МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1996

УДК 624.072.21

© 1996 г. Л.С. КЛАБУКОВА, Г.И. ПШЕНИЧНОВ, Е.А. ЯКОВЛЕВА

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЗАДАЧАХ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ И УГОЛКА

Методом декомпозиции краевых задач [1, 2] получено численное решение задачи кручения стержня прокатного профиля – уголка. Проведено численное исследование сходимости метода. Показано, что метод позволяет находить как функцию напряжений так и касательные напряжения, вне зоны "входящего угла", с одинаковой точностью.

В целях исследования возможностей метода декомпозиции краевых задач рассмотрена также задача кручения для стержня прямоугольного сечения. Приводятся доказательство сходимости метода и оценки погрешности.

1. Постановка задачи. Задача кручения стержня сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = -f(x,y) = -2 \text{ в } \Omega \tag{1.1}$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega \tag{1.2}$$

Так как касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} пропорциональны соответственно $\partial u/\partial y$ и $\partial u/\partial x$, наряду с функцией напряжений $u(x, y)$ будем отыскивать и производные решения.

2. Решение задачи кручения для стержня прямоугольного сечения методом декомпозиции. *2.1. Декомпозиция.* Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) в прямоугольной области $\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$. В соответствии с методом декомпозиции рассмотрим две вспомогательные одномерные краевые задачи.

Первая задача: решение дифференциального уравнения при фиксированном y

$$\partial^2 u^{(1)} / \partial x^2 = \varphi(x,y) - f(x,y)/2, \quad 0 < x < a \tag{2.1}$$

$$u^{(1)}(0,y) = u^{(1)}(a,y) = 0 \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi(x, y)$ – неизвестная вспомогательная функция.

Вторая задача: решение дифференциального уравнения при фиксированном x:

$$\partial^2 u^{(2)} / \partial y^2 = -\varphi(x,y) - f(x,y)/2, \quad 0 < y < b \tag{2.3}$$

$$u^{(2)}(x,0) = u^{(2)}(x,b) = 0 \tag{2.4}$$

Решение задачи (1.1), (1.2) эквивалентно решению задач (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) при условии

$$u = u^{(1)} = u^{(2)} \tag{2.5}$$

Решение дифференциального уравнения (2.1), (2.2) может быть записано в виде

$$u^{(1)} = l_1(\Phi^{(1)}; x; y) \tag{2.6}$$

$$\Phi^{(1)}(x,y) = \varphi(x,y) - f(x,y)/2$$

$$l_1(\Phi; x; y) = \frac{x}{a}\int_0^d t\,\Phi(t,y)\,dt - \int_0^x t\,\Phi(t,y)\,dt - x\int_x^a \Phi(t,y)\,dt$$

Аналогично, для задачи (2.3), (2.4):

$$u^{(2)} = l_2(\Phi^{(2)}; y; x) \tag{2.7}$$

$$\Phi^{(2)}(x,y) = -\varphi(x,y) - f(x,y)/2$$

$$l_2(\Phi; y; x) = \frac{y}{b}\int_0^b \tau\,\Phi(x,\tau)\,d\tau - \int_0^y \tau\,\Phi(x,\tau)\,d\tau - y\int_y^b \Phi(x,\tau)\,d\tau$$

Подставляя (2.6), (2.7) в условие (2.5), получаем уравнение относительно функции $\varphi(x, y)$:

$$l_1(\varphi; x; y) + l_2(\varphi; y; x) = l_1(f/2; x; y) - l_2(f/2; y; x) \tag{2.8}$$

2.2. *Приближенный метод решения.* Уравнение (2.8) будем решать приближенно, используя метод сеток. Покрываем область Ω сеткой прямых $x_n = nh_x$, $y_m = mh_y$, $n = 0, 1, \ldots, N + 1$, $m = 0, 1, \ldots, M + 1$, где h_x, h_y – шаги сетки по осям OX и OY.

Оператор задачи (2.1), (2.2) на горизонтальных линиях сетки $y = y_m$, $m = 1, \ldots, M$ аппроксимируем следующим разностным оператором:

$$(T_1 u_m^{(1)})_n = \frac{u_{n+1,m}^{(1)} - 2u_{nm}^{(1)} + u_{n-1,m}^{(1)}}{h_x^2} = \varphi_{nm} - \frac{1}{2} f_{nm} \quad (n = 1, \ldots, N) \tag{2.9}$$

$$u_{0m}^{(1)} = u_{N+1,m}^{(1)} = 0$$

Оператор задачи (2.3), (2.4) на вертикальных линиях сетки $x = x_n$, $n = 1, \ldots, N$ аппроксимируем, соответственно, оператором

$$(T_2 u_n^{(2)})_m = \frac{u_{n,m+1}^{(2)} - 2u_{nm}^{(2)} + u_{n,m-1}^{(2)}}{h_y^2} = -\varphi_{nm} - \frac{1}{2} f_{nm} \quad (m = 1, \ldots, M) \tag{2.10}$$

$$u_{n0}^{(2)} = u_{n,M+1}^{(2)} = 0$$

Введем следующие векторы на слоях сетки:

$$\varphi_m^h = \{\varphi_{1m}, \varphi_{2m}, \ldots, \varphi_{Nm}\}, \quad \varphi_n^h = \{\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \ldots, \varphi_{nM}\}$$

$$\mathbf{f}_m^h = \{f_{1m}, f_{2m}, \ldots, f_{Nm}\}, \quad \mathbf{f}_n^h = \{f_{n1}, f_{n2}, \ldots, f_{nM}\}, \quad f_{nm} = f(x_n, y_m)$$

Уравнение (2.8), учитывая (2.5), заменим следующим разностным уравнением в любой точке сетки (m, n):

$$T_1^{-1}\varphi_m^h + T_2^{-1}\varphi_n^h = (T_1^{-1}\mathbf{f}_m^h + T_2^{-1}\mathbf{f}_n^h)/2 \quad (m = 1, \ldots, M, \; n = 1, \ldots, N) \tag{2.11}$$

Операторы T_1^{-1}, T_2^{-1} аппроксимируют операторы $l_1(\varphi, x, y)$ и $l_2(\varphi, y, x)$ на линиях сетки с порядком $O(h_x^2)$ и $O(h_y^2)$ соответственно.

Введем вектор φ^h, упорядочив его компоненты в следующем порядке: $\varphi^h = \{\varphi_{11}, \varphi_{21}, ..., \varphi_{N1}, \varphi_{12}, \varphi_{22}, ..., \varphi_{N2}, ..., \varphi_{1M}, ..., \varphi_{NM}\}$. Систему уравнений (2.11) запишем в матричном виде:

$$A\varphi^h = \mathbf{g}^h \tag{2.12}$$

Исследуем свойства системы уравнений (2.12). Матрица А является симметричной. Покажем, что $(-A)$ положительно-определенная. Отсюда будет следовать однозначная разрешимость задачи (2.12).

Матрица $A = A_1 + A_2$, где A_1 – блочная матрица размера $M \times M$, у которой по главной диагонали стоят матрицы T_1^{-1}, A_2 – матрица, состоящая из матриц T_2^{-1}. Изучим эти матрицы, их спектр.

Так как T_1^{-1} обратная матрица задачи (2.9), то ее собственные векторы $\mathbf{X}_i = \{\sin(i\pi x_1/a), ..., \sin(i\pi x_N/a)\}$, не зависят от слоя m, и соответствующие собственные числа

$$\lambda_i = -h_x^2 / \left(4\sin^2\left(\frac{\pi i h_x}{2a}\right)\right) \quad (i = 1, \dots, N) \tag{2.13}$$

Аналогично, матрица T_2^{-1} – симметрическая, имеющая следующие собственные векторы $\mathbf{Y}_j = \{\sin(j\pi y_1/b), ..., \sin(j\pi y_M/b)\}$, независимые от вертикали $x = x_n$, и следующие собственные числа:

$$\lambda_j = -h_y^2 / \left(4\sin^2\left(\frac{\pi j h_y}{2b}\right)\right) \quad (j = 1, \dots, N) \tag{2.14}$$

Матрица A имеет собственные векторы с следующими компонентами $e_{ij}^{nm} = \sin(i\pi x_n/a)\sin(j\pi y_m/b)$ и соответственно собственные числа

$$\lambda_{ij} = \lambda_i + \lambda_j. \quad (i = 1, ..., N,\ j = 1, ..., M) \tag{2.15}$$

Следовательно, матрица $(-A)$ симметрическая, положительно определенная (см. (2.13)–(2.15)), наименьщее собственное число матрицы $(-A)$ порядка $O(h_x^2 + h_y^2)$ и

$$\min(-\lambda_{ij}) > (h_x^2 + h_y^2)/12 \tag{2.16}$$

Определим скалярное произведение на всей сетке и норму следующим образом:

$$(\mathbf{v}^h, \mathbf{w}^h) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \omega_{mn}\omega_{mn} h_x h_y, \quad \left\|\mathbf{v}^h\right\|^2 = \sum_{m,n} v_{nm}^2 h_x h_y$$

Правая часть уравнения (2.12) $\mathbf{g}^h$ согласно (2.11) имеет следующий вид:

$$\mathbf{g}^h = (A_1\mathbf{f}^h - A_2\mathbf{f}^h)/2, \quad \mathbf{f}^h = \{f_{11}, f_{21}, \dots, f_{N1}, \dots, f_{1M}, \dots, f_{NM}\} \tag{2.17}$$

Утверждение 1. Задача (2.12), (2.17) (см. (2.11)) устойчива по правой части $\mathbf{f}^h$.

Разложим вектор φ^h – решение задачи (2.12), (2.17), по собственным векторам матрицы A и вектор $\mathbf{f}^h$ по тем же векторам

$$\varphi^h = \sum_{n,m} \alpha_{nm} e_{nm}, \quad \mathbf{f}^h = \sum_{n,m} \beta_{nm} e_{nm}$$

Подставим эти выражения в (2.12), (2.17), получим

$$\alpha_{nm}\lambda_{nm} = (\lambda_n - \lambda_m)\beta_{nm}/2 \quad (n = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, M)$$

Так как $\lambda_{nm} = \lambda_n + \lambda_m$ и все λ_n, λ_m одного знака, то $|\lambda_{nm}| > |\lambda_n - \lambda_m|/2$. Следовательно

$$|\alpha_{nm}| < |\beta_{nm}| \quad \text{и} \quad \|\varphi^h\| < \|\mathbf{f}^h\| \tag{2.18}$$

устойчивость по правой части $\mathbf{f}^h$.

Замечание. Об устойчивости задачи (2.12) по правой части $\mathbf{g}^h$. Так как на основании (2.16) минимальное собственное значение оператора $(-A)$ равно

$$\lambda_{nm} = h_x^2 \Big/ \left(4\sin^2\left(\frac{\pi N h_x}{2a}\right)\right) + h_y^2 \Big/ \left(4\sin^2\left(\frac{\pi M h_y}{2b}\right)\right) = O(h_x^2 + h_y^2)$$

то норма оператора A^{-1} порядка $O(1/(h_x^2 + h_y^2))$, следовательно $\|\varphi^h\| < C\|\mathbf{g}^h\|/(h_x^2 + h_y^2)$, $C = \text{const}$.

2.3. Об оценке погрешности разностного решения. Исследуем сходимость сеточной–функции φ^h к $\overline{\varphi}$, где $\overline{\varphi} = \{\varphi(x_1, y_1), ..., \varphi(x_N, y_1), ..., \varphi(x_1, y_M), ..., \varphi(x_N, y_M)\}$.

Имеем два операторных уравнения (2.8) для $\varphi(x, y)$ и приближенное уравнение (2.11) или (2.12) для φ^h. Определим погрешность аппроксимации интегрального уравнения (2.8) разностным (2.11) в точке (n, m).

В задачах (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) заменим производные разностными соотношениями в точках сетки (n, m) через значения точного решения $u^{(1)}(x, y)$, $u^{(2)}(x, y)$ в узлах сетки. Получим следующие системы уравнений для $u^{(i)}(x_n, y_m)$ $(i = 1, 2)$:

$$\begin{aligned}
&T_1 u^{(1)}(x_n, y_m) + M_4^{(x)}(\xi, y_m)\, h_x^2 / 12 = \varphi(x_n, y_m) - f(x_n, y_m)/2 \\
&u^{(1)}(0, y_m) = u^{(1)}(a, y_m) = 0 \\
&T_2 u^{(2)}(x_n, y_m) + M_4^{(y)}(x_n, \zeta)\, h_x^2 / 12 = -\varphi(x_n, y_m) - f(x_n, y_m)/2 \\
&u^{(2)}(x_n, 0) = u^{(2)}(x_n, b) = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь $M_4^{(x)}(\xi, y_m)$, $M_4^{(y)}(x_n, \zeta)$ – значения четвертых производных $u^{(i)}(x, y)$ по x и по y в точках (ξ, y_m), (x_n, ζ), где $\xi \in (x_n, x_{n+1})$, $\zeta \in (y_m, y_{m+1})$, которые считаем ограниченными.

Из уравнений (2.19) получаем согласно (2.5):

$$\begin{gathered}
T_1^{-1}\varphi_m + T_2^{-1}\varphi_n = (T_1^{-1}\mathbf{f}_m - T_2^{-1}\mathbf{f}_n)/2 + \varepsilon^h \\
(n = 1, \ldots, N, \;\; m = 1, \ldots, M) \quad \varepsilon^h = (h_x^2 T_1^{-1}\mathbf{M}_4^{(x)} + h_y^2 T_2^{-1}\mathbf{M}_4^{(y)})/12
\end{gathered} \tag{2.20}$$

где φ_m – вектор с координатами $\varphi(x_n, y_m)$, n – фиксировано; $\mathbf{M}_4^{(x)}$, $\mathbf{M}_4^{(y)}$ – векторы, составленные из компонент равных четвертым производным $u^{(i)}(x, y)$ по x или y.

Так как (2.20) является уравнением в точках (n, m), полученным из (2.8), то ε^h есть погрешность аппроксимации интегрального уравнения (2.8) разностным (2.11) в точках сетки. Из (2.11) и (2.20) получаем

$$T_1^{-1}(\varphi_m - \varphi_m^h) + T_2^{-1}(\varphi_n - \varphi_n^h) = \varepsilon^h \quad (n = 1, \ldots, N, \;\; m = 1, \ldots, M)$$

Здесь учтено, что $\mathbf{f}_m^h = \mathbf{f}_m$, $\mathbf{f}_n^h = \mathbf{f}_n$. В другой записи это соотношение имеет вид

$$A(\varphi - \varphi^h) = \varepsilon^h \tag{2.21}$$

Разложим векторы $\varphi - \varphi^h$, $\mathbf{M}_4^{(x)}$, $\mathbf{M}_4^{(y)}$ по собственным векторам оператора A:

$$\varphi - \varphi^h = \sum_{n,m} \alpha_{nm} e_{nm}, \quad \mathbf{M}_4^{(x)} = \sum_{n,m} \beta_{nm}^{(1)} e_{nm}, \quad \mathbf{M}_4^{(x)} = \sum_{n,m} \beta_{nm}^{(2)} e_{nm}.$$

Подставляя эти разложения в (2.21) и учитывая (2.15), получаем

$$(\lambda_n + \lambda_m)\,\alpha_{nm} = (\lambda_n h_x^2 \beta_{nm}^{(1)} - \lambda_m h_y^2 \beta_{nm}^{(2)})/12$$

Отсюда следует

$$|\alpha_{nm}| < (h_x^2 |\beta_{nm}^{(1)}| + h_y^2 |\beta_{nm}^{(2)}|)$$

Следовательно

$$\|\varphi - \varphi^h\| \leqslant \frac{h_x + h_y}{12} (\|\mathbf{M}_4^{(x)}\| + \|\mathbf{M}_4^{(y)}\|)$$

Обозначая через $C = \max(\| \mathbf{M}_4^{(x)} \|, \| \mathbf{M}_4^{(y)} \|)$ получаем

$$\|\varphi - \varphi^h\| \leqslant C(h_x^2 + h_y^2)/6 \qquad (2.22)$$

Следовательно имеет место сходимость при $h_x, h_y \to 0$.

2.4. Численная реализация. Для численной реализации метода возьмем следующую аппроксимацию уравнения (2.8) на равномерной сетке (x_n, y_m).

Для вычисления интегралов на m-й горизонтали по каждой из частей $[x_n, x_{n+1}]$, входящих в $l_1(\varphi; x; y)$, заметим подынтегральную функцию $\varphi(x, y)$ на линейную φ_m^h. Таким образом каждый интеграл, входящий в $l_1(\varphi; x; y)$, будет аппроксимирован составной квадратурной формулой, имеющей погрешность $O(h_x^2)$. Аналогично строим квадратурные формулы для интегралов, входящих в $l_2(\varphi; y; x)$. В результате для нахождения в узлах сетки (x_n, y_m) приближенного решения φ_{nm}^h, являющегося линейным на ребрах сетки, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений при $n = 1, ..., N$; $m = 1, ..., M$:

$$l_1(\varphi^h; x_n; y_m) + l_2(\varphi^h; y_m; x_n) = l_1(f/2; x_n; y_m) - l_2(f/2; y_m; x_n) \qquad (2.23)$$

$$l_1(\varphi^h; x_n; y_m) = -\sum_{i=1}^{N} p_{ni}\varphi_{im}^h - (\varphi_{0m}(1 - x_n/a) + \varphi_{N+1,m} x_n/a)\, h_x^2/6$$

$$l_2(\varphi^h; y_m; x_n) = -\sum_{j=1}^{M} q_{mj}\varphi_{nj}^h - (\varphi_{n0}(1 - y_m/b) + \varphi_{n,M+1} y_m/b)\, h_y^2/6$$

$$p_{ni} = \begin{cases} x_i h_x (1 - x_n/a) & (i < n) \\ x_n h_x (1 - x_n/a) - h_x^2/6 & (i = n), \\ x_n h_x (1 - x_i/a) & (i > n) \end{cases} \quad q_{mj} = \begin{cases} y_j h_y (1 - y_m/b) & (j < m) \\ y_m h_y (1 - y_m/b) - h_y^2/6 & (j = m) \\ y_m h_y (1 - y_j/b) & (j > m) \end{cases} \qquad (2.24)$$

Значения $\varphi(x, y)$ на границе $\partial\Omega$ определяются из уравнений (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) точно

$$\varphi(x, 0) = f(x, 0)/2 = 1, \quad \varphi(x, b) = f(x, b)/2 = 1$$

$$\varphi(0, y) = -f(0, y)/2 = -1, \quad \varphi(a, y) = -f(a, y)/2 = -1$$

Систему уравнений (2.23) запишем в матричном виде:

$$\tilde{A}\varphi^h = \tilde{\mathbf{g}}^h$$

Матрица данной системы является "разреженной": она состоит из $M \times M$ блочных матриц A_{nm} размера $N \times N$, которые при $n \neq m$ являются диагональными – $A_{nm} = -q_{mn}E$. Матрицы A_{mm} выражаются через матрицы P и Q, определенные ранее по формулам (2.23): $A_{mm} = -(P + q_{mm}E)$.

Матрицы P, Q являются симметричными, следовательно, и матрица $\tilde{A}$ также является симметричной.

Утверждение 2. Матрица $\tilde{A}$ является положительно определенной.

Покажем, что собственные числа данной матрицы – положительные. Рассмотрим задачу на собственные значения: $-P\varphi_m^h = \lambda\varphi_m^h$, m – фиксировано, $n = 1, ..., N$. Заметим, что операторы P и T_1 перестановочны, и

$$(T_1 P\varphi_m^h) = (\varphi_{n+1,m} + 4\varphi_{nm} + \varphi_{n-1,m}) / 6$$

Следовательно

$$(T_1 P\varphi_m^h) = \lambda T_1 \varphi_m^h \tag{2.25}$$

Собственные векторы матриц T_1 и $T_1 P$ одни и те же, $\mathbf{X}_i$, соответствующие им собственные числа равны

$$\lambda_i^{T_1} = -4\sin^2\left(\frac{\pi i h_x}{2a}\right) / h_x^2, \quad \lambda_i^{T_1 P} = \left(2 + \cos\left(\frac{\pi i h_x}{a}\right)\right) / 3$$

Следовательно задача (2.25) имеет собственные векторы $\mathbf{X}_i$ и соответствующие им собственные числа

$$\lambda_i = \frac{(2 + \cos(\pi i h_x / a))}{12\sin^2(\pi i h_x / 2a)} h_x^2, \quad (i = 1, \dots, N) \tag{2.26}$$

Следовательно собственные числа матрицы ($-P$) определяются по формулам (2.26).

Аналогично, рассматривая спектральную задачу $Q\varphi_n^h = \lambda\varphi_n^h$, n – фиксировано, $m = 1, ..., M$, убеждаемся, что ее собственные числа следующие

$$\lambda_j = \frac{(2 + \cos(\pi j h_y / b))}{12\sin^2(\pi j h_y / 2b)} h_y^2, \quad (j = 1, \dots, M)$$

Матрица $\tilde{A}$ имеет собственные числа $\lambda_{ij} = \lambda_i + \lambda_j > 0$ $(i = 1, ..., N, j = 1, ..., M)$. Что и требовалось доказать.

Для решения системы уравнений с симметричной, положительно определенной матрицей $\tilde{A}$ применялся метод Зейделя и метод нижней релаксации. Расчеты показали, что метод нижней релаксации требует меньшего числа итераций, по сравнению с методом Зейделя.

2.5. *О вычислении решения и его производных на линиях сетки.* Для вычисления производных на линиях сетки, продифференцируем интегральные соотношения (2.6), (2.7):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=y_m} = \frac{\partial I_1(\Phi^{(1)}; x; y_m)}{\partial x} = \gamma_1(\Phi^{(1)}; x; y_m)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=x_n} = \frac{\partial I_2(\Phi^{(2)}; y; x_n)}{\partial y} = \gamma_2(\Phi^{(2)}; y; x_n)$$

Получим

$$\gamma_1(\varphi; x; y_m) = \frac{1}{a}\int_0^a t\varphi(t, y_m)\, dt - \int_x^a \varphi(t, y_m)\, dt$$

$$\gamma_2(\varphi; y; x_n) = \frac{1}{b}\int_0^b \tau\varphi(x_n, \tau)\, d\tau - \int_x^b \varphi(x_n, \tau)\, d\tau$$

Приближенные производные на линиях сетки определим через найденный вектор φ^h по следующим формулам:

$$\left.\frac{\partial u^h}{\partial x}\right|_{y=y_m} = \gamma_1(\varphi^h; x; y_m) - \frac{1}{2}\gamma_1(f; x; y_m) \quad (m = 1, \ldots, M)$$

$$\left.\frac{\partial u^h}{\partial y}\right|_{x=x_n} = \gamma_2(\varphi^h; y; x_n) - \frac{1}{2}\gamma_2(f; y; x_n) \quad (n = 1, \ldots, N)$$

Здесь φ^h – кусочно-линейная функция, построенная на линиях сетки по значениям компонент вектора φ^h, $\varphi^h = \{\varphi_{nm}\}$.

Используя гильбертову норму, можно получить следующую оценку погрешности:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u^h}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u^h}{\partial y}\right\|^2 = h_y \sum_{m=1}^{N} \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u^h}{\partial x}\right)^2_{y=y_m} dx +$$

$$+ h_x \sum_{n=1}^{M} \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u^h}{\partial y}\right)^2_{x=x_n} dy \leqslant C\left\|\varphi - \varphi^h\right\|^2 = O(h_x^2 + h_y^2)^2$$

Таким образом для производных имеет место сходимость в гильбертовой норме с погрешностью $O(h_x^2 + h_y^2)$.

Приближенные значения решения задачи (1.1), (1.2) получим, подставляя φ^h в (2.6), (2.7):

$$u^h(x, y_m) = l_1(\varphi^h; x; y_m) - l_1(f; x; y_m)/2$$

$$u^h(x_n, y) = -l_2(\varphi^h; y; x_n) - l_2(f; y; x_n)/2$$

Для разностного решения получаем следующую оценку:

$$h_y \sum_{m=1}^{N} \int_0^a (u(x, y_m) - u^h(x, y_m))^2 dx + h_x \sum_{n=1}^{M} \int_0^b (u(x_n, y) - u^h(x_n, y))^2 dy = O(h_x^2 + h_y^2)^2$$

2.6. *Результаты расчетов.* Пусть $b \geqslant a$. Так как известно, что при кручении прямоугольного стержня наибольшее касательное напряжение $\tau_{z\,\max}$ достигается на границе области в середине длинной стороны, производные решения отыскивались только на границе при $x = 0$. Проведенные расчеты показали, что максимальное значение производной (обозначим ее $\nu^h_{\max}$) действительно достигается в точке $x = 0$, $y = b/2$, а точка максимума решения $u^h_{\max}$ расположена в центре области.

Для численного исследования сходимости метода была рассмотрена задача кручения в квадратной области и разбиение бралось равномерное. Было проведено сравнение полученных приближенных решений $u^h_{\max}$ и производной $\nu^h_{\max}$ с точным решением $u_{\max}$ и с точной производной $\nu_{\max}$, вычисленных в виде рядов Фурье (см. [3]). Предполагалось, что

$$u_{\max} - u^h_{\max} = c_1 h^{s_1}, \qquad \left.\frac{\partial u^h}{\partial x}\right|_{\substack{y=b/2\\x=0}} - \nu^h_{\max} = c_2 h^{s_2}$$

где c_i не зависят от h.

Проведенные расчеты при различных $h_i = 2^{-i}$ ($i = 3, 4, \ldots$) показали, что $s_1 \approx s_2 \approx 2$. Следовательно, как решение, так и производная решения на границе, сходятся к точным со скоростью $O(h^2)$.

3. Решение задачи кручения стержня уголкового профиля. *1.* Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) в области Ω, состоящей из прямоугольников $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, $\Omega_1 = \{0 \leqslant x \leqslant a_1, 0 \leqslant y \leqslant b_1\}$, $\Omega_2 = \{a_1 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b_1\}$, $\Omega_3 = \{0 \leqslant x \leqslant a_1, b_1 \leqslant y \leqslant b\}$.

В соответствии с методом декомпозиции, аналогично п. 2.1, рассмотрим две вспомогательные одномерные задачи:

$$\begin{aligned} &\partial^2 u^{(1)} / \partial x^2 = \varphi(x,y) - \tfrac{1}{2} f(x,y) \\ &u^{(1)}(0,y) = u^{(1)}(a,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b \\ &u^{(1)}(0,y) = u^{(1)}(a_1,y) = 0, \quad b_1 \leqslant y \leqslant b \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &\partial^2 u^{(2)} / \partial y^2 = \varphi(x,y) - \tfrac{1}{2} f(x,y) \\ &u^{(2)}(x,0) = u^{(2)}(x,b) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a_1 \\ &u^{(2)}(x,0) = u^{(2)}(x,b_1) = 0, \quad a_1 \leqslant x \leqslant a \end{aligned} \tag{3.2}$$

Решение задачи (1.1), (1.2) эквивалентно (3.1), (3.2) при условии

$$u = u^{(1)} = u^{(2)} \tag{3.3}$$

Решение дифференциального уравнения (3.1) может быть записано в виде

$$u^{(1)} = \begin{cases} l_1(\Phi^{(1)}; x; y; a) & \text{в } \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ l_1(\Phi^{(1)}; x; y; a_1) & \text{в } \Omega_3 \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\Phi^{(1)}(x, y) = \varphi(x, y) - f(x, y)/2$, а в операторе $l_1(\Phi^{(1)}; x; y; a)$, определенного по формуле (2.6), переменная a указывает верхний предел интегрирования.

Аналогично, для задачи (3.2) решение записывается в виде

$$u^{(2)} = \begin{cases} l_2(\Phi^{(2)}; y; x; b) & \text{в } \Omega_1 \cup \Omega_3 \\ l_2(\Phi^{(2)}; y; x; b_1) & \text{в } \Omega_2 \end{cases} \tag{3.5}$$

где $\Phi^{(2)}(x, y) = -\varphi(x, y) - f(x, y)/2$, а $l_2(\Phi^{(2)}; y; x; b)$ определен в (2.7).

Подставляя (3.4), (3.5) в условие (3.3), получаем уравнение относительно функции $\varphi(x, y)$:

$$\begin{aligned} &l_1(\varphi; x; y; a) + l_2(\varphi; y; x; b) = l_1(f/2; x; y; a) - l_2(f/2; y; x; b) \quad \text{в } \Omega_1 \\ &l_1(\varphi; x; y; a) + l_2(\varphi; y; x; b_1) = l_1(f/2; x; y; a) - l_2(f/2; y; x; b_1) \quad \text{в } \Omega_2 \\ &l_1(\varphi; x; y; a_1) + l_2(\varphi; y; x; b) = l_1(f/2; x; y; a_1) - l_2(f/2; y; x; b) \quad \text{в } \Omega_3 \end{aligned} \tag{3.6}$$

2. При численной реализации (3.6) надо принять во внимание тот факт, что $\varphi(x, y)$ терпит разрыв I-го рода на границе Ω в угловой точке (a_1, b_1) (точке входящего угла):

$$\varphi(x, b_1) = +1 \quad \text{при } a_1 < x \leqslant a, \qquad \varphi(a_1, y) = -1 \quad \text{при } b_1 < y \leqslant b$$

Следовательно, разбиение области выбирается таким образом, чтобы т. (a_1, b_1) не принадлежала сетке.

Введем сетку $x_n = nh_x$ ($n = 0, ..., N_1, N + 1$), $y_m = mh_y$ ($m = 0, ..., M_1, M + 1$), где $h_x = a(N + 1)^{-1}$, $h_y = b(M + 1)^{-1}$, а N и M подобраны так, чтобы a_1/h_x, b_1/h_y – не являлись целыми числами. Аналогично п. 2.4, интегралы, входящие в (3.6) аппроксимируем на линиях сетки квадратурной формулой, которая получается при замене φ на сеточную функцию φ^h, линейную на ребрах сетки. Система алгебраических уравнений имеет вид

$$l_1(\varphi^h;x_n;y_m;a)+l_2(\varphi^h;y_m;x_n;b)=l_1(f/2;x_n;y_m;a)-l_2(f/2;y_m;x_n;b)$$
$$(1\leqslant n\leqslant N_1,\ 1\leqslant n\leqslant M_1)$$
$$l_1(\varphi^h;x_n;y_m;a)+l_2(\varphi^h;y_m;x_n;b_1)=l_1(f/2;x_n;y_m;a)-l_2(f/2;y_m;x_n;b_1)$$
$$(N_1+1\leqslant n\leqslant N,\ \ 1\leqslant m\leqslant M_1)$$
$$l_1(\varphi^h;x_n;y_m;a_1)+l_2(\varphi^h;y_m;x_n;b)=l_1(f/2;x_n;y_m;a_1)-l_2(f/2;y_m;x_n;b)$$
$$(1\leqslant n\leqslant N_1,\ M_1+1\leqslant m\leqslant M)$$

Для решения системы уравнений (3.7) с симметричной матрицей применялся метод Зейделя.

После нахождения сеточной функции φ^h, определим приближенные производные решения на линиях сетки по следующим формулам (см. п. 2.5):

$$\left.\frac{\partial u^h}{\partial x}\right|_{y=y_m}=\begin{cases}\gamma_1(\varphi^h;x;y_m;a)-\gamma_1(f;x;y_m;a)/2 & (x,y_m)\in\Omega_1\cup\Omega_2\\ \gamma_1(\varphi^h;x;y_m;a_1)-\gamma_1(f;x;y_m;a_1)/2 & (x,y_m)\in\Omega_3\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u^h}{\partial y}\right|_{x=x_n}=\begin{cases}\gamma_2(\varphi^h;y;x_n;b)-\gamma_2(f;y;x_n;b)/2 & (x_n,y)\in\Omega_1\cup\Omega_3\\ \gamma_2(\varphi^h;y;x_n;b_1)-\gamma_2(f;y;x_n;b_1)/2 & (x_n,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

Здесь операторы $\gamma_1(\varphi^h;x;y;a)$, $\gamma_2(\varphi^h;y;x;b)$ определены по формулам (2.27), а переменные a и b указывают верхние пределы интегрирования.

Приближенное решение задачи находим по формулам (3.4), (3.5), подставляя вместо функции φ кусочно-линейную сеточную функцию φ^h.

3. Рассмотрим равнобокий уголок $a=b$, $a_1=b_1=1$. Как известно [4], при кручении стержня уголкового профиля (если не рассматривать точку входящего угла, где имеется концентрация напряжения) наибольшее касательное напряжение $\tau_{z\max}$ достигается на внешней границе длинной полки. Поэтому производные решения вычислялись только на границе области при $x=0$ (обозначим максимальную производную $\nu_{\max}$). Исследование полученных результатов при различных соотношениях длин полок $a/a_1\geqslant 2$ показывает в отличие от [4], что максимальное напряжение достигается в точках $y_{\max}<1$, а именно при $a=2$ имеем $y_{\max}\approx 0.88$, при $a>3-y_{\max}\approx 1$. Расчеты показали, что при $a=2$ производная $\nu_{\max}=1{,}0243$, при $a=3-\nu_{\max}=1{,}053$, при $a=4-\nu_{\max}=$ $=1{,}055$. Из анализа численных данных можно сделать вывод, что при $a/a_1\geqslant 4$ максимальное напряжение почти не меняется.

Было проведено сравнение полученных приближенных производных для уголка при $a=2$ с производными, вычисленными в виде рядов [5]. Сопоставление результатов показало отклонение в 0,08%.

Численное исследование сходимости метода производилось для уголка $a=b=2$ следующим образом. Предполагалось, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{y=y_m\\x=0}}-\left.\frac{\partial u^h}{\partial x}\right|_{\substack{y=y_m\\x=0}}=c_m h^s$$

где c_m – не зависят от h. Оценивалась скорость сходимости метода s приближенной производной к точной в точках $y_m=4/5$, $y_m=6/5$ (эти точки близки к точке $\bar{y}$, в которой достигается максимальное напряжение) и точке $y_m=8/5$. Проведенные расчеты при различных $h=2/(N+1)$ $(N=14,24,34,44,54,64)$ показали, что $s\in[1.7,\ 1.9]$. Следовательно, производная решения на границе сходятся к точной примерно со скоростью $O(h^2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01734).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пшеничнов Г.И.* Метод декомпозиции решения уравнений и краевых задач // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 792–794.
2. *Pshenichnov G.I.* A theory of latticed plates and shells. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1993, 309 p.
3. *Тимошенко С.П.* Теоря упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 451 с.
4. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
5. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* О развитии метода Треффца // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 6. С. 713–717.

Москва

Поступила в редакцию
22.VI.1995