

УДК 539.4

© 1996 г. А.А. МОВЧАН

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О ПРЯМОМ И ОБРАТНОМ ПРЕВРАЩЕНИИ ДЛЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Сплавы с памятью формы обладают уникальными механическими свойствами, связанными с происходящими в них термоупругими мартенситными превращениями [1, 2]. При охлаждении образца из такого материала, нагруженного некоторым напряжением  $\sigma_{ij}$  через интервал температур прямого мартенситного превращения  $(M_1, M_2)$  ( $M_1$  – температура начала,  $M_2$  – конца реакции прямого превращения,  $M_1 > M_2$ )

развивается фазовая деформация  $\epsilon_{ij}^2$ , девиатор которой  $\epsilon_{ij}^2$ , для многих материалов при фиксированном уровне температуры  $T$  пропорционален девиатору  $\sigma'_{ij}$  приложенного напряжения (явление прямого превращения). При последующем нагревании такого образца через интервал температур обратного превращения  $(A_1, A_2)$ ,  $A_2 > A_1$  ранее приобретенная фазовая деформация с ростом температуры снимается (явление обратного превращения или памяти формы).

Определению напряженно-деформированного состояния в твердых телах, обладающих свойством памяти формы, посвящен весьма ограниченный круг работ, причем рассмотрение, за редким исключением (см., например, [3]) касалось одномерных задач при однородном напряженном состоянии, либо проводилось на основе простейших определяющих уравнений для сплавов с памятью формы [4] типа деформационной теории пластичности, не описывающих всего комплекса механических свойств этих материалов.

В публикуемой работе предлагается способ аналитического решения задач о прямом превращении, применимый для тех конфигураций, для которых может быть найдено решение соответствующей упругой задачи с заданной начальной объемной деформацией. Задача об обратном превращении сводится к термоупругой с заданным распределением дополнительных объемных и поверхностных сил. Решения основаны на определяющих уравнениях для сплавов с памятью формы, предложенных в [5–7].

1. Описанию механического поведения материалов с памятью формы посвящен ряд работ [2, 4–10]. В публикуемой работе используются следующие определяющие уравнения [5–7]. Считается, что тензор деформаций состоит из упругой  $\epsilon_{ij}^1$ , фазовой  $\epsilon_{ij}^2$  и температурной  $\epsilon_{ij}^3$  составляющих. Упругая и температурная деформация удовлетворяет соотношениям термоупругости

$$\epsilon_{ij}^1 = \frac{\sigma'_{ij}}{2G}, \quad \epsilon_{kk}^1 = \frac{1}{K} \sigma_{kk}, \quad \epsilon_{kk}^3 = \alpha(T - T_0) \quad (1.1)$$

Здесь  $G$ ,  $K$  – модули сдвига и объемного расширения,  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения, штрихом обозначаются компоненты девиатора, по повторяющимся индексам производится суммирование. Определяющие уравнения для

фазовой деформации принимаются в виде [5-7]:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^{21}}{dq} = B_{ij} + a_0 \varepsilon_{ij}^{21}, \quad \frac{d\varepsilon_{kk}^2}{dq} = \beta_1 + a_0 \varepsilon_{kk}^2 \quad (1.2)$$

где  $q$  – доля мартенситной фазы в объеме материала. Для прямого превращения ( $\dot{q} > 0$ ):

$$B_{ij} = c_0 \sigma'_{ij} \quad (1.3)$$

$$q = 1 - (1 - q^0) F_1(T, M_1, M_2) / F_1(T^*, M_1, M_2) \quad (1.4)$$

$$F_1(T, M_1, M_2) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{T - M_1}{M_2 - M_1}\right) \quad T^* = \min(M_1, T^0)$$

где  $q^0$  и  $T^0$  значения  $q$  и  $T$  в начальный момент рассматриваемого этапа прямого превращения. Для обратного превращения ( $\dot{q} < 0$ ):

$$B_{ij} = \lambda B_{ij}^1 + (1 - \lambda_1) \frac{a_0 \varepsilon_{ij}^{01}}{\exp(a_0 q^0) - 1} \quad (1.5)$$

$$q = q^0 F_2(T, A_1, A_2) / F_2(T^*, A_1, A_2)$$

$$F_2(T, A_1, A_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{T - A_1}{A_2 - A_1}\right) \quad T^* = \max(T^0, A_1)$$

Здесь  $T^0$ ,  $q^0$ ,  $\varepsilon_{ij}^{01}$  – значения температуры  $T$ , параметра  $q$  и девиатора фазовой деформации в начальной точке рассматриваемого этапа обратного превращения. Величина  $B_{ij}^1$  в данной точке обратного превращения равна значению  $B_{ij} = c_0 \sigma'_{ij}$  в точке предшествующего этапа прямого превращения с тем же значением  $q$ . Для ряда сплавов с памятью формы величины упругих модулей  $G$ ,  $K$  и коэффициент линейного расширения  $\alpha$  зависят от доли мартенситной фазы  $q$ ; кроме того, характерные температуры перехода  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  могут зависеть от действующих напряжений. Однако в работе эти эффекты не учитываются. Поэтому величины  $G$ ,  $K$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  считаются постоянными материала, так же как и параметры модели  $c_0$ ,  $a_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\beta_1$ , значения которых для ряда сплавов с памятью формы определены в [5-7]. Уравнения (1.2) должны решаться при начальных условиях

$$\varepsilon'_{ij}|_{q=0} = 0 \quad \text{либо} \quad \varepsilon'_{ij}|_{q=q^0} = \varepsilon_{ij}^0 \quad \text{и} \quad \varepsilon'_{kk}|_{q=0} = 0 \quad (1.6)$$

2. Для решения задачи о прямом превращении применяется преобразование Лапласа по переменной  $q$  (все функции от  $q$  считаются аналитически продолженными на положительную часть действительной оси через значение  $q = 1$ ). Необходимо отметить, что аналогичный прием используется для решения вязкоупругих задач, где применяется преобразование Лапласа по времени [11].

В результате определяющие уравнения для случая прямого превращения (1.1)–(1.3) принимают вид

$$\hat{\varepsilon}'_{ij} = \frac{1}{2\hat{G}} \hat{\sigma}'_{ij}, \quad \hat{\varepsilon}'_{kk} = \frac{\beta_1}{(s - a_0)s} + k \hat{\sigma}_{kk} + F(s) \quad (2.1)$$

$$\hat{G} = \left( \frac{1}{G} + \frac{2c_0}{s - a_0} \right)^{-1}, \quad k = \frac{1}{K}$$

Здесь галочкой обозначен образ по Лапласу от соответствующей величины,  $F(s)$  –

образ по Лапласу от функции  $3\alpha(T(q) - T_0)$ , где функция  $T(q)$  есть решение уравнения (1.4) относительно  $T$ .

Поэтому задача в изображениях может быть сведена к эквивалентной упругой задаче с модулем сдвига  $\hat{G}$ , модулем объемного расширения  $K$  и начальной объемной деформацией  $3\hat{\epsilon}_0(s) = \beta_1/[s - a_0] + F(s)$ .

После решения этой задачи необходимо совершить обратное преобразование Лапласа, и в полученные зависимости искомого величин от  $q$  подставить выражения  $q$  через  $T$  (1.4).

В публикуемой работе рассматриваются только такие задачи, в которых в каждый момент времени температура всех точек рассматриваемого тела одинакова. Тогда в рамках принятого предположения о независимости температур перехода от действующих напряжений, значение  $q$  не зависит от координат точек тела. В этом случае эквивалентная задача будет относиться к однородному упругому телу. Ниже для упрощения предполагается, что заданные на границе усилия и смещения фиксированы (не меняются с изменением температуры).

3. Начальная объемная деформация вносит некоторые добавки в решение эквивалентной упругой задачи, которые далее для краткости снабжаются значком  $\hat{\Delta}$ . Если кинематические граничные условия или ограничения на кинематические параметры отсутствуют, то напряжения из-за наличия начальной объемной деформации не меняются, а деформации и смещения изменяются на величины:  $\hat{\Delta}\epsilon_{ij} = \hat{\epsilon}_0(s)\delta_{ij}$ ,  $\hat{\Delta}u_i = \hat{\epsilon}_0(s)x_i$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронеккера,  $x_i$  – декартовы координаты. После обращения преобразования Лапласа соответствующие добавки к деформациям и смещениям в задаче о прямом превращении равны

$$\Delta\epsilon_{ij} = \epsilon_0(T)\delta_{ij}, \quad \Delta u_i = \epsilon_0(T)x_i \quad (3.1)$$

$$\epsilon_0(T) = \frac{\beta_1}{3a_0} [\exp(a_0q) - 1] + \alpha(T - T_0)$$

Сказанное выше остается в силе, если кинематические ограничения присутствуют, но их форма такова, что они не нарушаются при наложении шарового тензора деформации. Примером таких ограничений могут служить гипотезы плоских сечений для изгиба балок или прямой нормали в теории тонких пластин и оболочек. Поэтому в случае прямого превращения изгибаемой балки из материала с памятью формы достаточно решить соответствующую упругую задачу, в решении заменить модуль упругости  $E$  на величину  $\hat{E}(s) = E(s - a_0)/(s - \beta)$ ,  $\beta = a_0 - 2/3c_0E$  и перейти к оригиналам. Аналогично, в случае изгиба тонких пластин в решении упругой задачи необходимо коэффициент Пуассона  $\nu$  и цилиндрическую жесткость  $D$  заменить на величины

$$\hat{\nu}(s) = \nu \frac{s + d_1}{s - \beta}, \quad \hat{D}(s) = D \frac{(s - a_0)(s - \beta)}{(s + d)(s + \delta)} \quad (3.2)$$

$$d_1 = Ec_0/(3\nu) - a_0, \quad d = c_0E/(1 + \nu) - a_0, \quad \delta = c_0E/(3(1 - \nu)) - a_0$$

и найти оригиналы искомого величин. Так, следуя уравнению изгиба тонких пластин постоянной толщины в случае, если выраженные через прогиб  $W$  граничные условия не содержат упругих постоянных

$$W(q)/W_0 = \varphi(q), \quad \varphi(q) = C_1 \exp(a_0q) + B_1 \exp(\beta q) + K_1 \quad (3.3)$$

$$C_1 = \frac{a_0^2 + (d + \delta)a_0 + d\delta}{a_0(a_0 - \beta)}, \quad B_1 = \frac{\beta^2 + \beta(d + \delta) + d\delta}{\beta(\beta - a_0)}, \quad K_1 = \frac{d\delta}{a_0\beta}$$

Здесь  $W(q)$ ,  $W_0$  – прогибы в одной и той же точке одинаковых и одинаково нагруженных пластин из материала с памятью формы и упругого материала. В тех же условиях перерезывающие силы в пластине из сплава с памятью формы не зависят от  $q$  и, поэтому имеют те же значения, что и в упругой задаче, а моменты могут быть найдены по формулам

$$M_x(q) = -D \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \nu f_1(q) \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right), \quad M_y(q) = -D \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \nu f_1(q) \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy}(q) = M_{xy}(0) \left[ \left( 1 + \frac{\delta}{\beta} \right) \exp(\beta q) - \frac{\delta}{\beta} \right], \quad f_1(q) = (1 + d_1 / \beta) \exp(\beta q) - d_1 / \beta$$

где  $M_{xy}(0)$  – крутящий момент в упругой пластине.

При наличии кинематических граничных условий эквивалентная задача сводится к системе уравнений теории упругости, в которой изменено кинематическое граничное условие:

$$\hat{u}_i = u_i^0 / s - \hat{\varepsilon}_0(s) x_i \quad \text{на } S_u \quad (3.4)$$

где  $u_i^0$  – заданные смещения. Получающиеся в результате решения этой вспомогательной задачи напряжения остаются в искомом решении без изменения, а к деформациям  $\varepsilon_{ij}$  и смещениям  $u_i$  необходимо добавить слагаемые (3.1).

Расположение осей декартовой системы координат можно выбирать из соображений удобства. В частности, если вся поверхность  $S_u$  представляет из себя часть плоскости, на которой задается только нормальность к этой плоскости компонента смещений, то выбрав эту плоскость в качестве координат можно свести к нулю изменение кинематических граничных условий (3.4) и находить оригинал непосредственно от решения исходной упругой задачи, в котором модуль сдвига заменен на  $\hat{G}$  в соответствии с (2.1). К этому классу задач относятся, например, задачи о действии штампа (системы штампов) на границу полуплоскости. Необходимо отметить, что кинематические ограничения, связанные с условием плоской деформации в случае наличия одной прямолинейной границы при учете начальной объемной деформации приводят лишь к смещению этой границы как жесткого целого и поэтому не влияют на решение.

Пусть, например, штамп с параболическим основанием (профиль  $V(x) = x^2/(2R)$ , ширина  $2a$ ,  $a \ll R$ ) прижат силой  $P$ , действующей вдоль оси  $y$  к полуплоскости из сплава с памятью формы, находящейся в аустенитном состоянии при температуре  $T > M_1$ . Сила трения между штампом и полуплоскостью отсутствует. После этого происходит охлаждение полуплоскости через интервал температур  $(M_1, M_2)$  и в ней развиваются деформации и напряжения прямого превращения. Заменяя в соответствующем упругом решении [12] упругие постоянные с помощью (2.1), (3.2) и переходя к оригиналам для давления под штампом  $S$  и нормального смещения  $V$  границы полуплоскости вне штампа можно получить

$$S = \left( \frac{G}{1-\nu} f_2(q) \frac{L^2 - 2x^2}{2R} + \frac{P}{\pi} \right) (L^2 - x^2)^{-1/2}$$

$$V = 0,5(x^2 - x(x^2 - L^2)^{1/2}) - \frac{1-\nu}{G} \varphi(q) \frac{P}{\pi} \ln \frac{x - (x^2 - L^2)^{1/2}}{L}$$

$$f_2(q) = C_2 \exp(-dq) + B_2 \exp(-\delta q) + K_2$$

$$C_2 = \frac{d^2 + d(a_0 + \beta) + a_0 \beta}{d(d - \delta)}, \quad B_2 = \frac{\delta^2 + \delta(a_0 + \beta) + a_0 \beta}{\delta(\delta - d)}, \quad K_2 = \frac{a_0 \beta}{d \delta}$$

$$L = \left( \frac{2RP(1-\nu)}{\pi G f_2(q)} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

где  $\varphi(q)$  определяется формулой (3.3); начало координат расположено в вершине штампа,  $L$  – полудлина зоны контакта, определяемая из условия ограниченности давления под штампом, если только получаемая таким образом величина не превосходит заданной полуширины штампа  $a$ .

На фиг. 1 построены графики зависимости безразмерного давления под штампом  $s = SR/P$  от безразмерной координаты  $\xi = x/R$  при различных значениях  $q$ . Расчет произведен для  $a_0 = 2,257$ ,  $c_0 E = 1$ , что соответствует [6] сплаву CuAlMnCo [13], безразмерное давление на штамп  $PR/G = 0,0015$  подобрано так, чтобы полуширина зоны контакта в упругом решении ( $L/R = 0,0082$ ) была меньше полуширины штампа  $a/R = 0,01$ . Кривая 1 соответствует упругому решению ( $q = 0$ ), кривые 2–7 соответственно  $q = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 1$ . С ростом  $q$  зона контакта увеличивается, при  $q = 0,4$  достигая значения ширины штампа. При дальнейшем увеличении  $q$  в углах штампа возникают особенности по напряжениям. На фиг. 2 для той же задачи приведены графики зависимости безразмерного нормального смещения  $v = V/R$  поверхности полуплоскости вне зоны контакта от  $\xi$ .

4. Ясно, что если некоторые компоненты решения эквивалентной упругой задачи (в частности – напряжения) не зависят от модуля сдвига  $G$  и начальной объемной деформации, то их значения сохраняются без изменения при переходе к задаче о прямом превращении.

В частности, если при плоском напряженном состоянии заданы только силовые граничные условия, а рассматриваемое тело либо односвязно, либо главный вектор внешних сил, приложенных к каждому контуру равен нулю, то ни одна компонента напряжений не зависит от упругих постоянных и начальной объемной деформации. Следовательно, в соответствующей задаче о прямом превращении девиатор напряжений имеет фиксированное значение. В этом случае компоненты фазовой деформации проще всего вычислить с помощью непосредственного интегрирования определяющих уравнений (1.2), (1.3), где в качестве  $\varepsilon'_{ij}$  берется девиатор напряжений из упругого решения.

В качестве иллюстрации рассматривается задача о прямом превращении в круглом тонком кольце с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$ , находящемся под действием постоянного давления  $P$ , приложенного к внутреннему контуру. Напряжения в упругом решении равны [12]:

$$\sigma_r = p(1 - b^2/r^2), \quad \sigma_\varphi = p(1 + b^2/r^2), \quad \sigma_z = 0, \quad p = a^2 P / (b^2 - a^2)$$

Здесь  $r, \varphi, z$  – радиальная, угловая и осевая координаты цилиндрической системы координат (ось  $z$  перпендикулярна плоскости пластины).

Уравнения для компонент девиатора фазовой деформации есть

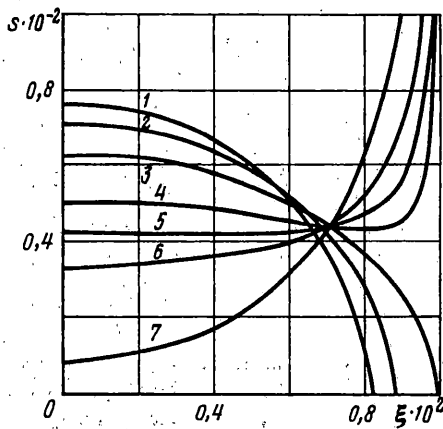
$$\frac{d\varepsilon'_r}{dq} = c_0 p \left( \frac{1}{3} - \frac{b^2}{r^2} \right) + a_0 \varepsilon'_r, \quad \frac{d\varepsilon'_\varphi}{dq} = c_0 p \left( \frac{1}{3} + \frac{b^2}{r^2} \right) + a_0 \varepsilon'_\varphi$$

$$d\varepsilon'_z / dq = -\frac{2}{3} c_0 p + a_0 \varepsilon'_z$$

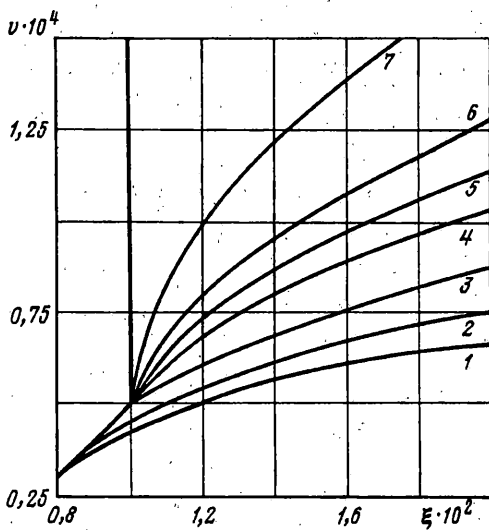
Интегрируя эти уравнения при нулевых начальных условиях, добавляя компоненты фазовой объемной и упругой деформации для относительного радиального  $W/r$  и осевого  $U/z$  смещений можно получить

$$\frac{W}{r} = \varepsilon_\varphi = \left[ c_0 p \left( \frac{1}{3} + \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{\beta_1}{3} \right] [\exp(a_0 q) - 1] / a_0 + p \left( \frac{1}{3} + \frac{b^2}{r^2} \right) / (2G) + \frac{2kp}{3} \quad (4.1)$$

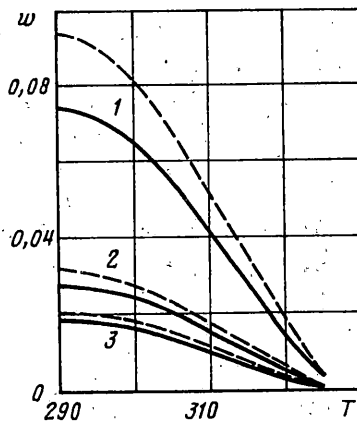
$$U_z / z = \varepsilon_z = [-\frac{2}{3} c_0 p + \frac{1}{3} \beta_1] [\exp(a_0 q) - 1] / a_0 + \frac{2}{3} kp + \frac{2}{3} p / (2G)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В условиях плоской деформации ситуация осложняется из-за кинематического ограничения  $u_z = 0$ , в силу которого напряжение  $\sigma_z$  отлично от нуля и зависит как от начальной объемной деформации, так и от температуры. В случае если на боковых цилиндрических поверхностях заданы только статические граничные условия, для учета постоянной объемной деформации  $\epsilon_0$  к решению упругой задачи необходимо добавить: к напряжению  $\sigma_z$  величину  $\hat{\Delta}\sigma_z = -E\epsilon_0(s)$ , к деформациям  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  — слагаемое  $\hat{\Delta}\epsilon = (1 + \nu)\epsilon_0(s)$ , а к компонентам смещений  $u_x$  и  $u_y$  — соответственно величины  $(1 + \nu)\epsilon_0 x$  и  $(1 + \nu)\epsilon_0 y$  (в полярной системе координат изменяется только радиальное смещение  $W$  на величину  $(1 + \nu)\epsilon_0 r$ ).

Заменяя в этих выражениях упругие постоянные через  $\hat{G}$  и  $\bar{k}$  с помощью (2.1) и совершая обратное преобразование Лапласа можно получить

$$\Delta\sigma_z = -E \left[ \frac{\beta_1}{3\beta} (\exp(\beta q) - 1) + \alpha(T - T_0) - \frac{2}{3} c_0 \alpha EI(q) \right] \quad (4.2)$$

$$\Delta \varepsilon = \left\{ \beta_1 \left[ \frac{\exp(a_0 q)}{2a_0} - \frac{(1-2\nu)\exp(\beta q)}{6\beta} + \frac{d(1+\nu)}{3a_0\beta} \right] + \alpha(T-T_0)(1+\nu) + \frac{c_0 E(1-2\nu)}{3} I(q) \right\}$$

$$I(q) = \int_0^q (T(\tau) - T_0) \exp[\beta(q-\tau)] d\tau$$

$$T(\tau) = M_1 - \frac{2}{\pi} (M_1 - M_2) \arcsin \left( 1 - \frac{1-q}{1-q^0} \right)$$

Здесь  $q_0$  – значение параметра  $q$ , при котором начинается рассматриваемый этап прямого превращения.

В качестве иллюстрации рассматривается задача о прямом превращении в круглой толстостенной трубе с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$ , находящейся в условиях плоской деформации под действием постоянного внутреннего  $P_1$  и внешнего  $P_2$  давления.

Радиальное и кольцевое напряжения в соответствующей термоупругой задаче не зависят от упругих постоянных и температуры и поэтому сохраняют свои значения при переходе к задаче о прямом превращении. Остальные компоненты решения термоупругой задачи вычисляются по формулам [12]:

$$W = Ar + \frac{B}{r}, \quad A = \frac{p}{2(\lambda+\mu)} + \frac{(3\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)} \alpha(T-T_0), \quad B = \frac{Q}{2\mu}$$

$$\sigma_z = \frac{\lambda p}{(\lambda+\mu)} - \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)} \alpha(T-T_0), \quad p = \frac{P_1 a^2 - P_2 b^2}{b^2 - a^2}, \quad Q = \frac{(P_1 - P_2) a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

Здесь  $W$  – радиальное смещение,  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе.

Заменяя упругие постоянные с помощью (2.1), добавляя слагаемые (4.2), связанные с влиянием начальной объемной деформации, и переходя к оригиналам получим

$$A(q) = (1+\nu)(1-2\nu) \frac{p}{E} \left[ \left( 1 + \frac{d}{\beta} \right) \exp(\beta q) - \frac{d}{\beta} \right] + \\ + \frac{\beta_1}{2} \left( \frac{\exp(a_0 q)}{a_0} - \frac{(1-2\nu)}{3\beta} \exp(\beta q) + \frac{2d}{3(1+\nu)a_0\beta} \right) + \\ + 2(1+\nu)\alpha(T-T_0) + \frac{2}{3}\alpha c_0 E(1-2\nu)I(q)$$

$$B(q) = Q \left[ \frac{1}{2G} + \frac{c_0}{a_0} (\exp(a_0 q) - 1) \right]$$

$$\sigma_z = 0,5\nu p \left[ \left( 1 + \frac{d_1}{\beta} \right) \exp(\beta q) - \frac{d_1}{\beta} \right] - \frac{1}{3} \frac{E\beta_1}{\beta} [\exp(\beta q) - 1] - E\alpha(T-T_0) + \frac{2}{3}\alpha c_0 E^2 I(q)$$

На фиг. 3 приведены посчитанные с помощью полученных формул графики зависимости от температуры  $T$  [K] относительного радиального смещения внутренней поверхности трубы  $w = W(a)/a$ , находящейся под действием внутреннего давления  $P_1 = P$  ( $P_2 = 0$ ). Температурное расширение не учитывалось. Использовались значения параметров материала  $a_0 = 0,718$  и  $c_0 G/a_0 = 13$ ,  $\beta_1 = 0,00232$  характерные [6] для никелида титана [2],  $\nu = 0,3$ ;  $M_1 = 325^\circ\text{K}$ ,  $M_2 = 290^\circ\text{K}$  [3]. Приведенные результаты соответствуют внутреннему давлению  $P/G = 0,001$ . Сплошные линии получены для условий плоской деформации, штриховые соответствуют решению (4.1) для кругового кольца (плоское напряженное состояние). Кривая 1 соответствует  $a/b = 0,9$ , 2 –  $a/b = 0,7$ , 3 –  $a/b = 0,5$ .

5. Фазовые деформации при обратном превращении, следуя рассматриваемой постановке задачи не зависят от действующих напряжений и поэтому могут быть найдены путем интегрирования определяющих соотношений (1.2), (1.5) при начальном условии (1.6). В результате получаем

$$\varepsilon_{ij}^2 = (1 - \lambda_1) \varepsilon_{ij}^0 f_1(q, q^0) + \lambda_1 \beta_1 \delta_{ij} f(q) + \lambda_1 c_0 \int_0^q \sigma'_{ij}(r) \exp(a_0(q-r)) dr$$

$$f(q) = \frac{\exp(a_0 q) - 1}{a_0}, \quad f_1(q, q^0) = \frac{\exp(a_0 q) - 1}{\exp(a_0 q^0) - 1}, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^{0'} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^0 \delta_{ij}$$

Здесь  $\sigma'_{ij}(q)$  – зависимость девиатора напряжений от доли мартенситной фазы на этапе предшествующего прямого превращения, получаемая при решении соответствующей задачи,  $\varepsilon_{ij}^0$  – полная фазовая деформация, достигнутая к концу предшествующего этапа прямого превращения при  $q = q^0$ . Точно также независимо может быть найдена температурная деформация  $\varepsilon_{ij}^3$ . Можно показать, что если компоненты девиатора напряжений в задаче прямого превращения не зависят от  $q$ , то компоненты фазовой деформации при прямом и обратном превращении будут равны для одинаковых значений  $q$ . Если, кроме того, силовые и кинематические граничные условия в обоих процессах для одних и тех же значений  $q$  одинаковы, то зависимости всех искомых величин от  $q$  при прямом и обратном превращении идентичны и задача об обратном превращении в отдельном решении не нуждается. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то проблема сводится к решению упругой задачи для тела с заданными начальными деформациями  $\varepsilon_{ij}^4 = \varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^3$ , которая, в свою очередь может быть сведена к упругой задаче с дополнительными объемными  $F_i^1$  и поверхностными  $T_i^1$  силами, вычисляемыми по формулам  $F_i^1 = \sigma'_{ij,j} T_i^1 = \sigma^1_{ij} n_j$ ,  $\sigma^1_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon^4_{kl}$ , где  $E_{ijkl}$  – тензор модулей упругости,  $n_i$  – вектор внешней нормали к поверхности тела. Получающиеся в результате решения этой задачи деформации и смещения равны соответствующим искомым значениям, а напряжения при обратном превращении  $\sigma_{ij}$  выражаются через найденные значения напряжений  $\sigma^0_{ij}$  по формуле  $\sigma_{ij} = \sigma^0_{ij} - \sigma^1_{ij}$ .

Можно показать, что в случае, если в каждой точке процесса прямого превращения гидростатическое напряжение не зависит от координат, внешние объемные силы равны нулю и значение параметра  $q$  одинаково для всех точек тела, то дополнительные объемные силы  $F_i^1$  также равны нулю. Действительно

$$\sigma^1_{ij,j} = 2G\varepsilon^2_{ij,j} + K\varepsilon^2_{kk,i} \quad (5.1)$$

Если  $q$  одинаково во всех точках тела, то

$$\varepsilon^2_{kk,i} = 0 \quad (5.2)$$

Девиатор фазовой деформации  $\varepsilon_{ij}^{2'}$  при обратном превращении удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^{2'}}{dq} = \lambda_1 c_0 \sigma'_{ij}(q) + (1 - \lambda_1) \frac{a_0 \varepsilon_{ij}^*(q_0)}{\exp(a_0 q_0) - 1} + a_0 \varepsilon_{ij}^{2'} \quad (5.3)$$

где функция  $\varepsilon_{ij}^*(q)$  определяется из уравнения

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^*}{dq} = c_0 \sigma'_{ij}(q) + a_0 \varepsilon_{ij}^* \quad (5.4)$$



Здесь  $\sigma'_{ij}(q)$  – зависимость от  $q$  девиатора напряжений при прямом превращении. Если  $\sigma_{kk}$  не зависит от координат, а объемные силы  $F_i$  равны нулю, то из уравнения равновесия  $\sigma'_{ij,j} = 0$  следует  $\sigma'_{ij,j} = 0$ . Дифференцируя каждое слагаемое (5.4) по координате  $x_j$  и сворачивая по индексу  $j$  можно получить, что величина  $\epsilon^*_{ij,j}$  удовлетворяет однородному линейному уравнению при нулевых граничных условиях и поэтому  $\epsilon^*_{ij,j} = 0$ . После этого путем дифференцирования (5.3) аналогично доказывается, что  $\epsilon^2_{ij,j} = 0$ . Отсюда и из (5.1) и (5.2) следует доказываемое утверждение.

В частности, требуемые условия выполняются в задаче об обратном превращении для круглой трубы, которая, таким образом сводится к упругой задаче Ламе с измененными силовыми граничными условиями на внутренней и внешней поверхности и легко решается аналитически.

Необходимо отметить, что решения, получаемые описанными выше способами будут точными и для материалов, в которых фазовый состав зависит от действующих напряжений, а упругие модули – от доли мартенситной фазы, но только в случае неизменных при фазовом переходе напряжений, причем для конечной точки рассматриваемого процесса превращения (т.е. для  $q = 1$  при прямом и  $q = 0$  при обратном превращении; в первом случае задачу надо решать для значения модуля сдвига, характерного для полностью мартенситного, а во втором – для полностью аустенитного состояний).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01406).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. О "термоупругом" равновесии и мартенситных превращениях // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. № 2. С. 211–214.
2. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 216 с.
3. Волков А.Е., Лихачев В.А., Слуцкер Ю.Ф. Расчет термомеханического соединения методами структурно-аналитической теории // Функционально-механические свойства сплавов с мартенситным механизмом неупругости. Материалы 27 Межреспублик. семинар "Актуальные проблемы прочности". Ухта, 1992. С. 31–36.
4. Абдрахманов С. Деформации материалов с памятью формы при термосиловом воздействии // Бишкек: Илим, 1991. 115 с.
5. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. АН. МТТ. 1995. № 1. С. 197–205.
6. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
7. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации фазовой диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 2. С. 173–181.
8. Tanaka K.A. Phenomenological description of thermomechanical behavior of shape memory alloys // Trans. ASME J. Pressure Vessel Techn. 1990. V. 112. № 2. P. 158–163.
9. Liang C., Rogers C.A. One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // J. Intelligent Material System and Structures. 1990. V. 1. № 2. P. 207–234.
10. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. С.-Петербург: Наука, 1993. 471 с.
11. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций.-М.: Наука, 1966. 752 с.
12. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
13. Лихачев В.А., Малинин В.Г., Овчаренко С.Я. Деформации ориентированного превращения у сплава CuAlMnCo // Материалы с новыми функциональными свойствами. Материалы семинара. Новгород–Боровичи: Новгород. политехн. ин-т, 1990. С. 100–101.