{\sigma} S_{12}) \quad (3.2)$$

$$y_2 = y_1 + y'_1 \tau_{12}, \quad y'_{2-} = y'_1, \quad y_2 = x_2 - d$$

$$\tau_{12} = \tau_2 - \tau_1, \quad C_{12} = \cos(\sigma\tau_{12}), \quad S_{12} = \sin(\sigma\tau_{12})$$

Послеударные координаты точки $M_{2+} \{ \tau_2, x_2, x_{2+}, y_2, y_2' \}$ определяются соотношениями (2.5).

Координаты неподвижной точки отображения, соответствующего симметричному решению, должны удовлетворять условию $M_{2+} = -M_0$:

$$\tau_2 = \tau_0 + \pi / \omega, \quad x_2 = -x_0, \quad x_{2+} = -x_0' \quad (3.3)$$

$$y_2 = -y_0, \quad y_2' = -y_0', \quad y_0 = x_0 + d$$

получили замкнутую систему из 19 уравнений, включающую соотношения (3.1), (2.5), (3.2), (2.5), (3.3), относительно 19 неизвестных координат последовательности неподвижных точек

$$M_0 \rightarrow M_{1-} \rightarrow M_{1+} \rightarrow M_{2-} \rightarrow M_{2+} = -M_0 \quad (3.4)$$

Так как значительная часть неизвестных входит линейно, может показаться целесообразным их исключение с целью получения для дальнейшего исследования небольшого числа трансцендентных уравнений. Однако, как показывает опыт решения аналогичных задач, эти уравнения будут весьма громоздки. Вместе с тем, их решение, независимо от применяемого численного метода, потребует подбора стартовых значений неизвестных.

Более эффективной представляется другая итерационная процедура решения, заключающаяся в непосредственном использовании тех же самых точечных отображений, которые «породили» исследуемую систему уравнений.

Задаем стартовые значения координат точки M_0 и находим последовательно координаты остальных точек (3.4) вплоть до $-M_{2+}$. Координаты последней выбираются в качестве новых стартовых значений и процедура последовательных приближений повторяется, пока расстояние между M_0 и $-M_{2+}$ не уменьшится до требуемой точности $\rho(M_0, -M_{2+}) < \epsilon$. При этом решения уравнений (3.1) и (3.2) сводятся к нахождению соответственно корней τ_{01} и τ_{12} одного трансцендентного уравнения, определяемого условием пересечения участка траектории с поверхностью соударений $y_1 = x_1 + d$ в случае (3.1) или $y_2 = x_2 - d$ в случае (3.2).

Заметим, что описанная процедура не связана с интегрируемостью дифференциальных уравнений движения на отдельных участках и с необходимостью иметь соответствующие решения в явном виде. Для нахождения очередной точки отображения можно воспользоваться численными методами решения исходных дифференциальных уравнений.

Исследование решений, полученной выше системы уравнений, полностью подтвердило правильность постановки задачи. В достаточно широком интервале около-резонансных частот действительно существует узкая область устойчивости периодического решения, которое включает последовательность соударений, специфическую для поддержания интенсивных вибраций.

Прежде всего представляет интерес выделение такой области в плоскости параметров ω, d в предположении, что остальные конструктивные параметры в процессе рабочего режима не изменяются.

На фиг. 2 изображена область устойчивости для случая $R = 0,8$; $\nu = 0,05$; $\mu = 0,1$ (область 1). Она ограничена снизу бифуркационной границей N_- , а сверху границей N_ϕ . Классификация границ определяется характером неподвижных точек после того, как очередное приращение изменяемого параметра нарушит условия $\rho(M_0, -M_{2+}) \rightarrow 0$ для исследуемого типа последовательности отображений. Границе N_- соответствует удвоение периода решения. Границе N_ϕ – более сложное «размывание» области отображения точек исследуемой последовательности. Естественно, что эта область остается ограниченной и сжимается при изменении параметра в обратном направлении в сторону бифуркационной границы.

4. Особенности нелинейного резонанса. Чтобы иметь представление, насколько узка выделенная область устойчивости, проведем также исследование периодического решения с одним соударением за полупериод, соответствующего режиму эффективного виброгашения (противофазной синхронизации). Циклическая последовательность точек отображений в этом случае будет проще, чем (3.4), так как не включает повторного соударения о ту же поверхность $y = x + d$ (точек M_{1-} и M_{1+}). Анализируемая последовательность имеет вид

$$M_0 \rightarrow M_{2-} \rightarrow M_{2+} = -M_0 \quad (4.1)$$

Решение замкнутой системы уравнений, отвечающей схеме (4.1), представляет частный случай решения системы, соответствующей схеме (3.4), если воспользуемся описанной в п. 3 итерационной процедурой. Область устойчивости искомого решения оказывается значительно шире области устойчивости рассмотренного выше решения, соответствующего виброударной раскатке. Она также приведена на фиг. 2 (область 2).

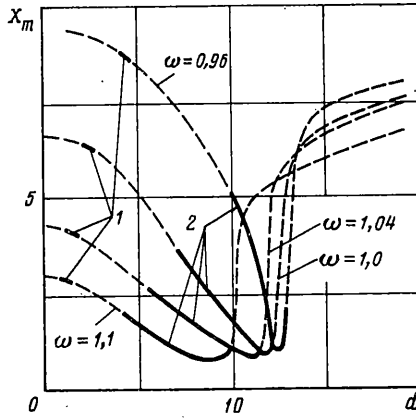
Представляет интерес изучение поведения резонансных кривых $X_m(\omega)$ в рамках решения, соответствующего эффективному виброгашению. Очевидно, что подбором параметров можно минимизировать амплитуду вынужденных колебаний. На фиг. 3 приведено семейство кривых $X_m(\omega)$ в зависимости от параметра d . Существенно, что в окрестности резонансной частоты уменьшение относительного зазора d может вызвать увеличение амплитуды колебаний в 3–5 раз, несмотря на то, что режим движения остается в рамках устойчивых симметричных колебаний с одним соударением за полупериод. Анализ решений показал, что снижение эффекта виброгашения связано с перемещением фазы соударения от точки, соответствующей $|x| \ll 1$, в сторону ее амплитудных значений.

5. К расчету вынужденных колебаний. Из соотношений (2.3) между размерными и безразмерными параметрами следует, что в рабочем режиме изменение амплитуды вынужденных колебаний существенно (и нелинейно) зависит от амплитуды внешней силы F . Для оценки интенсивности вынужденных колебаний воспользуемся двумя базовыми устойчивыми решениями. Одна из них существует в интервале сравнительно небольших значений d (интенсивные колебания), другое – в интервале больших значений d (режим виброгашения). На фиг. 4 приведено семейство зависимостей $X_m(d)$ для ряда фиксированных значений частоты ω . Указанные точные решения, соответствующие (3.4) и (4.1), выделены жирными участками (участки 1 и 2 соответственно).

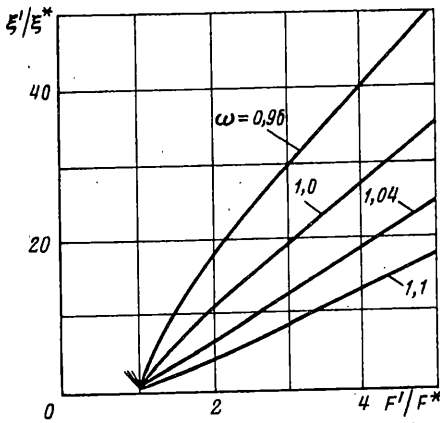
Оценка значений $X_m(d)$ на остальных интервалах (штриховые участки) получена из анализа решений полной системы исходных уравнений (2.4)–(2.6), т.е. включая участки движений с учащающимися ударами. При этом последовательность точек отображения Пуанкаре заранее не фиксировалась, как это было при рассмотрении периодических решений конкретного типа и соответствующих им последовательностей (3.4) и (4.1). Из приведенных кривых видно, что режим виброгашения имеет место в небольших интервалах значений d , сужающихся при переходе в дорезонансную область частоты.

Зависимости $X_m(d)$ представляют как бы перевернутые резонансные кривые $X_m(\omega)$. Если $X_m(\omega)$ указывает на существование резонансной частоты, при которой происходит всплеск амплитуды колебаний, то кривая $X_m(d)$ – на существование «антирезонансного» значения зазора, при котором интенсивность колебаний резко падает.

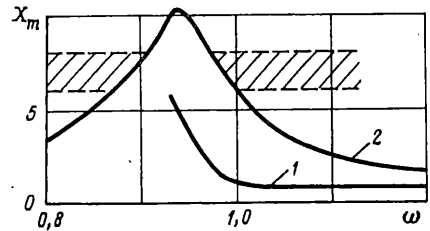
Важно отметить, что изменение d , вызванное изменением амплитуды внешней силы F , приводит к более существенному усилению реальных вибраций, чем это следует из приведенных на фиг. 4 зависимостей. Дополнительный эффект связан с изменением масштаба смещений, откладываемых по оси ординат, в соответствии с соотношением $\xi = xF/K$. Поэтому при уменьшении d за счет F следует учитывать возрастание безразмерной амплитуды в соответствии с зависимостями фиг. 4. Полученное значение



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

нужно дополнительно умножить на отношение F'/F , чтобы оценить эффект для размерных смещений.

Результаты расчетов зависимостей амплитуды колебаний системы ξ'/ξ^* от амплитуды возбуждения F'/F^* для случаев, изображенных на фиг. 4, приведены на фиг. 5. Здесь ξ^* и F^* – амплитуды отклонений системы и внешней силы при оптимальных (для каждого ω) значениях зазора d^* . Из фиг. 5 видно, что ξ' может возрастать на порядок интенсивней увеличения амплитуды возбуждения.

С учетом сделанных замечаний для оценочных расчетов амплитуды колебаний рассматриваемой системы можно рекомендовать следующую методику. На основании анализа устойчивых периодических решений, получаемых точными методами, следует построить две обобщенных резонансных кривых (фиг. 6): одна из них соответствует режиму эффективного виброгашения при оптимальных значениях d (кривая 1), а другая – режиму интенсивных вибраций при значениях d , наиболее «неблагоприятных» (кривая 2). Приведенный на фиг. 5 пример соответствует значениям $\mu = 0,1$; $\nu = 0,05$; $R = 0,8$. Естественно, что колебательные режимы могут отличаться от периодических решений, а максимальные отклонения превышать значения, получаемые для этих решений. Однако, в окрестности резонансной частоты эти отклонения не выходят из полосы $0,7 \pm 0,1$ от $(X_m)_{\max}$ (фиг. 6).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (94-013-16253).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ананьев И.В., Колбин Н.М., Серебрянский Н.П.* Динамика конструкций летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1972. 416 с.
2. *Кобринский А.Е., Кобринский А.А.* Виброударные системы. М.: Наука, 1973. 592 с.
3. *Фейгин М.И.* Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994. 288 с.
4. *Feigin M.I.* Bifurcation problems in system dynamics. Bifurcations in engineering // Dynamics of systems. J. SSME. of N. Novgorod. 1993. No 1. P. 21-43.
5. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.

Н. Новгород

Поступила в редакцию
28.XII.1994