МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1996

УДК 539.3

 А.Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР

ОБ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТЕЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Публикуемая работа посвящена проблеме оценки погрешностей, возникающих при расчете тонких упругих оболочек по классической двумерной теории Кирхгофа–Лява. Видное место здесь занимают исследования, в которых оцениваются энергетические погрешности в пространстве L_2. Одной из первых и наиболее популярной среди работ такого направления является статья В.Т. Койтера [1], в которой получена ставшая уже классической оценка

$$\varepsilon = O(\eta^1 + \eta^{2-2\mu})$$

где η – относительная полутолщина оболочки, μ – показатель изменяемости искомого напряженно-деформированного состояния (НДС)[1].

Принципиальная важность таких оценок – несомненна. Подкупает их строгость, а также относительная простота и общность вывода. Однако практическую ценность энергетических оценок снижают следующие обстоятельства:

– крайне расплывчатым является понятие о показателе изменяемости μ в приведенной выше формуле;

– оценочная формула обсуждаемого вида определяет лишь максимально возможные погрешности и не учитывает частные случаи, когда асимптотика погрешности существенно улучшается;

– характерной чертой двумерного НДС оболочки является присутствие экспоненциально затухающих слагаемых, для которых составление интегральной характеристики сопровождается появлением дополнительного малого множителя, искажающего оценку погрешностей;

–при составлении интегральных оценок трудно учитывать роль двумерных краевых условий теории оболочек.

Учитывая эти соображения, здесь строятся менее строгие и более конкретные оценки погрешностей классической двумерной теории оболочки.

Формулируется типовая двумерная задача. Она достаточно просто решается в таких рядах, в каждом отдельно взятом члене которых понятие об изменяемости НДС оболочки становится более определенным, и оцениваются лишь погрешности одного члена этого разложения.

Упомянутые ряды являются прямым обобщением тригонометрических рядов Фурье. Поэтому постановка вопроса является достаточно общей для практических применений. Однако по причинам, которые выявятся ниже, исследование ограничивается лишь задачами статического равновесия оболочек положительной кривизны. Для последних из рассмотрения исключаются также задачи устойчивости (их не охватывают и описанные выше энергетические оценки).

Статическое НДС в двумерной теории оболочек, как известно, определенным образом складывается из $(\text{НДС})_1$ – безмоментного напряженно-деформированного состояния, $(\text{НДС})_2$ – простого краевого эффекта, и $(\text{НДС})_3$ – напряженно-деформированного состояния с большой изменяемостью. Вопрос об оценках погрешностей в предлагаемой работе ставится для каждой из этих составляющих в отдельности. Кроме того в самостоятельное рассмотрение выделяются и оценки погрешностей построения частного интеграла.

В полное НДС оболочки описанные частные НДС входят с определенными асимптотическими весами, зависящими от характера закрепления краев [2, 3]. Поэтому выполненное здесь исследование открывает дорогу к оценкам погрешностей решения краевых задач теории оболочек, но размеры статьи не позволяют обсуждать здесь этот вопрос более конкретно.

---

[1] В зарубежной литературе вместо понятия показателя изменяемости μ принимается понятие характерной длины рисунка деформации l. Эти два понятия в сущности идентичны. Связь между ними выражается формулой $l = R\eta^{\mu}$ (R – характерный радиус кривизны).

1. Определим типовую задачу следующим образом.

1. Срединная поверхность оболочки S произвольна и имеет положительную кривизну K (предполагается, что выполняются необходимые условия гладкости S, но такого рода вопросы здесь не рассматриваются).

2. Исследованию подлежит статическое НДС оболочки, вызванное поверхностной нагрузкой с компонентами

$$x_s = X_s \exp(i\varkappa g), \quad \varkappa = \eta^{-\lambda} \quad (s = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где X_s и g – заданные действительные функции параметров α_1, α_2 выбранной криволинейной системы координат; η – безразмерная полутолщина оболочки; λ – заданное число, которое назовем показателем изменяемости нагрузки, i – мнимая единица.

Предполагается, что решение типовой задачи определяется частным интегралом неоднородной системы двумерных уравнений классической теории оболочек и интегралом соответствующей однородной системы, снимающим невязки частного интеграла в граничных условиях. Последние ставятся на линии $\alpha_1 = 0$ и для определенности считается, если не оговорено противоположное, что эти условия однородны, т.е. что поверхностные силы x_s являются единственной причиной возникновения рассматриваемого НДС.

Как известно, операцию устранения невязок частного интеграла можно выполнять методом расчленения, т.е. считать, что она приводит либо (при $\lambda < 1/2$) к появлению $(НДС)_1$ и $(НДС)_2$, которые можно приближенно строить по безмоментной теории и по теории простого краевого эффекта, либо (при $\lambda > 1/2$) – к появлению $(НДС)_3$, т.е. НДС, которое можно приближенно строить по теории НДС с большой изменяемостью. Соответственно, в публикуемой работе будут раздельно строиться оценки погрешностей, возникающих в рамках классической двумерной теории при построении $(НДС)_1$, $(НДС)_2$, $(НДС)_3$, $(НДС)_4$ (под последним понимается НДС, определяемое частным интегралом).

В рамках линейных подходов типовой задачей охватывается весьма широкий класс статических расчетов тонких оболочек.

В силу принципа суперпозиции можно считать, что внешние силы задаются рядами $x_s = \Sigma X_s \exp(ikg)$, обобщающими тригонометрические ряды Фурье, а оценка погрешностей относится только к некоторому фиксированному члену принятого разложения. Этот член, также как и соответствующие ему НДС оболочки, как выяснится ниже, выражается через функции типа $\Phi\exp(kf)$, для которых при большом k и при относительно медленно меняющихся Φ и f, понятия о l и μ в оценке Койтера становятся достаточно определенными.

Относительно характера закрепления края $\alpha_1 = 0$ оболочки в типовой задаче существенных ограничений не принимается. Будет считаться только, если не оговорено противоположное, что граничные условия однородны, т.е. что ими не учитываются внешние краевые воздействия. Ниже выяснится, что учет таких воздействий, так же как учет влияния других краев или особенностей принятой координатной системы, в типовой задаче не связан с новыми принципиальными трудностями. Надо только предполагать, что другие края или особенности координатной системы не слишком близки к линии $\alpha_1 = 0$.

Вместе с тем, предположения о положительности кривизны K оболочки и о статической формулировке типовой задачи, как выяснится ниже, являются существенными.

Замечание. В дальнейших рассуждениях λ (показатель изменяемости нагрузки) считается строго положительным, но предполагается, что окончательные результаты можно экстраполировать на случай $\lambda = 0$.

2. Типовую задачу (п. 1) можно решать методом экспоненциального представления

[3, 4], сущность которого вкратце заключается в следующем.

Пусть надо интегрировать уравнение

$$M\varphi \equiv \sum_{s+t=0}^{s+t=m} c_{st} \frac{\partial^{s+t}\varphi}{\partial\alpha_1^s \partial\alpha_2^t} = 0 \tag{2.1}$$

Здесь M – эллиптический оператор; α_1, α_2 – независимые переменные; c_{st} – действительные (вообще, переменные) коэффициенты; s, t – индексы, составляющие в сумме числа 0, 1,..., m; m – четный порядок уравнения.

Зададим φ в виде

$$\varphi = \eta^b \Phi \exp(kf), \quad k = \eta^{-\mu} \tag{2.2}$$

$$\Phi = \sum_n \eta^n \Phi^{(n)} \tag{2.3}$$

и примем, что η – малый параметр; числа $\mu > 0$ (показатель изменяемости) и b (показатель интенсивности) зависят от выбора, а f (функция изменяемости) и $\Phi^{(n)}$ (коэффициенты разложения функции интенсивности Φ) слабо зависят от η и подлежат определению. Слабая зависимость f и $\Phi^{(n)}$ от малого параметра заключается в том, что, например, для f справедливо соотношение

$$f(\alpha_1, \alpha_2; \eta) = f(\alpha_1, \alpha_2; 0) + O(\eta^\rho) \quad (\rho > 0)$$

Очевидная формула дифференцирования функции φ:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}[\Phi\exp(\eta^{-\mu}f)] = \eta^{-\mu}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha_i} + \eta^{\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\right)\Phi\right\}\exp(kf) \quad (i = 1,2;\ k = \eta^{-\mu})$$

показывает, что $M\varphi$ также является функцией вида (2.2). Поэтому после подстановки (2.2) в (2.1) в полученном равенстве можно отбросить экспоненциальный множитель и написать уравнение

$$\eta^{-m\mu+b}\left[\sum_{r=0}^{m} \eta^r M^{(r)}\Phi\right] = 0 \tag{2.4}$$

в котором $M^{(r)}$ – линейные дифференциальные операторы порядка r.

Представив в этом равенстве Φ в виде разложения (2.3) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях η, получим для определения f, $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$,... итерационную последовательность уравнений. В ней для построения функции изменяемости f служит нелинейное уравнение первого порядка

$$M^{(0)} \equiv \sum_{n=0}^{m} c_{m-n,n}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}\right)^{m-n}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha_2}\right)^{n} = 0 \tag{2.5}$$

а для построения $\Phi^{(r)}$ получается последовательность линейных уравнений

$$\begin{gathered} M^{(1)}\Phi^{(0)} = 0, \quad M^{(1)}\Phi^{(1)} = -M^{(2)}\Phi^{(0)} \\ M^{(1)}\Phi^{(2)} = -M^{(3)}\Phi^{(0)} - M^{(2)}\Phi^{(1)}, \ldots \end{gathered} \tag{2.6}$$

Уравнение (2.5) назовем определяющим, так как при большом k функция f задает в главном характер изменения интеграла φ. Средняя часть равенств (2.5) относительно производных от f представляет собой однородный полином степени m. Это значит, что (2.5) можно заменить совокупностью линейных уравнений первого порядка

$$A_1^{(\sigma)}\partial f / \partial\alpha_1 + A_2^{(\sigma)}\partial f / \partial\alpha_2 = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.7}$$

Каждое из (вообще говоря, комплексных даже при действительных c_{st}) уравнений

(2.7) можно трактовать как дифференциальное уравнение некоторого семейства характеристик исходного уравнения (оно задается равенством $f_* = \mathrm{const}$, где f_* – любой, отличный от константы, интеграл выбранного уравнения (2.7)). Равенства (2.6) относительно $\Phi^{(\sigma)}$ образуют итерационную последовательность линейных уравнений первого порядка. Их коэффициенты зависят от f. Это значит, что (2.6) представляет собой m последовательностей таких уравнений.

Замечание. Может случиться, что некоторые из последовательностей уравнений (2.6) потеряют смысл. Это произойдет тогда, когда кратность ρ некоторых семейств характеристик оператора M окажется больше единицы. Тогда соответствующие ρ из последовательностей (2.6) заменятся одной последовательностью линейных уравнений порядка ρ [2–4].

Отметим аналогию описанной процедуры интегрирования линейных уравнений в частных производных с процедурами теории обыкновенных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Роль линейно-независимых решений здесь играют интегралы вида (2.2) с функциями изменяемости, сохраняющими постоянные значения на линиях различных семейств характеристик оператора M. Определяющее уравнение (2.5) является аналогом характеристического уравнения. Вместо констант общего интеграла здесь появляются функции интенсивности. В общем случае каждая из них определяется из последовательности линейных уравнений первого порядка, а в случае ρ-кратных характеристик – из последовательности линейных уравнений порядка ρ.

3. Методом экспоненциального представления можно решать и систему линейных дифференциальных уравнений классической двумерной теории оболочек. Относительно компонентов перемещения u_τ она записывается так

$$L_{\sigma\tau}u_\tau + \eta^2 N_{\sigma\tau}u_\tau = x_\sigma \quad \{\tau\} \quad (\sigma, \tau = 1, 2, 3) \tag{3.1}$$

Здесь x_σ – компоненты внешней поверхностной нагрузки; операторы $L_{\sigma\tau}$, $N_{\sigma\tau}$ имеют порядки $l_{\sigma\tau}$, $n_{\sigma\tau}$ и определяются формулами

$$L_{\sigma\tau} = \sum_{s+t=0}^{l_{\sigma\tau}} a_{st}^{\sigma\tau} \frac{\partial^{s+t}}{\partial\alpha_1^s \partial\alpha_2^t}, \quad N_{\sigma\tau} = \sum_{s+t=0}^{n_{\sigma\tau}} b_{st}^{\sigma\tau} \frac{\partial^{s+t}}{\partial\alpha_1^s \partial\alpha_2^t}$$

совпадающими по структуре с (2.1); запись $\{\tau\}$ здесь и в дальнейшем обозначает, что должно производиться суммирование по $\tau = 1, 2, 3$.

В развернутом виде операторы $L_{\sigma\tau}$, $N_{\sigma\tau}$ выписаны в [2]. Они очень громоздки и в дальнейшем не понадобятся. Приведем лишь их главные (содержащие производные высшего порядка) части

$$L_{ii} = \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\right)^2 + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\right)^2 + \ldots \tag{3.2}$$

$$L_{ij} = \frac{1+\nu}{2}\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j} + \ldots$$

$$L_{i3} = L_{3i} = -\left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j}\right)\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i} + \ldots$$

$$L_{33} = -\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 - \frac{2(1-\nu)}{R_1 R_2}\right]$$

$$N_{ii}=\frac{1}{3}\frac{R^2}{R_i^2}\left[\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\right)^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\right)^2\right]+\ldots$$

$$N_{ij}=\frac{1}{3}R^2\left(\frac{1}{R_iR_j}+\frac{1-\nu}{R_i^2}\right)\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}+\ldots$$

$$N_{i3}=N_{3i}=\frac{1}{3}\frac{R^2}{R_i^2}\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left[\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\right)^2+\left(\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\right)^2\right]+\ldots$$

$$N_{33}=-\frac{1}{3}R^2\left[\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\right)^2+\left(\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\right)^2\right]^2+\ldots$$

Здесь и далее $i\neq j=1,2$, R – характерный радиус кривизны.

Таким образом порядки $l_{\sigma\tau}$, $n_{\sigma\tau}$ операторов в (3.2) определяют соответственно табл. 1, 2.

Примем, что компоненты внешней нагрузки x_σ задаются формулами (1.1). В них будем считать X_σ, g заданными действительными функциями α_1, α_2, независящими от η; λ – заданным действительным числом (показатель изменяемости поверхностной нагрузки), а решение системы (3.1) зададим в виде

$$u_\tau=\eta^{b_\tau}U_\tau\exp(kf)\qquad k=\eta^{-\mu}\tag{3.3}$$

Приняв для U_τ разложение

$$U_\tau=\sum_{r=0}\eta^rU_\tau^{(r)}\tag{3.4}$$

Таблица 1

σ	τ = 1	2	3
1	2	2	1
2	2	2	1
3	1	1	0

Таблица 2

σ	τ = 1	2	3
1	2	2	3
2	2	2	3
3	3	3	4

получим по аналогии с (2.4) равенство

$$\left[\sum_{r=0}\eta^rQ_{\sigma\tau}^{(r)}\right]\left[\sum_{r=0}\eta^rU_\tau^{(r)}\right]\exp(kf)=X_\sigma\exp(i\varkappa g)\quad\{\tau\}\tag{3.5}$$

$$Q_{\sigma\tau}^{(r)}=\eta^{-l_{\sigma\tau}\mu+b_\tau}L_{\sigma\tau}^{(r)}+\eta^{2-n_{\sigma\tau}\mu+b_\tau}N_{\sigma\tau}^{(r)}\tag{3.6}$$

где $L_{\sigma\tau}^{(r)}$, $N_{\sigma\tau}^{(r)}$ – дифференциальные операторы порядка r, $\sigma,\tau=1,2,3$.

Частный интеграл системы (3.1) будем искать, положив в (3.5):

$$f=ig,\quad k=\varkappa,\quad \mu=\lambda\tag{3.7}$$

Тогда, отбросив экспоненту и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра η, получим

$$Q_{\sigma\tau}^{(0)}U_\tau^{(0)}=X_\sigma,\quad Q_{\sigma\tau}^{(0)}U_\tau^{(1)}=-Q_{\sigma\tau}^{(1)}U_\tau^{(0)}\tag{3.8}$$

$$Q_{\sigma\tau}^{(0)}U_\tau^{(0)}=X_\sigma,\quad Q_{\sigma\tau}^{(1)}U_\tau^{(1)}=-Q_{\sigma\tau}^{(1)}U_\tau^{(0)}$$

(считается для простоты, что X_σ не зависят от η).

В соотношениях (3.8) выражения $Q^{(0)}_{\sigma\tau}$ имеют такую же структуру, как средняя часть (2.5). Поэтому в силу первого равенства (3.7) и формул (3.6) все $Q^{(0)}_{\sigma\tau}$ при заданном g являются величинами, заданными с точностью до значений b_τ. Таким образом (3.8) представляют собой итерационную последовательность систем линейных алгебраических уравнений для последовательного определения коэффициентов разложения функций интенсивности $U^{(k)}_\tau$.

Надо иметь в виду, что соотношения (3.8) основаны на асимптотических рассуждениях. Поэтому необходимо требовать, чтобы были непротиворечивыми предельные (при $\eta \to 0$) равенства (3.8), т.е. соотношения, в которых в каждом отдельно взятом равенстве (3.8) сохраняются лишь слагаемые с самыми низкими степенями η. Отсюда следует, что неопределенным пока показателям интенсивности b_τ надо придавать непротиворечивые значения, т.е. такие, при которых в предельных системах (3.8) и во всех их подсистемах число уравнений не превышает числа неизвестных.

Удовлетворяющие этим требованиям непротиворечивые значения b_τ зависят от пределов, в которых заключен показатель изменяемости $\lambda = \mu$ поверхностной нагрузки. Соответствующие соотношения имеют вид

При $\lambda \leqslant 1/2$:

$$b_1 = b_2 = \lambda, \quad b_3 = 0 \tag{3.9}$$

а предельная система записывается так

$$\begin{aligned} &L^{(0)}_{11}U^{(0)}_1 + L^{(0)}_{12}U^{(0)}_2 + L^{(0)}_{13}U^{(0)}_3 = \eta^\lambda X_1 \\ &L^{(0)}_{21}U^{(0)}_1 + L^{(0)}_{22}U^{(0)}_2 + L^{(0)}_{23}U^{(0)}_3 = \eta^\lambda X_2 \\ &L^{(0)}_{31}U^{(0)}_1 + L^{(0)}_{32}U^{(0)}_2 + L^{(0)}_{33}U^{(0)}_3 + \delta_{\lambda,1/2}N^{(0)}_{33}U^{(0)}_3 = X^{(0)}_3 \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $\delta_{s,t}$ – символ Кронекера.

При $1 > \lambda = \mu > 1/2$:

$$b_1 = b_2 = \lambda, \quad b_3 = -2 + 4\lambda \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} &L^{(0)}_{11}U^{(0)}_1 + L^{(0)}_{12}U^{(0)}_2 = \eta^\lambda X_1 \\ &L^{(0)}_{21}U^{(0)}_1 + L^{(0)}_{22}U^{(0)}_2 = \eta^\lambda X_2, \quad N^{(0)}_{33}U^{(0)}_3 = X_3 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Непротиворечивость предельных систем (3.10) и (3.12) очевидна. Они имеют и простую физическую интерпретацию. Обе системы соответствуют приближенному построению частного решения вида (3.3) для уравнений (3.1) теории оболочек. При $\lambda < 1/2$ это делается на базе безмоментной теории, а при $\lambda > 1/2$ – на базе приближенной теории напряженно-деформированных состояний с большой изменяемостью.

Можно было бы показать, что никаких других непротиворечивых комбинаций показателей интенсивности не существует, но эти кропотливые рассуждения приводить не будем.

Разумеется для предельных систем (3.10), (3.12) надо требовать, чтобы их определители были отличны от нуля, когда в формулах вида (3.3) функция изменяемости f согласно формулам (3.7) является чисто мнимой (см. п. 9).

4. Для устранения невязок частного интеграла в граничных условиях на линии $\alpha_1 = 0$, надо использовать решения однородной (при $x_\sigma \equiv 0$) системы (3.1). Их будем строить в виде (3.3), считая функцию f и число μ величинами, подлежащими определению. Это приведет снова к системе уравнений (3.8), в которой надо теперь положить $X_\sigma \equiv 0$ и считать, что выражения $Q_{\sigma\tau}^{(0)}$ определяются соотношениями (3.6) и уже не являются заданными величинами.

Первое из равенств (3.8) относительно $U_\tau^{(0)}$ при этом будет представлять собой систему линейных однородных алгебраических уравнений. Константы b_τ, как и в п. 3, в выражениях $Q_{\sigma\tau}^{(0)}$ при этом надо задать формулами (3.9), (3.11), считая в них $\lambda = \mu$ (чтобы в системе, выражаемой первым равенством (3.8) при $\eta \to 0$, число уравнений было согласовано с числом неизвестных). Кроме того надо требовать, чтобы полученная таким образом однородная алгебраическая система уравнений имела нетривиальное решение, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$| Q_{\sigma\tau}^{(0)} | = 0 \tag{4.1}$$

В нем (и всюду в дальнейшем) символ $| A_{\sigma\tau} |$ означает определитель с элементами $A_{\sigma\tau}$, а $Q_{\sigma\tau}^{(0)}$ расшифровывается равенствами

$$\begin{aligned}
&Q_{\sigma\tau}^{(0)} = Q_{\sigma\tau,a}^{(0)} = \sum_{n=0}^{l_{\sigma\tau}} a_{m-n,n}^{\sigma\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)^{l_{\sigma\tau}-n} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\right)^{n} \quad (l_{\sigma\tau}\mu < 2 - n_{\sigma\tau}\mu) \\
&Q_{\sigma\tau}^{(0)} = Q_{\sigma\tau,b}^{(0)} = \sum_{n=0}^{n_{\sigma\tau}} b_{m-n,n}^{\sigma\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)^{n_{\sigma\tau}-n} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\right)^{n} \quad (l_{\sigma\tau}\mu > 2 - n_{\sigma\tau}\mu) \\
&Q_{\sigma\tau}^{(0)} = Q_{\sigma\tau,a}^{(0)} + Q_{\sigma\tau,b}^{(0)} \qquad (l_{\sigma\tau}\mu = 2 - n_{\sigma\tau}\mu)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Считая выполненным уравнение (4.1), величины $U_\tau^{(0)}$ можно выразить формулой

$$U_\tau^{(0)} = | Q_{\sigma\tau}^{(0)} |^* \, U^{(0)} \tag{4.3}$$

В ней (и всюду ниже) через $| A_{\sigma\tau} |^*$ обозначены миноры определителя $| A_{\sigma\tau} |$, соответствующие элементам столбца номер σ, а под $U^{(0)}$ подразумевается пока произвольная функция. Для ее определения нужно использовать второе равенство (3.8). Оно представляет собой неоднородную систему (линейных алгебраических уравнений (относительно $U_\tau^{(1)}$) с нулевым определителем, а условием ее разрешимости является равенство

$$| Q_{s\tau}^{(0)} |^* \, | Q_{t\tau}^{(1)} | \, U^{(0)} = 0 \quad \{\tau\} \tag{4.4}$$

В нем индексам s, t можно произвольно и независимо друг от друга придавать значение 1, 2, 3.

Уравнение (4.1) является определяющим для системы линейных уравнений классической теории оболочек. Оно позволяет найти функцию изменяемости f и может рассматриваться как уравнение характеристик безмоментных уравнений (при $\mu < 1/2$) или как уравнения характеристик полных (моментных) уравнений классической теории оболочек (при $\mu < 1/2$).

Равенства (4.4) относительно $U^{(0)}$ представляют собой линейное дифференциальное уравнение с коэффициентами, зависящими от того, какое из решений нелинейного уравнения (4.1) было выбрано при построении функции f. Заметим, что уравнения (4.4) могут повторять друг друга. Это произойдет тогда, когда выбранной функции f соответствует ρ-кратное семейство характеристик уравнений теории оболочек. Тогда группа, состоящая из ρ вариантов уравнения (4.4), сольется в одно уравнение порядка ρ.

Определяющее уравнение (4.1) расшифровывается при помощи соотношений (3.10), (3.12), взятых при $X_i \equiv 0$, и формул (3.2) для главных частей операторов L, N. Положив в последних $\partial/\partial\alpha_i = k\partial f/\partial\alpha_i$, получим общее определяющее уравнение классической двумерной теории оболочек

$$J(\mu<1/2)\left[\frac{1}{R_2}\left(\frac{k}{A_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)^2+\frac{1}{R_1}\left(\frac{k}{A_2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\right)^2\right]^2+$$

$$+J(\mu>1/2)\frac{\eta^2R^2}{3}\left[\left(\frac{k}{A_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)^2+\left(\frac{k}{A_2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\right)^2\right]^4=0 \qquad (4.5)$$

В нем $J(\cdot)$ – условные множители, равные единице, если выполняется указанное в скобках неравенство, и равные нулю в противоположном случае.

5. Условимся считать, что при решении типовой задачи методом экспоненциального представления невязки частного интеграла устраняются следующим образом.

Пусть на крае $\alpha_1 = 0$ заданы две четверки величин p_s, q_t $(s, t = 1, 2, 3, 4)$, из которых первая выражает геометрические и статические факторы, обращающиеся в силу условий закрепления края в нуль при $\alpha_1 = 0$, а вторая – величины, подлежащие определению в результате расчета.

Предполагая, что p_s и q_t выражаются через перемещения u_σ при помощи линейных дифференциальных операторов, а u_σ имеют вид (3.3), можно написать для общего и частного интегралов соотношения вида

$$p_s = P_s \exp(kf), \quad q_t = Q_t \exp(kf)$$

Поэтому при устранении невязок, выводя функцию изменяемости f из определяющего уравнения (4.1), будем требовать выполнения граничного условия

$$kf = i\varkappa g \qquad (\alpha_1 = 0) \qquad (5.1)$$

Тогда для функций интенсивности получатся граничные условия

$$P_s^{(\text{total})} = -P_s^{(\text{part})} \qquad (\alpha_1 = 0) \qquad (5.2)$$

Как известно, полная (моментная) система уравнений классической двумерной теории оболочек является эллиптической при любом знаке кривизны K срединной поверхности. В случае, когда (как было принято) $K > 0$, эллиптическими являются и безмоментные уравнения. Отсюда следует, что при любом μ, кроме $\mu = 1/2$, все линейные уравнения (2.7), которые определяют функцию изменяемости f, являются комплексными и их можно разбить на пары комплексно-сопряженных уравнений таким образом, что в одном и только одном уравнении каждой пары граничное условие (5.1) можно выполнять, требуя одновременно, чтобы выполнялось соотношение

$$\operatorname{Re}\{\partial f / \partial \alpha_1|_{\alpha_1=0}\} > 0 \qquad (5.3)$$

Считая для определенности, что точкам срединной поверхности оболочки соответствует неравенство $\alpha_1 \leqslant 0$, неравенство (5.3) можно назвать условием затухания (экспоненциальным с большим (при $\mu > 0$) коэффициентом в показателе).

Ниже выяснится, что $(\text{НДС})_5$, снимающее невязки частного интеграла, можно составить из НДС, удовлетворяющих условиям затухания (5.3). Это значит, что при $\mu = 0$ вопрос о построении $(\text{НДС})_5$ можно ставить отдельно для каждого края (конечно, предполагая, что другие края оболочки или особые точки принятой системы координат не слишком близки к $\alpha_1 = 0$).

Построение $(\text{НДС})_5$ можно выполнить следующим образом.

1. Если λ – показатель изменяемости граничных условий удовлетворяет неравенству $\lambda > 1/2$, то в (3.3) надо положить $\mu = \lambda > 1/2$, т. е. считать, что в граничном соотношении (5.1) $k = \varkappa$, и оставить в определяющем уравнении (4.5) только второе слагаемое. Тогда это уравнение станет эквивалентно восьми линейным уравнениям вида (2.7). Из них можно выделить четыре уравнения, допускающих решения, удовлетворяющие как условию (5.1), так и требованию затухания (5.3). Так определятся в общем случае четыре различные функции изменяемости и соответствующие им четыре существенно различные интеграла вида (3.3). Поэтому есть основание предполагать, что содержащиеся в них произволы позволят выполнить условия (5.2)

Замечание. Подкрепляющие это предположение рассуждения можно найти в [3]. Там же разбираются и вопросы, связанные с кратностью некоторых из уравнений (2.7) в теории оболочек.

2. Если $\lambda < 1/2$, то, положив по прежнему $\mu = \lambda$, надо будет принять $J(\mu < 1/2) =$ `1, $J(\mu > 1/2) = 0$ в уравнении (4.5) и записать его так

$$\left[\frac{1}{R_2}\left(\frac{k}{A_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \frac{1}{R_1}\left(\frac{k}{A_2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\right)^2\right]^2 = 0$$

Это соответствует четырем уравнениям вида (2.7). Из них при $R_1 R_2 > 0$ два и только два допускают интегрирование с учетом граничного условия (5.2) и условия затухания (5.3). Отсюда следует, что описанным способом можно получить только два существенно различных экспоненциально затухающих решения вида (3.3), тогда как при $\alpha_1 = 0$ надо выполнить четыре условия.

Для построения двух недостающих решений примем $\mu = 1/2$ и снова воспользуемся определяющим уравнением (4.5), оставив в нем оба слагаемых. Левая часть полученного таким образом равенства уже не будет однородным полиномом относительно первых производных от f. Поэтому легко убедиться, что тогда (и только тогда) когда $\mu = 1/2$, определяющее уравнение (4.5) будет иметь нетривиальное (отличное от константы) решение, удовлетворяющее граничному условию

$$(\partial f / \partial \alpha_2)|_{\alpha_1 = 0} = 0$$

Для него из (4.5) при $J(\mu < 1/2) = J(\mu > 1/2) = 1$ следует граничное равенство, принимающее после отбрасывания общего множителя такой вид

$$\frac{\eta^2 R^2}{3}\left(\frac{k}{A_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)^4 + \frac{1}{R_2^2} = 0 \quad (\alpha_1 = 0, \ k = \eta^{-1/2}) \tag{5.4}$$

Его можно рассматривать, как двухчленное алгебраическое уравнение относительно граничного значения $A_1^{-1}\partial f / \partial \alpha_1$. Поэтому, вновь учитывая условие затухания (5.3), можно написать

$$\left.\frac{1}{A_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha_1 = 0} = (1 \pm i)\left(\frac{3}{4R^2 R_2^2}\right)^{1/4} \tag{5.5}$$

Определяющее уравнение (4.5) вместе с условием затухания (5.5) позволяет построить два решения для функции изменяемости f, которым и соответствуют два недостающие существенно различные экспоненциально затухающие интегралы вида (3.3).

Разобранные здесь случаи *1* и *2* соответствуют расчету оболочек по приближенной теории НДС с большой изменяемостью и по безмоментной теории с учетом простого краевого эффекта.

6. Погрешности двумерных уравнений теории оболочек при решении типовой задачи складывается из погрешностей ε(part) частного интеграла (учитывающего внешние поверхностные силы и не согласованного, вообще говоря, с условиями на крае $\alpha_1 = 0$)) и погрешностей ε(bound) затухающего краевого интеграла (снимающего допущенные невязки). В свою очередь ε(bound) сводятся либо (при $\lambda < 1/2$) к погрешностям

ε(memb) – безмоментной теории – и ε(edge ef) –краевого эффекта – , либо (при $\lambda > 1/2$) к погрешности ε(l var) – НДС с большой изменяемостью.

Величины ε(memb), ε(edge ef) и ε (l var) представляют собой погрешности решений вида (3.3). Соответствующие НДС быстро затухают при удалении от края $\alpha_1 = 0$. Поэтому оценки ε(memb), ε(edge ef) и ε (l var) будут строиться лишь для их краевых (т. е. наибольших) значений. Это значит, как нетрудно видеть, что вопрос сводится к оценкам точности построения величин

$$J_{nm} = \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha_1^n \partial\alpha_2^m} \exp(kf) \right]_{\alpha_1=0}$$

входящих в выражения граничных значений перемещений, углов поворота, усилий и моментов оболочки. Величину J_{00} можно считать точной. Она находится из граничных условий типовой задачи при помощи формул (3.7), а вопрос о точности постановки граничных условий здесь не ставится.

Таким образом, обсуждению подлежит только асимптотическая оценка упомянутого выше вида для погрешности выражения

$$J_{10} = \left[k \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \right]_{\alpha_1=0}$$

т. е. величины, удовлетворяющей алгебраическому определяющему уравнению (4.5), взятому при $\alpha_1 = 0$ (для остальных величин J_{nm} асимптотический порядок погрешностей можно считать таким же, как и для J_{10}).

7. Пусть существует двумерная теория оболочек, более точная, чем классическая, и такая, что для нее определяющее уравнение имеет вид

$$Q\left(\frac{k}{A_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1},\ \frac{k}{A_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \right) \equiv \Sigma \eta^{\varkappa_n} Q_n = \eta^6 Q_{12} + \eta^4 Q_{10} + \eta^2 Q_8 + Q_4 = 0 \tag{7.1}$$

Здесь Q_n – однородные полиномы степени n относительно величин, указанных слева в скобках.

Выражение $\eta^2 Q_8 + Q_4$ в равенстве (7.1) соответствует классической двумерной теории оболочек, т. е. представляет собой левую часть равенства (4.5), взятую при $J(\mu < 1/2) = J(\mu > 1/2) = 1$, а выражение $\eta^6 Q_{12} + \eta^4 Q_{10}$ соответствует добавочным уточняющим слагаемым.

Примером теории тонких оболочек, приводящей к определяющему уравнению (7.1), является теория, построенная при помощи асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости, выполненного (см. [5]) с характеристикой точности $\rho = = 4 - 4\mu$ (вдвое большей, чем характеристика точности $\rho = 2 - 2\mu$ классической теории).

В статическом случае и при отсутствии поверхностной нагрузки уточненные таким образом уравнения теории пластин имеют вид [5]:

для изгиба

$$\left[1 + h^2 \frac{8 - 3\nu}{10(1-\nu)} \Delta \right] \Delta^2 W = 0 \tag{7.2}$$

для растяжения (сжатия)

$$\frac{1}{1+\nu} \Delta U^\beta + \frac{1}{1-\nu} \nabla^\beta \nabla_\lambda U^\lambda - h^2 \left[\frac{1}{6(1+\nu)} \Delta^2 U^\beta + \frac{3 + 4\nu - \nu^2}{6(1-\nu)^2(1+\nu)} \Delta \nabla^\beta \nabla_\lambda U^\lambda \right] = 0 \tag{7.3}$$

Здесь использована двумерная тензорная символика; W – прогиб, U^α – тангенциальные перемещения; ∇_α – символ ковариантной производной; $\Delta = \nabla^\alpha \nabla_\alpha$ – оператор Лапласа.

Равенство (7.3) после умножения на ∇_β и введенная функция напряжения C по формуле $U^\beta = \nabla^\beta C$ приводится к одному уравнению

$$\left[1-h^2\frac{2+\nu}{6(1-\nu)}\Delta\right]\Delta^2 C=0 \tag{7.4}$$

(учитывается, что на срединной плоскости пластины метрика является эвклидовой и символы тензорного дифференцирования можно менять местами).

Замечание. В [5] отмечалось, что итерационные процессы интегрирования уравнений трехмерной теории упругости можно считать обоснованными лишь пока показатель изменяемости искомого НДС удовлетворяет неравенству $\mu < 1$. Только для таких μ и будет использоваться постулированное уравнение (7.1).

Можно убедиться, что если (7.2), (7.3) рассматривать как совместную систему уравнений, описывающую произвольную деформацию пластины, то для нее определяющее уравнение будет иметь вид (7.1). Таким образом, предположение, выраженное этим равенством, представляет собой перенесение на оболочку результатов, полученных для пластины (укажем в связи с этим на то обстоятельство, что кривизны срединной поверхности не влияют на главные члены двумерных дифференциальных уравнений теории оболочек).

Выражение $\eta^2 Q_8 + Q_4$ в равенстве (7.1) можно считать известным. Оно получается указанным выше способом из левой части равенства (4.5). Для оболочки структуру выражений Q_{12}, Q_{10} предопределять не будем, хотя для этого некоторые возможности и открывает указанное выше свойство главных членов дифференциальных уравнений теории тонких оболочек.

Из рассуждений п. 6 следует, что в дальнейшем достаточно будет рассмотреть случай, когда в (7.1) $\alpha_1 = 0$. При этом в полиномах Q_n производную от f по α_1 надо рассматривать как искомую величину, а производную от f по α_2 – как заданную, так как она определяется при помощи (5.1) из граничных условий.

Вынесем в каждом из выражений Q_n за скобку множитель

$$\left[\frac{k}{A_2}\frac{\partial f}{\partial\alpha_2}\bigg|_{\alpha_1=0}\right]^n$$

учтем, что $k = \eta^{-\mu}$, и представим (7.1) в виде

$$\sum_n \eta^{\varkappa_n} P_n(\xi) = 0 \quad (n = 4, 8, 10, 12) \tag{7.5}$$

$$\varkappa_4 = -4\mu,\ \ \varkappa_8 = 2-8\mu,\ \ \varkappa_{10} = 4-10\mu,\ \ \varkappa_{12} = 6-12\mu \tag{7.6}$$

$$\xi = \left[\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial f/\partial\alpha_1}{\partial f/\partial\alpha_2}\right]_{\alpha_1=0} \tag{7.7}$$

где под P_n подразумевается полином степени n, не содержащий в коэффициентах малого параметра η (в них, конечно коэффициент при ξ^n отличен от нуля и, как можно показать, таким же свойством для оболочки не нулевой кривизны обладает свободный член).

В правой части равенства (7.7) неизвестной величиной является только $\partial f/\partial\alpha_1|_{\alpha_1=0}$. Поэтому (см. п. 6) оценка погрешностей классической двумерной теории оболочек сводится к оценке тех погрешностей, которые возникают при определении корней алгебраического уравнения (7.5), (7.6), когда оно заменяетcz тем или иным приближенным уравнением.

Опишем вытекающие из этой схемы оценочные рассуждения на конкретном примере, когда надо оценить погрешность определения НДС с большой изменяемостью.

Тогда при построении асимптотически главной части этого НДС уравнение (7.5) (7.7), можно заменить приближенным равенством

$$P_8(\xi) = 0 \tag{7.8}$$

и вопрос сведется к асимптотической оценке погрешности приближенного построения корней алгебраического уравнения, коэффициенты которого зависят от малого параметра. Этой проблеме посвящена обширная литература [6, 7] и, не останавливаясь на подробностях, сформулируем следующее вытекающее из нее *Правило*: пусть

1. Интерес представляет корень $\xi = \xi_*$ приближенного уравнения (7.8);

2. Кратность этого корня равна χ;

3. Справедливы соотношения

$$P_n(\xi_*) = \eta^{\lambda_n} \quad (n = 4,\ 10,\ 12) \tag{7.9}$$

означающие, что ξ_* не только является корнем уравнения (7.8), но и приближенно обращает в нуль P_4, P_{10}, P_{12}.

Тогда искомая оценка ε_8 определяется формулой

$$\varepsilon_8 = \sum_n \eta^{\gamma_n} \quad (n = 4,\ 10,\ 12) \tag{7.10}$$

$$\gamma_n = (\varkappa_n - \varkappa_8 + \lambda_n) / \chi \tag{7.11}$$

В рассматриваемом случае (7.8) совпадает с уравнением (4.5), взятым при $J(\mu < 1/2) = 0$, $J(\mu > 1/2) = 1$. Это значит, что ξ_* является четырехкратным корнем приближенного уравнения (7.8). Поэтому искомая оценка при учете (7.6) выразится так

$$\varepsilon(l\ \ \text{var}) \sim \eta^{\mu - 1/2 + \lambda_4/4} + \eta^{1/2 - \mu/2 + \lambda_{10}/4} + \eta^{1 - \mu + \lambda_{12}/4} \tag{7.12}$$

В этой формуле последние два слагаемых оценивают неустранимую погрешность классической двумерной теории оболочек. В них для определения неотрицательных чисел λ_{10}, λ_{12} мы не располагаем достаточными сведениями, так как в (7.1) неизвестна структура выражений Q_{10}, Q_{12}. Положим поэтому $\lambda_{10} = \lambda_{12} = 0$ и будем помнить, что для неустранимой погрешности оценка может в действительности оказаться и более благоприятной. Первое слагаемое в правой части (7.12) оценивает дополнительную погрешность построения НДС с большой изменяемостью, т. е. погрешность, происходящую от часто применяемого в этом случае отбрасывания безмоментных слагаемых. Число λ_4 можно определить, поскольку выражения Q_4 и Q_8 известны: они определяются соответственно как коэффициенты при $J(\mu < 1/2)$ и при $J(\mu > 1/2)\eta^2 R^2/3$ в левой части равенства (4.5). Отсюда видно, что корни ξ_* полинома Q_8, вообще говоря, не могут приближенно обращать в нуль полином Q_4. Особым в этом смысле является случай $R_1 = R_2$ (сферическая оболочка). Исключив его из рассмотрения, можно положить $\lambda_4 = 0$ и переписать оценку (7.12) так

$$\varepsilon(l.\ \ \text{var.}) = \eta^{\mu - 1/2} + \eta^{1/2 - \mu/2} \tag{7.13}$$

(слагаемое $\eta^{1-\mu}$ здесь отброшено как заведомо малое по сравнению с сохраненным).

В правой части соотношения (7.13) второе слагаемое характеризует (возможно завышенную) неточность классической теории оболочек, так как в показателе при η отброшено неотрицательное слагаемое λ_{10}. Есть основания (на которых не останавливаемся) считать, что $\lambda_{10} = 2\mu$. Это (предположительно) означает, что неустранимая погрешность классической теории оболочек при построении $(\text{НДС})_3$ оценивается величиной $\eta^{1/2}$, т. е. не зависит от μ. Если принять оценку (7.13), то получится, что при $\mu < 2/3$ дополнительная погрешность, характеризуемая первым слагаемым в соотношении (7.13), будет асимптотически превышать неустранимую погрешность, характеризуемую вторым слагаемым.

8. Так же как это сделано в п. 7, можно оценить и погрешности ε(memb) и ε(edge ef). Опустим подробности и сформулируем окончательные результаты.

Для оценки ε(memb) надо:

1. В уравнении (7.8) принять индекс равным 4;

2. Считать, что кратность корней этого уравнения $\chi = 2$ (так как (7.8) в данном случае получается из уравнения (4.5) при $J(\mu > 1/2) = 0$, $J(\mu < 1/2) = 1$;

3. Внести соответствующие изменения в оценочные соотношения (7.10), (7.11).

В результате при учете формул (7.6) получим

$$\varepsilon(\mathrm{memb}) \sim \eta^{1-2\mu} + \eta^{2-3\mu} \tag{8.1}$$

В правой части этого соотношения, первое слагаемое оценивает дополнительную погрешность (от отбрасывания моментных слагаемых), а второе слагаемое относится к неустранимым погрешностям классической теории.

В обоих слагаемых соотношения (8.1) в показателях при η положено $\lambda_{10} = \lambda_8 = 0$. Равенство $\lambda_8 = 0$ вытекает из следующих соображений. Полиномы P_8 и P_4 соответствуют левой части равенства (4.5), взятой при $J(\mu < 1/2) = 0$ в первом случае и при $J(\mu > 1/2) = 0$ – во втором. Сравнивая эти выражения, замечаем, что P_8 и P_4 могут иметь одинаковые корни лишь при $R_1 = R_2$, т. е. для сферической оболочки. Это значит, что оценка дополнительной погрешности ε(memb), характеризуемая первым членом соотношения (8.1), будет выражаться более высокой степенью η лишь для сферической оболочки (повышенная точность безмоментной теории при расчете сферической оболочки в литературе уже отмечалась; см. например [8]).

Во втором слагаемом оценки (8.1) принято $\lambda_{10} = 0$. Для этого, вообще говоря, есть определенные основания. Однако они теряют силу при $R_1 = R_2$. Это значит, что для сферической оболочки повышается также и точность построения безмоментного НДС по классической теории.

Замечание. При $\mu < 1$ выполняется неравенство $1 - 2\mu < 2 - 3\mu$. Оно показывает, что применение безмоментной теории для построения краевого НДС приводит к дополнительной погрешности, асимптотически превышающую неустранимую погрешность.

Для оценки погрешностей классической теории оболочек при построении простого краевого эффекта можно считать, что это НДС представляет собой предел, к которому при $\mu = 1/2$ стремится НДС с большой изменяемостью. Поэтому оценку можно получить по формулам (7.6), (7.10), (7.11), положив в них $\mu = 1/2$. Кроме того, надо учитывать, что для простого краевого эффекта определяющее уравнение имеет вид (5.4). Поэтому надо:

– принять $\chi = 1$, так как уравнение, играющее роль равенства (7.8), заведомо имеет лишь однократные корни;

– учитывать, что корни этого аналога уравнения (7.8) не совпадают (даже приблизительно) с корнями полинома P_{10}, откуда следует, что $\lambda_{10} = 0$.

Отсюда получим

$$\varepsilon(\mathrm{edge\ ef}) \sim \eta^1 \tag{8.2}$$

Это соотношение оценивает лишь неустранимую погрешность классической теории оболочек. Дополнительная погрешность в (8.2) не отражена, так как в определяющем уравнении (4.5) учтены асимптотически главные члены обоих полиномов P_4 и P_8, соответствующих полной классической теории.

Замечание. В теории простого краевого эффекта часто прибегают к "замораживанию" коэффициентов разрешающего уравнения. Это приводит к погрешности порядка $\eta^{1/2}$. Отсюда следует, что и в этом случае дополнительная погрешность асимптотически превышает неустранимую.

9. Полученные выше оценки относятся лишь к погрешностям общего интеграла однородных уравнений теории оболочек. В отношении частного интеграла неоднородных уравнений проблему надо ставить иначе. В этом случае в рамках принятого метода решения типовой задачи используется первая формула (3.7), т. е. считается, что функция изменяемости f частного интеграла не определяется из дифференциальных уравнений теории оболочек, а задается условиями типовой задачи. Это значит, что для частных решений вида (3.3) оценке подлежат лишь погрешности построения функции интенсивности U_τ.

Для U_τ в исходном асимптотическом приближении получена система линейных алгебраических уравнений, выраженная первым равенством (3.8). Поэтому примем, что искомая асимптотическая оценка погрешности совпадает с оценкой погрешности построения определителя D обсуждаемой системы уравнений.

Легко видеть, что при использовании классической теории определитель D равен левой части равенства (4.5), в которой f, k, μ надо заменить соответственно на ig, $\varkappa$, λ по формулам (3.7) и считать, что $J(\mu < 1/2) = J(\mu > 1.2) = 1$ (отсюда, в частности, следует, что для действительных g, $\varkappa$, λ определитель D заведомо отличен от нуля). Таким образом, в конечном счете надо оценить погрешность, которая возникает в выражении, стоящем в левой части равенства (7.5), (7.6) при отбрасывании слагаемых с $P_{12}(\xi)$ и $P_{10}(\xi)$. Здесь ξ определяется формулой (7.7), т. е. является величиной порядка η^0. Отсюда легко выводятся искомые оценки:

$$\varepsilon(\text{part}) = \eta^{4-6\lambda} \quad (\lambda \leqslant 1/2)$$

$$\varepsilon(\text{part}) = \eta^{2-2\lambda} \quad (\lambda \geqslant 1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01098).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Koiter W.T.* A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells // Proc. of the symposium on the theory of thin elastic shells. Amsterdam: North-Holland Publ., 1960. P. 12–33.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ, 1953. 544 с.
3. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Гольденвейзер А.Л.* Асимптотический метод в теории оболочек // Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып. 1/2. С. 137–182.
5. *Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* On Timoshenko – Reissner type theories of plates and shells // Intern. J. Solids Structures. 1993. V. 30. № 5. P. 675–696.
6. *Чеботарев Н.Г.* Теория алгебраических функций. М.–Л.: 1948. 243 с.
7. *Меньшиков В.М.* О приближенном методе расчета круговых цилиндрических оболочек // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 691–702.
8. *Гольденвейзер А.Л.* Исследование напряженного состояния сферической оболочки // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 6. С. 441–467.

Москва

Поступила в редакцию
5.III.1996