

УДК 539.3

© 1996 г. В.А. ТРОЦЕНКО

**ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
НЕЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
СТАТИКИ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНЫХ МЕМБРАН**

Развивается вариационный метод решения задачи статики высокоэластичных круговых мембран при конечных деформациях под воздействием гидростатической нагрузки в условиях ее сингулярного возмущения. В отличие от традиционных методов в данном подходе варьируются не только коэффициенты разложений по некоторому фиксированному базису, но допускается варьирование и самих координатных функций, что позволяет в определенном смысле оптимальным образом аппроксимировать искомые решения с высокими градиентами. Класс допустимых функций, на котором реализован вариационный метод, задается с учетом установленной структуры формальных асимптотических разложений фундаментальной системы решений соответствующей линеаризованной задачи, имеющей особенности как по параметру при старших производных, так и по независимой переменной. Приведен пример, иллюстрирующий эффективность предложенного подхода решения рассматриваемой нелинейной задачи.

1. Рассмотрим круговую мембрану радиуса  $R_0$  из несжимаемого, изотропного и гиперупругого материала постоянной толщины  $h_0$ . Пусть к мембране с жестко закрепленным контуром приложена гидростатическая нагрузка  $Q$ . Тогда в соответствии с нелинейной теорией тонких упругих мембран [1] внутренние усилия  $T_1$  и  $T_2$  деформированной мембраны в направлении ее меридиана и параллели, соответственно, будут определяться из соотношений

$$T_i = \lambda_3 (\lambda_i^2 - \lambda_3^2) (1 + \Gamma \lambda_{3-i}^2) \quad (i = 1, 2), \quad \Gamma = C_2 / C_1$$
$$\lambda_1 = [(dr/ds)^2 + (dz/ds)^2]^{1/2}, \quad \lambda_2 = r/s$$
$$\lambda_3 = 1/(\lambda_1 - \lambda_2) = h(s)/h_0 \quad (0 \leq s \leq 1)$$
(1.1)

Здесь  $\lambda_i$  – главные степени удлинений,  $z(s)$  и  $r(s)$  – осевая и радиальная составляющие радиуса-вектора образующей деформированной мембраны,  $C_1$  и  $C_2$  – физические постоянные в упругом потенциале Муни,  $h(s)$  – толщина мембраны в деформированном состоянии.

Условия равновесия бесконечно малого элемента срединной поверхности деформированной оболочки, находящейся в двухосном напряженном состоянии, позволяют получить уравнения

$$\frac{dT_1}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} (T_1 - T_2) = 0$$
(1.2)

$$T_1 / R_1 + T_2 / R_2 = Q, \quad Q = C^* - Dz(s)$$

где  $R_1 = \lambda_1^3 / (r'' - z' - r'z'')$ ,  $R_2 = -r\lambda_1 / z'$  – главные радиусы кривизны деформированной мембраны;  $C^*$  и  $D$  – постоянные, характеризующие интенсивность гидростатической нагрузки в системе координат, связанной с полюсом деформированной мембраны.

Все величины в соотношениях (1.1) и (1.2) приведены в безразмерном виде. Выбирая в качестве характерного линейного размера радиус  $R_0$ , связь размерных величин, обозначенных звездочкой, с безразмерными осуществляется по формулам  $T_i^* = 2h_0 C_1 T_i$  ( $i=1, 2$ ),  $(r^*, z^*) = (R_0 r, R_0 z)$ ,  $Q^* = 2h_0 C_1 Q / R_0$ .

Уравнения (1.2) вместе с соотношениями (1.1), граничными условиями (в системе координат, связанной с недеформированной мембраной):

$$z(1)=0, r(1)=1 \tag{1.3}$$

и условием ограниченности напряжений при  $s \rightarrow 0$  образуют собой краевую задачу для системы нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно функций  $z(s)$  и  $r(s)$ .

Сформулированная краевая задача допускает эквивалентную вариационную формулировку для функционала [2]:

$$I = \int_0^1 \Phi(s, r(s), z(s), r'(s), z'(s)) ds \tag{1.4}$$

$$\Phi = [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 + \Gamma(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3)]s + Qr^2 z'$$

на классе функций, ограниченных при  $s = 0$  и удовлетворяющих условиям (1.3).

Для отыскания экстремума функционала (1.4) представим функции  $z(s)$  и  $r(s)$  в виде следующих разложений:

$$z(s) = \sum_{k=1}^m x_k u_k(s), \quad r(s) = s + \sum_{k=1}^m x_{k+m} v_k(s) \tag{1.5}$$

где координатные функции  $u_k(s)$  и  $v_k(s)$  в соответствии с (1.3) должны подчиняться условиям

$$u_k(1) = v_k(1) = 0 \tag{1.6}$$

Тогда постоянные  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, 2m$ ), образующие  $2m$ -компонентный вектор  $x$ , определяется из решения нелинейной алгебраической системы

$$g(x) = 0 \tag{1.7}$$

которая получается из условия стационарности функционала (1.4). При этом компоненты вектор-функции  $g$  имеют вид

$$g_i = \int_0^1 \left[ \mu_1 \frac{dz}{ds} \frac{du_i}{ds} - Q\lambda_2 \frac{dr}{ds} u_i \right] s ds \tag{1.8}$$

$$g_{i+m} = \int_0^1 \left[ \mu_1 \frac{dr}{ds} \frac{dv_1}{ds} + \mu_2 v_i \right] s ds \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\mu_1 = \frac{U(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_1}, \quad \mu_2 = \frac{U(\lambda_2, \lambda_1)}{s} + Q\lambda_2 \frac{dz}{ds}, \quad U(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \right] (1 + \Gamma \lambda_2^2)$$

Для решения алгебраической системы (1.7) используется итерационный метод Ньютона. Элементы  $h_{ij}$  верхней относительно главной диагонали части симметричной матрицы Якоби системы функций  $g_1, g_2, \dots, g_{2p}$  относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$  вычисляются по формулам

$$h_{ij} = \int_0^1 \left[ B_1 \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds} + B_2 u_i u_j \right] s ds$$

$$h_{i+m,j+m} = \int_0^1 \left[ C_1 \frac{dv_i}{ds} \frac{dv_j}{ds} + C_2 \frac{d}{ds} (v_i v_j) + C_3 v_i v_j \right] s ds \quad (1.9)$$

$$h_{i,j+m} = \int_0^1 \left[ D_1 \frac{dv_j}{ds} \frac{du_i}{ds} + D_2 v_j \frac{du_i}{ds} + D_3 v_j u_i \right] s ds$$

$$B_1 = z_1(\lambda_1, \lambda_2) \left[ \frac{z'}{\lambda_1} \right]^2 + \mu_1 \left[ \frac{r'}{\lambda_1} \right]^2, \quad B_2 = -D\lambda_2 r'$$

$$C_1 = z_1(\lambda_1, \lambda_2) \left[ \frac{r'}{\lambda_1} \right]^2 + \mu_1 \left[ \frac{z'}{\lambda_1} \right]^2, \quad C_2 = \frac{z_2(\lambda_1, \lambda_2) r'}{s\lambda_1}$$

$$C_3 = \frac{1}{s} \left[ \frac{1}{s} z_1(\lambda_2, \lambda_1) + Qz' \right];$$

$$D_1 = (z_1(\lambda_1, \lambda_2) - \mu_1) \frac{z' r'}{\lambda_1^2}, \quad D_2 = \frac{z' z_2(\lambda_1, \lambda_2)}{s\lambda_1} + \lambda_2 Q, \quad D_3 = -D\lambda_2 z'$$

$$z_1(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ 1 + \frac{3}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right] (1 + \Gamma \lambda_2^2), \quad z_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{2}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} (1 + \Gamma \lambda_1^4 \lambda_2^4)$$

Исходя из установленного асимптотического представления решений в окрестности особой точки  $s = 0$ :

$$z(s) = a_1 + a_2 s^3 + a_3 s^4 + \dots; \quad r(s) = b_1 s + b_2 s^3 + b_3 s^5 + \dots \quad (1.10)$$

и условий (1.6), последовательности координатных функций  $\{u_k(s)\}$  и  $\{v_k(s)\}$  ранее строились на классе степенных функций. При этом было показано, что для широкого класса куполообразных оболочек вращения из высокоэластичных материалов вариационный метод позволяет находить при небольшой размерности алгебраических систем (1.7) с высокой степенью точности как сами решения, так и их первые две производные. Такого качества решения нелинейной задачи статики необходимы при исследовании колебаний неоднородно деформированной оболочки относительно ее равновесного состояния [3]. Однако, для параметров нагрузки, когда  $C^* \ll 1$ , а  $D \gg 1$  (тяжелая жидкость), сходимость последовательных приближений в методе Рунге резко замедляется. Увеличение числа координатных функций в разложениях (1.5) приводит к накоплению погрешностей вычислений и в итоге к потере устойчивости счета до достижения требуемой точности решения задачи. Объяснение этого следует из того, что при рассматриваемых параметрах нагрузки, когда мембрана мало отклоняется от своего исходного состояния и усилия  $\{T_1, T_2\} \ll 1$ , рассматриваемая краевая задача будет относиться к классу нелинейных сингулярно возмущенных задач. Наличие малого параметра при старшей производной в разрешающей системе уравнений приводит к тому, что решения имеют одновременно как быстро, так и медленно изменяющиеся компоненты, и аппроксимация таких решений степенным базисом не приводит к желаемому результату. Ситуация усугубляется еще и тем обстоятельством, что степень сингулярности задачи зависит от самого решения, которое априори неизвестно. Увеличение постоянной составляющей в нагрузке приводит к возрастанию усилий в мембране, которые начинают играть преобладающую роль в формировании деформированной поверхности. Это сопровождается, в свою очередь, увеличением ширины пограничного слоя и переходом исходной задачи из сингулярно возмущенной в регулярную задачу. Таким образом, возникает принципиальный вопрос о расширении класса допустимых функций такими функциями, которые позволяли бы получать приближенные решения в одинаково высокой степени точности как при наличии узкой зоны больших изменений в решениях, так и без нее. Указанная проблема является ключевым моментом в реализации вариационного метода и относится к числу достаточно

сложных задач математической физики. Видимо, поэтому вариационные методы, в отличие от конечно-разностных методов [4, 5], не получили должного развития при решении краевых задач с малым параметром при старшей производной.

Следует отметить, что возможность существования краевого эффекта в задачах статики мягких оболочек была отмечена в [6], где с позиций технической теории для оболочек вращения построены асимптотические соотношения, позволяющие с определенной степенью точности находить напряженно-деформированное состояние вблизи областей с быстро изменяющимися функциями усилий и перемещений.

Решению линейных уравнений осесимметричных колебаний оболочек вращения на основе метода Ритца с учетом функций затухающего краевого эффекта посвящена работа [7].

2. Одним из важных достоинств вариационного метода является то, что он при построении приближенного решения допускает использование любых сведений о задаче, которые могут быть получены из предварительного анализа искомых решений. С другой стороны, методы малого параметра, помимо своего непосредственного применения, могут служить основой для выяснения качественных особенностей задач. Поэтому с целью установления структуры решения и характера его вырождения, когда параметр при старшей производной стремится к нулю, проведем асимптотический анализ исходных уравнений.

После введения малого параметра  $\mu = 1/D$  уравнения равновесия (1.2) в системе координат, связанной с центром недеформированной мембраны, можно переписать в следующей форме:

$$L_1(s, r, z', r', z'', r'') = 0, \quad \mu [L_2(s, r, z', r', z'', r'') - C^*] = l - z \quad (2.1)$$

$$L_1 = \frac{dT_1}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} (T_1 - T_2), \quad L_2 = \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}, \quad l = z(0)$$

Разыскивая прямое разложение решений системы (2.1) в виде

$$z(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z^{(k)}(s), \quad r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k r^{(k)}(s) \quad (2.2)$$

разложим операторы  $L_i (i = 1, 2)$  в ряд Тейлора по параметру  $\mu$

$$L_i = (L_i)_{\mu=0} + \frac{\mu}{1!} \left( \frac{dL_i}{d\mu} \right)_{\mu=0} + \dots + \frac{\mu^n}{n!} \left( \frac{d^n L_i}{d\mu^n} \right)_{\mu=0} + \dots \quad (2.3)$$

После подстановки (2.2) и (2.3) в (2.1) и приравнивания коэффициентов разложений при одинаковых степенях  $\mu$  получим

$$(L_1)_{\mu=0} = 0, \quad z^{(0)}(s) = l$$

$$(dL_1 / d\mu)_{\mu=0} = 0, \quad (L_2)_{\mu=0} - C^* = -z^{(1)}(s) \quad (2.4)$$

$$(d^n L_1 / d\mu^n)_{\mu=0} = 0, \quad \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d^{(n-1)} L_2}{d\mu^{(n-1)}} \right)_{\mu=0} = -z^{(n)}(s) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Ограниченное решение нелинейного уравнения  $(L_1)_{\mu=0} = 0$  относительно функции  $r^{(0)}(s)$  можно получить, раскладывая его в ряд Тейлора в окрестности точки  $s = 0$  с учетом условий симметрии задачи

$$(\lambda_1)_{s=0} = (\lambda_2)_{s=0} = \lambda, \quad (T_1)_{s=0} = (T_2)_{s=0} = T, \quad \left( \frac{1}{R_1} \right)_{s=0} = \left( \frac{1}{R_2} \right)_{s=0} = \frac{1}{R} \quad (2.5)$$

При этом можно показать, что

$$r^{(0)}(s) = a_1 s, \quad z^{(0)}(s) = l \quad (2.6)$$

где  $a_1$  – произвольная постоянная.

В свою очередь, с учетом выражений (2.6) линейные уравнения первого приближения позволяют найти выражения для функций  $r^{(1)}(s)$  и  $z^{(1)}(s)$ :

$$r^{(1)}(s) = a_2 s, \quad z^{(1)}(s) = 0^*,$$

где  $a_2$  – произвольная постоянная.

После несложных, но довольно громоздких преобразований, можно показать, что

$$r^{(n)}(s) = a_n s, \quad z^{(n)}(s) = 0 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Собирая полученные результаты, получаем общий вид ограниченного при  $s = 0$  прямого разложения (2.2):

$$r(s) = A(\mu)s, \quad z(s) = C/D, \quad C = C^* + lD \quad (2.7)$$

Установить структуру решений в краевой зоне, исходя из уравнений (2.1), не удается, поскольку уравнения первого итерационного процесса являются нелинейными, которые в явном виде не интегрируются. Одним из основных методов решения нелинейных краевых задач является метод линеаризации, базирующийся на построении итерационного процесса, на каждом шаге которого решается линейная краевая задача. Поскольку линеаризованная задача порождена нелинейной, то есть основания ожидать, что свойства ее решений максимально приближены к свойствам решений исходной нелинейной задачи. Поэтому в дальнейшем предполагается провести асимптотический анализ линеаризованных уравнений равновесия (2.1) относительно некоторого равновесного состояния с целью установления структуры их решений с последующим наделением этими качествами решений нелинейной задачи.

Предположим, что мембрана находится в деформированном состоянии в результате приложения гидростатической нагрузки. Пусть оболочка перешла в новое состояние за счет дополнительного изменения постоянной составляющей давления на малую величину  $\delta C^*$ . Обозначим через  $u$  и  $w$  проекции перемещения оболочки от этой нагрузки на направление ее образующей и внешней нормали соответственно. Основное напряженно-деформированное состояние будем характеризовать усилиями  $T_1$  и  $T_2$  и главными степенями удлинений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ . Проведя линеаризацию соотношений упругости (1.1), можно установить связь между дополнительными усилиями  $\delta T_1$ ,  $\delta T_2$  и деформациями оболочки

$$\delta T_1 = c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2, \quad \delta T_2 = c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{du}{d\alpha} + w \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{\cos \alpha}{r} u + \frac{w}{R_2}$$

$$c_{11} = f_1(\lambda_1, \lambda_2), \quad c_{12} = f_2(\lambda_1, \lambda_2), \quad c_{21} = f_2(\lambda_2, \lambda_1), \quad c_{22} = f_1(\lambda_2, \lambda_1)$$

$$f_1 = f_1(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 \lambda_3 - 3\lambda_2^3 + \Gamma((\lambda_1, \lambda_2 + 3\lambda_2^2 \lambda_3^2))$$

$$f_2 = f_2(\lambda_1, \lambda_2) = 3\lambda_3^3 - \lambda_1^2 \lambda_3 + \Gamma(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_2^2 \lambda_3^3)$$

Здесь  $\alpha$  – угол между внешней нормалью к оболочке и ее осью симметрии. В свою очередь, линеаризованные уравнения равновесия в перемещениях, описывающие возмущенное состояние оболочки, будут иметь вид

$$L_{11}(u) + L_{12}(w) = 0$$

$$\varepsilon^2(L_{21}(u) + L_{22}(w)) + r \left( \frac{dr}{ds} w + \frac{dz}{ds} u \right) = (\varepsilon^2 \delta C^* + \Delta l) r \lambda_1 \quad (2.9)$$

$$L_{11}(u) = -\frac{d}{ds} \left( \alpha_1 \frac{du}{ds} \right) + \alpha_2 u, \quad L_{12}(w) = \alpha_3 \frac{dw}{ds} + \alpha_4 w$$

$$L_{22}(u) = -\frac{d}{ds} \left( \beta_1 \frac{dw}{ds} \right) + \beta_2 w, \quad L_{21}(u) = \beta_3 \frac{du}{ds} + \beta_4 u$$

$$\alpha_1 = \frac{c_{11} r}{\lambda_1}, \quad \alpha_2 = \alpha_2^{(1)} + \frac{d\alpha_2^{(2)}}{ds}, \quad \alpha_2^{(1)} = \frac{c_{22}}{r\lambda_1} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{r\lambda_1 T_2}{R_1 R_2}$$

$$\alpha_2^{(2)} = -\frac{c_{12} + T_1}{\lambda_1} \frac{dr}{ds}, \quad \alpha_3 = -r \left( \frac{c_{11}}{R_1} + \frac{c_{21}}{R_2} \right), \quad \alpha_4 = \alpha_4^{(1)} + \frac{d\alpha_4^{(2)}}{ds}$$

$$\alpha_4^{(1)} = \left( \frac{c_{21} + T_2}{R_1} + \frac{c_{22}}{R_2} \right) \frac{dr}{ds}, \quad \alpha_4^{(2)} = -r \left( \frac{c_{11}}{R_1} + \frac{c_{12} + T_1}{R_2} \right)$$

$$\beta_1 = \frac{rT_1}{\lambda_1}, \quad \beta_2 = r\lambda_1 \left( \frac{c_{11} - T_1}{R_1^2} + \frac{c_{12} + c_{21}}{R_1 R_2} + \frac{c_{22} - T_2}{R_2^2} \right), \quad \beta_3 = -\alpha_3$$

$$\beta_4 = \beta_4^{(1)} + \frac{d\beta_4^{(2)}}{ds}, \quad \beta_4^{(1)} = \left( \frac{c_{12}}{R_1} + \frac{c_{22} - T_2}{R_2} \right) \frac{dr}{ds}, \quad \beta_4^{(2)} = \frac{rT_1}{R_1}$$

$$\varepsilon^2 = \mu, \quad \Delta l = w(0)$$

Можно показать, что структура прямого разложения по параметру  $\varepsilon$  решений уравнений (2.9) соответствует структуре (2.7), установленной из системы нелинейных уравнений. Предметом дальнейшего изложения является построение интегралов исходной системы с большой изменяемостью, которым соответствуют ограниченные перемещения и деформации оболочки в возмущенном состоянии. В связи с тем, что прямое разложение является приближением к некоторому решению исходных уравнений (2.9), то пограничную часть асимптотики будем искать как приближения к решению соответствующей однородной системы уравнений. При этом будем учитывать, что функции  $z(s)$  и  $r(s)$ , характеризующие геометрию оболочки в основном деформированном состоянии, являются аналитическими функциями в определенной области и в соответствии с (1.10) раскладываются в степенные ряды по четным и нечетным степеням  $s$  соответственно. В свою очередь, функции  $\lambda_i(s)$ ,  $T_i(s)$  и  $R_i(s)$  ( $i = 1, 2$ ) раскладываются в степенные ряды по четным степеням  $s$  со свободными членами, совпадающими с  $\lambda$ ,  $T$  и  $R$  в полюсе оболочки. На основании этого можно сделать вывод, что точка  $s = 0$  является регулярной особой точкой для системы уравнений (2.9). Таким образом, для линеаризованных уравнений с переменными коэффициентами имеются особенности как по параметру, так и по независимой переменной.

Определенным ориентиром для асимптотического представления решений такой системы могут служить упрощенные уравнения, которые получаются из исходных уравнений при сохранении в их коэффициентах в соответствии со сказанным выше лишь первых членов разложений. При этом будем иметь

$$c_{11}^{(0)} \frac{dY}{ds} + \frac{\lambda^2 T}{R^2} u + \frac{\lambda(c_{11}^{(0)} + c_{12}^{(0)})}{R} \frac{dw}{ds} = 0 \quad (2.10)$$

$$\varepsilon^2 \left[ \frac{\lambda(c_{11}^{(0)} + c_{12}^{(0)})}{R} Y - T \nabla^2 w + \frac{2\lambda^2}{R^2} (c_{11}^{(0)} + c_{12}^{(0)} - T) w \right] + \lambda^2 w = 0$$

$$Y = \frac{du}{ds} + \frac{1}{s} u, \quad \nabla^2 = \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left( s \frac{d}{ds} \right)$$

Здесь  $c_{11}^{(0)}, c_{12}^{(0)}$  – первые члены разложений в степенные ряды переменных коэффициентов в соотношениях упругости (2.8).

Структура системы уравнений (2.10) позволяет заключить, что ее регулярное решение в окрестности точки  $s = 0$  имеет вид

$$u = AJ_0'(ps); \quad w = BJ_0'(ps) \quad (2.11)$$

где  $A, B$  и  $p$  – неопределенные постоянные,  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка.

Переход к исходной однородной системе уравнений с переменными коэффициентами, ее решения с большим показателем изменчивости будем искать в соответствии с (2.11) в следующем виде:

$$u = u_1(s, \varepsilon)J_0(x) + u_2(s, \varepsilon)J_0'(x), \quad w = w_1(s, \varepsilon)J_0(x) + w_2(s, \varepsilon)J_0'(x) \quad (2.12)$$

$$x = \tau / \varepsilon, \quad \tau = \int_0^s p(t) dt$$

Здесь  $u_i(s, \varepsilon), w_i(s, \varepsilon), (i = 1, 2)$  и  $p(t)$  – функции, подлежащие определению.

Целесообразность представления решений в форме (2.12) будет оправдана, если функции  $u_i(s, \varepsilon)$  и  $w_i(s, \varepsilon)$  окажутся регулярными и их можно представить в виде прямого разложения по параметру  $\varepsilon$ .

Подставив выражения (2.12) в однородные уравнения из (2.9) и приравняв нулю коэффициенты при  $J_0(x)$  и  $J_0'(x)$ , получим четыре уравнения относительно функций  $u_i(s, \varepsilon), w_i(s, \varepsilon)$  и  $p(s)$ .

$$L_{11}(u_1) + L_{12}(w_1) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{ds} (\alpha_1 p u_2) + \frac{1}{\varepsilon^2} u_1 p^2 \alpha_1 + \frac{\alpha_1}{\varepsilon} \left( u_2' p - \frac{u_2 p^2}{\tau} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \alpha_3 w_2 p = 0$$

$$L_{11}(u_2) + L_{12}(w_2) + \frac{d}{ds} \left( \frac{\alpha_1 p u_2}{\tau} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{ds} (\alpha_1 p u_1) + \frac{1}{\varepsilon} \alpha_3 p w_1 - \\ - \frac{1}{\tau} \alpha_3 p w_2 + \alpha_1 u_2 p^2 \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\tau^2} \right) + \frac{p \alpha_1}{\varepsilon} \left( \frac{u_1 p}{\tau} - u_1' \right) + \frac{1}{\tau} u_2' p \alpha_1 = 0 \quad (2.13)$$

$$\varepsilon^2 \left[ L_{21}(u_2) + L_{22}(w_2) + \frac{d}{ds} \left( \frac{\beta_1 w_2 p}{\tau} \right) + \frac{p}{\tau} (\beta_1 w_2' - \beta_3 u_2) \right] + r \frac{dr}{ds} w_2 + r \frac{dz}{ds} u_2 +$$

$$+ \varepsilon \left[ \beta_3 u_1 p - \frac{d}{ds} (\beta_1 w_1 p) + \beta_1 p \left( \frac{1}{\tau} w_1 p - w_1' \right) \right] + \beta_1 p^2 w_2 \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{\tau^2} \right) = 0$$

$$\varepsilon^2 [L_{21}(u_1) + L_{22}(w_1)] + \varepsilon \left[ \frac{d}{ds} (\beta_1 w_2 p) + \beta_1 p \left( w_2' - \frac{1}{\tau} w_2 p \right) - \beta_3 u_2 p \right] +$$

$$+ w_1 p^2 \beta_1 + r \frac{dr}{ds} w_1 + r \frac{dz}{ds} u_1 = 0$$

Решение системы уравнений (2.13) будем искать в виде

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+2} u_1^{(k)}(s), \quad u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} u_2^{(k)}(s)$$

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_1^{(k)}(s), \quad w_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} w_2^{(k)}(s) \quad (2.14)$$

Для определения функций  $u_i^{(k)}(s), w_i^{(k)}(s) (i = 1, 2)$  и  $p(s)$  подставим разложения (2.14) в уравнения (2.13) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степе-

нях  $\varepsilon$ . В нулевом приближении, т.е. для функций  $u_i^{(k)}(s)$  и  $w_i^{(k)}(s)$  с верхним индексом нуль, имеем

$$\begin{aligned} p^2 \alpha_1 u_1^{(0)} \alpha_3 p w_2^{(0)} &= \psi, \quad p^2 \alpha_1 u_2^{(0)} + \alpha_3 p w_1^{(0)} = 0, \quad \left( p^2 \beta_1 + r \frac{dr}{ds} \right) w_1^{(0)} = 0 \\ -\frac{d}{ds} (\beta_1 p w_1^{(0)}) + \beta_1 p \left( \frac{p w_1^{(0)}}{\tau} - \frac{d w_1^{(0)}}{ds} \right) + \left( p^2 \beta_1 + r \frac{dr}{ds} \right) w_2^{(0)} + r \frac{dz}{ds} u_2^{(0)} &= 0 \\ \psi &= -L_{12}(w_1^{(0)}) - \frac{d}{ds} (\alpha_1 p u_2^{(0)}) - \alpha_1 \left( p \frac{d u_2^{(0)}}{ds} - \frac{1}{\tau} u_2^{(0)} p^2 \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из второго и третьего уравнений (2.15) получаем

$$u_2^{(0)} = -\frac{\alpha_3 w_1^{(0)}}{\alpha_1 p}, \quad p^2 = -\frac{r}{\beta_1} \frac{dr}{ds} = -\frac{\lambda_1^2 \cos \alpha}{T_1} \quad (2.16)$$

Из (2.16) следует, что функция  $p(s)$  четна по  $s$  и при  $0 < \alpha \leq \pi/2$  будет чисто мнимой функцией. Четвертое уравнение с учетом соотношений (2.16) приводится к виду

$$2 \frac{d w_1^{(0)}}{ds} = \left( \frac{p}{\tau} - \frac{1}{\beta_1 p} \frac{d}{ds} (\beta_1 p) + \varphi(s) \right) w_1^{(0)}$$

где  $\varphi(s) = (\alpha_3 / \alpha_1) (dz/ds) / dr/ds$ , откуда находим регулярное решение для функции  $w_1^{(0)}$ :

$$w_1^{(0)} = \left( \frac{\tau}{\beta_1 p} \exp \int \varphi(t) dt \right)^{1/2} \quad (2.17)$$

Из первого уравнения (2.15) имеем

$$u_1^{(0)} = \frac{1}{p^2 \alpha_1} (\alpha_3 p w_2^{(0)} + \psi)$$

Таким образом, после нулевого приближения функция  $w_2^{(0)}$  остается свободной функцией, которая определится из решения уравнений на втором шаге асимптотического интегрирования уравнений (2.13). Не прибегая к нахождению явных выражений для членов разложения (2.14) высших приближений, из вида системы (2.13) с учетом выражений для ее коэффициентов можно сделать заключение, что все функции  $u_2^{(k)}(s)$ ,  $w_1^{(k)}(s)$ , и  $u_1^{(k)}(s)$ ,  $w_2^{(k)}(s)$  соответственно четные и нечетные функции. Конкретные выражения для этих функций после нулевого и первого приближений показывают, что они регулярны при  $s = 0$ .

Собирая полученные результаты, приходим к выводу, что фундаментальное решение системы (2.9), ограниченное при  $s = 0$  и имеющее большую изменчивость, представимо в виде следующих формальных разложений:

$$\begin{aligned} u(s, \varepsilon) &= I_0(y) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+2} u_1^{(k)}(s) + I_0'(y) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} u_2^{(k)}(s) \\ w(s, \varepsilon) &= I_0(y) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_1^{(k)}(s) + I_0'(y) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} w_2^{(k)}(s) \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $I_0$  – бесселева функция нулевого порядка чисто мнимого аргумента,  $y$  – регулярная и нечетная по аргументу  $s$  функция.



В отличие от работы [8], где структура фундаментальной системы решений сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с регулярной особой точкой включает в себя экспоненциальное представление, разложение (2.18) содержит функции Бесселя.

3. Построенные асимптотические приближения для интеграла краевого эффекта и интеграла после прямого разложения по параметру  $\epsilon$  линеаризованной системы уравнений (2.9) дают качественное представление о структуре решения и служат ориентиром для построения систем координатных функций при решении исходной краевой задачи вариационным методом.

Учитывая асимптотику разложений (2.18) при  $s \rightarrow 0$ , а также асимптотику для функций  $I_n(x)$  при больших значениях аргумента

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

после перехода от нормальных и касательных перемещений оболочки к ее перемещениям в осевом и радиальном направлениях, структуру решений исходной нелинейной задачи можно представить следующим образом:

$$z(s) = a_0 + \varphi(s, p_i)(a_1 + a_2 s^2 + a_3 s^4 + \dots) \quad (3.1)$$

$$r(s) = b_0 s + \varphi(s, p_i)(b_1 s + b_2 s^3 + b_3 s^5 + \dots)$$

$$\varphi(s, p_i) = I_0 \left( \sum_{k=0}^n p_k s^{2k-1} \right)$$

С учетом соотношений (3.1) и условий (1.6) координатные системы функций примут вид

$$u_1(s, p_i) = \left[ 1 - \frac{\varphi(s, p_i)}{\varphi(1, p_i)} \right], \quad u_2(s, p_i) = \frac{\varphi(s, p_i)}{\varphi(1, p_i)} (s^2 - 1) \quad (3.2)$$

$$u_k(s, p_i) = s^2 u_{k-1}(s, p_i) \quad (k = 3, 4, \dots); \quad v_k(s, p_i) = s u_k(s, p_i)$$

Если постоянные  $p_i$  известны, то решая нелинейную алгебраическую систему (1.7) итерационным методом Ньютона, можно построить приближенное решение задачи. Однако для рассматриваемой нелинейной краевой задачи вопрос о конкретных значениях параметров  $p_i$  остается открытым. Поэтому из условия  $\partial I / \partial p_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) можно найти еще  $n$  уравнений относительно параметров  $p_i$ . Эти уравнения будут иметь вид

$$\int_0^1 \left[ \mu_1 \frac{dz}{ds} \frac{d}{ds} \left( \frac{dz}{dp_i} \right) - Q \lambda_2 \frac{dr}{ds} \frac{dz}{dp_i} + \mu_1 \frac{dr}{ds} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial r}{\partial p_i} \right) + \mu_2 \frac{\partial r}{\partial p_i} \right] s ds = 0 \quad (3.3)$$

Решение алгебраической системы (3.3) удобно находить обобщенным методом секущих или одним из методов квазилинеаризации алгебраических систем [9]. Весь алгоритм сводится к тому, что на некотором шаге изменения параметров  $p_i$  необходимо решать нелинейную алгебраическую систему (1.7).

Таким образом, в отличие от традиционных вариационных методов решения нелинейных краевых задач особенность данного подхода заключается в том, что за счет выбора на ЭВМ параметров  $p_i$ , характеризующих изменяемость искомых решений, строится система координатных функций, которая в определенном смысле оптимальным способом аппроксимирует решения исходной задачи.

Таблица 1

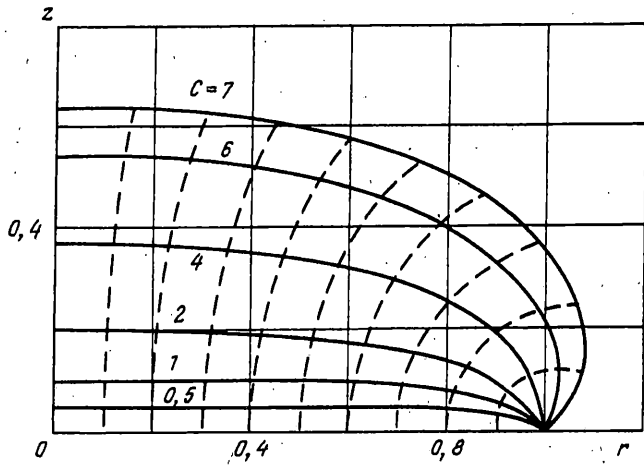
$m$	$z \cdot 10$	$-z'$	$-z''$	$r$	$r'$	$-r''$	$\Delta$
1	0,32896	0,18816	1,9342	0,90532	0,97550	0,38008	$0,4 \cdot 10^0$
2	0,36718	0,18415	2,4584	0,90694	0,99159	0,46372	$0,1 \cdot 10^{-1}$
3	0,36533	0,18145	2,3754	0,90692	0,99250	0,42182	$0,1 \cdot 10^{-1}$
4	0,36451	0,17825	2,3497	0,90693	0,99278	0,41433	$0,3 \cdot 10^{-3}$
5	0,36450	0,17830	2,3498	0,90693	0,99276	0,41456	$0,2 \cdot 10^{-3}$
6	0,36448	0,17841	2,3461	0,90693	0,99275	0,41404	$0,3 \cdot 10^{-4}$
*	0,36448	0,17841	2,3462	0,90693	0,99275	0,41407	$0,3 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

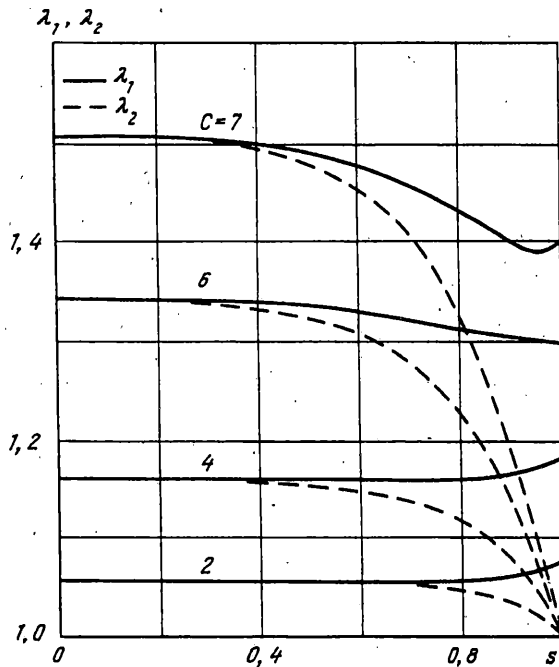
$m$	$z \cdot 10$	$-z'$	$-z''$	$r$	$r'$	$-r''$	$\Delta$
2	0,28675	0,22411	1,1499	0,90337	0,97856	0,21111	$0,4 \cdot 10^0$
3	0,34528	0,21890	2,0549	0,90568	0,97754	0,49531	$0,2 \cdot 10^0$
4	0,35966	0,20338	2,3238	0,90650	0,98593	0,57696	$0,5 \cdot 10^{-1}$
5	0,36606	0,19303	2,4685	0,90681	0,99089	0,52188	$0,4 \cdot 10^{-1}$
6	0,36674	0,18301	2,5022	0,90692	0,99266	0,45523	$0,4 \cdot 10^{-1}$
7	0,36544	0,17827	2,4301	0,90694	0,99296	0,42090	$0,1 \cdot 10^{-1}$
8	0,36466	0,17771	2,3663	0,90693	0,99286	0,41259	$0,2 \cdot 10^{-2}$

В заключение приведем результаты вычислений, дающие некоторое представление о возможностях и эффективности предложенного алгоритма. Для иллюстрации сходимости вариационного метода в табл. 1 приведены значения функций  $z(s)$  и  $r(s)$  и их первых двух производных в зависимости от числа приближений  $m$  в разложениях (1.5) в точке  $s=0,9$ . В последней колонке приведена относительная погрешность удовлетворения второму уравнению равновесия полученного приближенного решения задачи  $\Delta = (T_1 / R_1 + T_2 / R_2 - Q) / C$ .

При этом в расчетах полагалось  $\Gamma = 0,1$ ;  $C = 0,5$ ;  $D = 10$  и начало системы координат выбиралось в плоскости недеформированной мембраны. Все основные результаты были получены при учете лишь одного параметра  $p_1$  в координатных системах (3.2). В последней строчке, обозначенной звездочкой, приведены соответствующие результаты при  $m = 5$  и двух параметрах  $p_i$ . Аналогичной сходимостью решения обладают и в других точках интервала интегрирования уравнений (1.2). Результаты таблицы свидетельствуют о том, что предполагаемый алгоритм дает поточечную сходимость для решений и их первых двух производных включительно. Высокая точность приближенного решения здесь достигается как за счет увеличения размерности алгебраической системы (1.7), так и за счет выбора параметров оптимальной координатной системы. При этом в рассматриваемой задаче оказалось достаточным ограничиться лишь одним параметром  $p_i$ . Увеличение числа слагаемых в аргументе бесселевой функции до двух при сохранении точности конечных вычислений привело к снижению порядка алгебраической системы (1.7) на единицу. Расчеты показывают, что высокие требования к точности определения параметров  $p_i$  относятся лишь к входным данным с сильным проявлением сингулярности в решениях задачи. По мере увеличения ширины пограничного слоя скорость сходимости алгоритма сохраняется, но влияние точности определения параметров оптимальной координатной системы на конечный результат уменьшается. Наступает момент, когда при определенном значении гидростатической нагрузки отпадает необходимость в организации внешнего итерационного процесса по поиску значений параметров  $p_i$ . В этом случае скорость сходимости данного подхода совпадает со скоростью сходимости алгоритма, основанного на использовании степенного базиса.



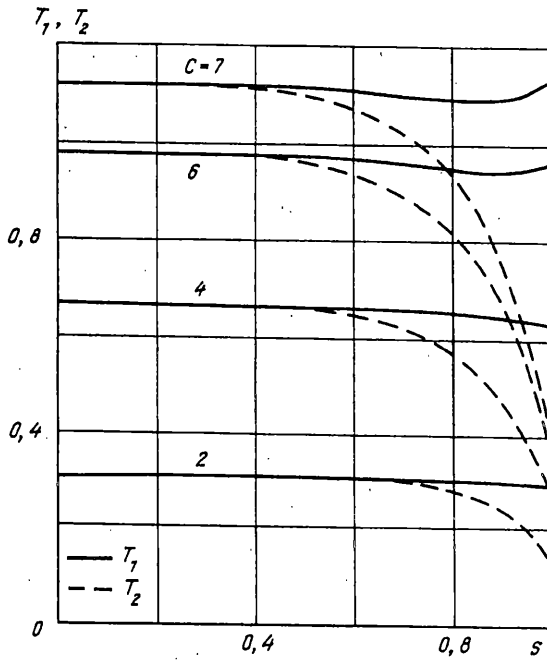
Фиг. 1



Фиг. 2

В процессе проведенного вычислительного эксперимента выяснилось, что функционал (1.4) имеет один минимум в пространстве параметров  $p_i$ , определяющих координатную систему. Это означает, что на рассматриваемом приближении существует одна оптимальная координатная система, что в значительной мере упрощает ее поиск на ЭВМ и повышает эффективность рассматриваемого алгоритма.

Таким образом, данный подход позволяет получать приближенные решения с достаточно высокой степенью точности при весьма малой размерности конечномерных задач как при наличии сингулярного возмущения исходной задачи, так и без него.



Фиг. 3

Для сравнения в табл. 2 приведены расчетные данные, полученные на основе использования полиномиального координатного базиса. Результаты табл. 2 свидетельствуют о том, что игнорирование наличием высоких градиентов в решениях приводит к значительному ухудшению сходимости вариационного метода. Дальнейшее повышение размерности алгебраической системы не представляется возможным, поскольку матрицы Якоби оказываются плохо обусловленными. Это является принципиальным препятствием для применения этих решений нелинейной задачи статики при исследовании колебаний предварительно деформированной гидростатическим давлением оболочки относительно ее равновесного состояния [10].

На фиг. 1 изображены меридиональные сечения деформированной оболочки при различных значениях параметра гидростатической нагрузки  $C$  ( $\Gamma = 0,1$ ;  $D = 10$ ; система координат связана с недеформированной мембраной). Штриховые линии соответствуют траекториям перехода точек недеформированной мембраны в точки ее деформированной поверхности. Кривые зависимостей главных степеней удлинений  $\lambda_1$  (сплошные кривые) и  $\lambda_2$  (штриховые кривые) и результирующих усилий  $T_1$  (сплошные кривые) и  $T_2$  (штриховые кривые) от параметра  $s$  при некоторых параметрах приложенной нагрузки приведены на фиг. 2, 3. Из рисунков видно, что на начальной стадии деформирования мембраны основная часть ее поверхности близка к плоскости, которая находится в однородном двухосном напряженном состоянии. Лишь в окрестности опорного контура оболочки ее поверхность и внутренние усилия претерпевают значительные изменения. По мере возрастания постоянной гидростатической нагрузки  $C$  эта область постепенно уменьшается.

Поскольку поведение материала из эластомеров при больших деформациях удобно исследовать при помощи экспериментов по однородному двухосному растяжению тонкого листа [1] (что зачастую вызывает определенные трудности в реализации такого типа деформации при натуральных испытаниях), факт наличия однородного напряженного состояния в центральной части деформированной мембраны под нагрузкой тяжелой жидкости может быть использован при установлении функциональной зависимости упругого потенциала от инвариантов деформации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
2. Троценко В.А. Осесимметричная задача о равновесии круговой мембраны под гидростатическим давлением // Физико-технические приложения краевых задач. Киев: Наук. думка, 1978. С. 126–140.
3. Троценко В.А. Свободные колебания замкнутых безмоментных оболочек вращения, деформированных внутренним давлением // Мат. физика и нелинейн. механика. 1984. Вып. 2. С. 85–91.
4. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983. 200 с.
5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
6. Балабух Л.И., Усюкин В.И. Приближенная теория мягких оболочек вращения // Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973. с. 230–235.
7. Шклярчук Ф.Н. К расчету собственных осесимметричных колебаний тонких оболочек вращения методом итераций // Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. М.: Моск. авиац. ин-т. 1978. № 467. С. 60–65.
8. Ломов С.А., Юдина А.С. Структура фундаментальной системы решений сингулярно возмущенного уравнения с регулярной особой точкой // Изв. АН СССР. Математ. 1982. Т. 46. № 5. С. 1124–1134.
9. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 558 с.
10. Троценко В.А. О колебаниях жидкости в сосудах, свободная поверхность которой закрыта мембранной оболочкой из гиперупругого материала // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 166–177.

Киев

Поступила в редакцию  
10.VI.1994