

УДК 539.3

© 1996 г. Ф.Б. КИСЕЛЕВ, С.В. ШЕШЕНИН

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ

В предлагаемой статье используется модель Био [1] для описания диффузии сжимаемой жидкости в почве, моделируемой упругой пористой средой, обычно именуемой скелетом (каркасом). Приводится краткий вывод дифференциальных уравнений модели Био, строится соответствующее вариационное уравнение. Для его решения предлагается неявная разностная схема с внутренними итерациями на каждом временном шаге. Дискретизация по пространственным координатам осуществляется вариационно-разностным методом. Исследуется решение задачи об откачке воды через скважину из слоистого водонасыщенного грунта. Показано, что рассматриваемая модель описывает аномальное поведение давления на начальном этапе откачки, наблюдаемое в геологической практике [2, 3] и не описываемое простым уравнением диффузии.

1. Хотя уравнения модели Био хорошо известны, приведем их краткий вывод ради удобства читателя. Уравнение равновесия каркаса

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (1)$$

записывается относительно так называемых полных напряжений, представляемых через эффективные напряжения в скелете $\boldsymbol{\sigma}^s$ и давление p в виде $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s - \alpha p \mathbf{I}$, где константа α зависит от насыщенности грунта и для насыщенных грунтов близка к 1, \mathbf{I} – единичный тензор. В дальнейшем будем полагать α равной 1. Напряжения, давления и вводимые далее перемещения скелета представляют собой разности соответственно этих величин в состоянии движения и состоянии покоя под действием массовых сил. По этой причине последние не входят ни в уравнения равновесия, ни в закон Дарси:

$$n(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) = -\mathbf{k}(x) \cdot \operatorname{grad} p \quad (2)$$

связывающий скорость жидкости \mathbf{v} , скорость скелета $\dot{\mathbf{u}}$ и градиент давления p (под p будем понимать приращение давления по отношению к невозмущенному состоянию). Здесь \mathbf{k} – тензор проницаемости пористой среды, n – пористость среды.

Эффективный тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}^s$ связан с осредненными деформациями каркаса $\boldsymbol{\epsilon}^s$ линейно

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^s \quad (3)$$

так что тензор \mathbf{C} является эффективным тензором модулей упругости грунта, когда отсутствует давление жидкости. Используя обычную связь малых деформаций $\boldsymbol{\epsilon}^s$ с перемещениями \mathbf{u} из (1), (3) получим первое дифференциальное уравнение модели Био:

$$\mathbf{L}u \equiv \operatorname{div} \mathbf{C} : \operatorname{grad} \mathbf{u} = \operatorname{grad} p \quad (4)$$

Для вывода второго уравнения запишем уравнения сохранения массы жидкости и твердой фазы при отсутствии массообмена между жидкостью и скелетом, но при наличии источников (стоков) массы жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\rho_f) + \text{div}(\rho_f n\mathbf{v}) = \gamma(x, t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-n)\rho_s) + \text{div}(\rho_s(1-n)\dot{\mathbf{u}}) = 0 \quad (6)$$

где ρ_f – плотность жидкости, ρ_s – плотность скелета, γ – плотность источников (стоков) жидкости.

Как обычно, будем считать, что жидкость баротропна, а материал скелета несжимаем, т.е.

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{d}{dt} \rho_f = \beta \frac{d}{dt} p, \quad \frac{d}{dt} \rho_s = 0 \quad (7)$$

Из (6) и второго соотношения (7) следует соотношение, определяющее изменение концентрации жидкости через поле перемещений скелета \mathbf{u} :

$$dn/dt = (1-n)\text{div} \dot{\mathbf{u}} \quad (8)$$

Уравнение неразрывности (5), переписанное в виде

$$n\beta\rho_f \frac{dp}{dt} + \rho_f \frac{dn}{dt} + n\rho_f \text{div} \mathbf{v} = \gamma$$

при учете (8) и закона Дарси (2) приводит ко второму дифференциальному уравнению модели Био

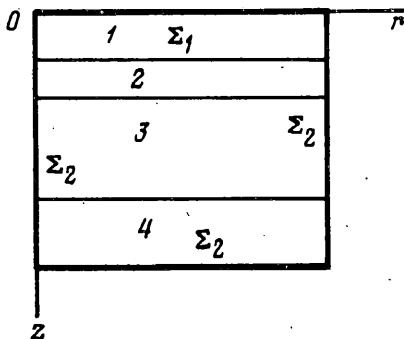
$$\text{div}(\mathbf{k} \cdot \text{grad} p) + g = \text{div} \dot{\mathbf{u}} + n\beta \frac{\partial p}{\partial t}, \quad g \equiv \frac{\gamma}{\rho_f} \quad (9)$$

В этом уравнении также произведена замена полной производной от давления по времени на частную, т.к. предполагается малость скорости фильтрации \mathbf{v} . Тензоры \mathbf{C} и \mathbf{k} предполагаем ортотропными.

Таким образом, система уравнений (4), (9) описывает фильтрацию жидкости и вызываемую последней деформацию скелета. Будем рассматривать краевую задачу для системы (4), (9) со следующими краевыми условиями, соответствующими задаче об откачке жидкости через скважину (фиг. 1):

$$\text{на } \Sigma_1: \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} : \text{grad} \mathbf{u} = 0, \quad p = 0 \quad (10)$$

$$\text{на } \Sigma_2: \mathbf{u} = 0, \quad \partial p / \partial \nu = 0 \quad (11)$$



Фиг. 1

Функцию $g(x, t)$ считаем заданной и равной $g_Q = \text{const}$ в области V_Q и равной нулю в остальной части области V . Зависимость g_Q от t выберем в виде функции Хевисайда, причем $\int_{V_Q} g_Q(x, t) dv = Q$ для $t > 0$, где Q – объем жидкости, откачиваемой в единицу времени.

Начальные условия имеют простой вид

$$\mathbf{u} = 0, \quad p = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (12)$$

Итак, краевая задача описывается уравнениями (4), (9), с краевыми условиями (10)–(11) и начальными условиями (12).

2. Для исследования описанной выше краевой задачи получим ей соответствующую вариационную задачу. Для этого умножим уравнение (4) на функцию w , а уравнение (9) на функцию q , проинтегрируем по объему области V и учитывая граничные условия (10)–(11), будем иметь

$$\int_V \text{grad } u : C : \text{grad } w dV + \int_V \text{grad } p \cdot w dV = 0 \quad (13)$$

$$\int_V \text{grad } p \cdot k \cdot \text{grad } q dV + \int_V (\text{div } \dot{u} + n\beta \dot{p}) q dV = \int_V g q dV \quad (14)$$

Система вариационных уравнений (13), (14) определяет обобщенное решение исходной краевой задачи как пару функций u, p принадлежащих соответствующим подпространствам H_u и H_p пространства W_2^1 , определяемых ограничениями, накладываемыми граничными условиями (10)–(11).

Решение вариационного уравнения (13) при фиксированной функции $\text{grad } p$ существует и единственно [4], следовательно, определен оператор L^{-1} действующий из L_2 в W_2^1 такой, что $u = L^{-1} \cdot \text{grad } p$. Обозначение L^{-1} вызвано тем, что через L обозначен оператор теории упругости (4), к которому данный оператор является обратным. Подставляя последнее выражение в (14), получим вариационное уравнение относительно функции p :

$$\int_V \text{grad } p \cdot k \cdot \text{grad } q dV + \int_V (\text{div } L^{-1} \cdot \text{grad} + n\beta) \dot{p} q dV = \int_V g q dV \quad (15)$$

От уравнения (15) можно стандартным образом перейти к операторному уравнению в некотором гильбертовом пространстве H_D [4, 5], которым может служить подпространство W_2^1 (учитывающее граничные условия на функцию p), или "энергетическое" пространство H_D со скалярным произведением

$$(p, q)_D = \int_V (D_{ij} p_{,i} q_{,j} + D_0 p q) dV \quad (16)$$

Заметим, что в силу граничных условий (10)–(11) на функцию p , можно выбирать $D_0 = 0$. На основании теоремы Рисса от (15) перейдем к операторному эволюционному уравнению в H_D [4]:

$$B\dot{p} = Ap + f \quad (17)$$

где операторы A, B и "правая" часть f определяются соотношениями

$$\begin{aligned} (Bp, q)_D &= \int_V (\text{div } L^{-1} \cdot \text{grad} + n\beta) p q dV \\ (Ap, q)_D &= -\int_V \text{grad } p \cdot k \cdot \text{grad } q dV, \quad (f, q)_D = \int_V g q dV \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) видно, что A является отрицательно определенным оператором. Наша ближайшая теперь цель состоит в изучении свойств оператора B , а точнее свойства оператора C , определяемого соотношением

$$(Cp, q)_D = \int_V \text{div } L^{-1} \cdot \text{grad } p q dV \quad (19)$$

В силу граничных условий (10)–(11) последнее выражение может быть приведено к виду

$$(Cp, q)_D = -\int_V \text{grad } q \cdot L^{-1} \cdot \text{grad } p dV$$

или

$$(Cp, q)_D = \int_V \text{grad } w_1 : C : \text{grad } w_2 dV$$

где $w_1 = L^{-1} \cdot \text{grad } p$, $w_2 = L^{-1} \cdot \text{grad } q$. Отсюда немедленно следуют симметричность и положительная определенность оператора C :

$$(Cp, q)_D = (Cq, p)_D, (Cp, p)_D > 0 \quad (20)$$

Следовательно, оператор B также симметричен и положителен

$$(Bp, p)_D > \delta(p, p)_D \quad (21)$$

Поэтому определен B^{-1} [4, 6] и уравнение (17) может быть переписано в виде $\dot{p} = B^{-1}Ap + B^{-1}f$, откуда сразу следует, что оно эволюционного типа и, следовательно, рассматриваемая краевая задача корректна.

3. В данном пункте мы рассмотрим неявную разностную схему для решения уравнения (17), записываемую в виде

$$B \frac{p^m - p^{m-1}}{\tau} = Ap^m + f \quad (t_m = \tau m, \quad m = 1, 2, \dots) \quad (22)$$

Хорошо известно [7], что схема (22) абсолютно устойчива в пространстве H_A (в H_D при $D_0 = 0$, $D_{ij} = k_{ij}$) как по начальным данным, так и по правой части.

Однако обращение на каждом временном шаге оператора $B - \tau A$ является нетривиальной задачей, для решения которой мы используем внутренний итерационный процесс.

Для того, чтобы описать данный процесс, перепишем (22) в виде

$$A_0 p^m + F = 0 \quad (23)$$

$$A_0 = A - 1/\tau B, \quad F = 1/\tau B p^{m-1} + f$$

Наличие множителя $1/\tau$ является основной причиной ухудшения обусловленности оператора A_0 при $\tau \rightarrow 0$. Это вызывает некоторую трудность реализации неявной схемы. Для решения (23) применим стандартный двухслойный итерационный процесс

$$B_0 \frac{p^{m,s+1} - p^{m,s}}{\beta} + A_0 p^{m,s} + F = 0 \quad (24)$$

сходимость которого будет иметь место при $\beta < 2/\gamma_2$, если выполняются неравенства энергетической эквивалентности операторов A_0 и B_0 [4, 5, 7]:

$$0 < \gamma_1(-B_0) \leq (-A_0) \leq \gamma_2(-B_0) \quad (25)$$

Для выполнения данного неравенства эквивалентности оператор B_0 выбран в специальном виде $B_0 = A - aE$, где E – единичный оператор, a – параметр, выбор которого описан ниже. Член $-aE$ добавлен как раз для того, чтобы преодолеть отмеченную выше плохую обусловленность оператора A_0 .

Получим оценки для констант γ_1 и γ_2 . Прежде всего оценим собственные значения оператора C . Для этого рассмотрим вспомогательный оператор C_0 , определяемый интегральным соотношением

$$(C_0 p, q) = -\int_V \Delta^{-1} \text{grad } p \cdot \text{grad } q dV \quad (26)$$

Поскольку оператор L энергетически эквивалентен оператору Лапласа Δ с компонентами $\Delta_{ij} = \Delta \delta_{ij}$, то имеют место неравенства [4, 5]:

$$0 < c_1(-\Delta) \leq (-L) \leq c_2(-\Delta) \quad (27)$$

Учитывая (19) и (26), приходим к выводу, что

$$1/c_2 C_0 \leq C \leq 1/c_1 C_0 \quad (28)$$

Чтобы оценить собственные значения оператора C_0 можно воспользоваться результатами [8], где изучается спектральная задача теории упругости¹

$$\omega \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} = 0$$

Вводя обозначения $\operatorname{div} \mathbf{u} = p$, $\lambda = -\omega^{-1}$ и применяя к последнему уравнению оператор div получим $C_0 p = \lambda p$. Зная точки сгущения ω спектра оператора теории упругости [8], можно сделать вывод, что $\lambda \in [m, 1]$, где $0 < m \leq 1/2$. Исходя из вида операторов $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ получим, что константы γ_1, γ_2 определяются неравенствами $\gamma_1 a \mathbf{E} \leq 1/\tau \mathbf{B} \leq \gamma_2 a \mathbf{E}$. Поскольку $\mathbf{B} = \mathbf{C} + n\beta \mathbf{E}$ и $m/c_2 \mathbf{E} \leq \mathbf{C} \leq 1/c_1 \mathbf{E}$, то

$$(m/c_2 + n\beta)1/\tau \mathbf{E} \leq 1/\tau \mathbf{B} \leq (1/c_1 + n\beta)1/\tau \mathbf{E}$$

Следовательно, если выбрать $a = 1/\tau$, то

$$\gamma_1 = m/c_2 + n\beta, \quad \gamma_2 = 1/c_1 + n\beta \quad (29)$$

Таким образом [4, 5, 7], скорость сходимости определяется отношением γ_1/γ_2 и не зависит от функции $\mathbf{k}(x)$, т.е. от проницаемости, но зависит от упругих модулей пористой среды. Коэффициенты C_{ijkl} удовлетворяют неравенствам $h_1 h_{ij} h_{ij} \leq C_{ijkl} h_{ij} h_{kl} \leq h_2 h_{ij} h_{ij}$, тогда $c_1 = M h_1$, $c_2 = h_2$, где M – константа из неравенства Корна

(равная 1/2 для пространства $\overset{\circ}{W}_2^1$ [9]).

Таким образом, имеются две константы в оценках (29): m и M , точные значения которых неизвестны. Поэтому при проведении итераций целесообразно использовать адаптацию параметров γ_1, γ_2 [10] по формулам:

$$\gamma_1^{s+1} = 1/2[\gamma_1^s + \gamma_2^s - (\gamma_2^s - \gamma_1^s)\alpha]$$

$$\gamma_2^{s+1} = 1/2[\gamma_1^s + \gamma_2^s + (\gamma_2^s - \gamma_1^s)\alpha]$$

где $\alpha = \rho^e/\rho$, $\rho = (1 - \xi_s)/(1 + \xi_s)$, $\xi_s = \gamma_1^s/\gamma_2^s$, $\rho^e = \|p^{m,s} - p^m\|_{A_0} / \|p^{m,s-1} - p^m\|_{A_0}$, p^m – точное решение (23). Тогда в (24) $\beta = \beta^{s+1} = 2/(\gamma_1^{s+1} + \gamma_2^{s+1})$. Норма $\|p^{m,s} - p^m\|_{A_0} = \|\mathbf{A}_0 p^{m,s} + \mathbf{F}\|$ легко может быть вычислена в процессе итераций.

Заметим, что итерации сходятся достаточно быстро, поэтому мы используем метод простой итерации, хотя можно применить и чебышевские циклы с чебышевскими параметрами.

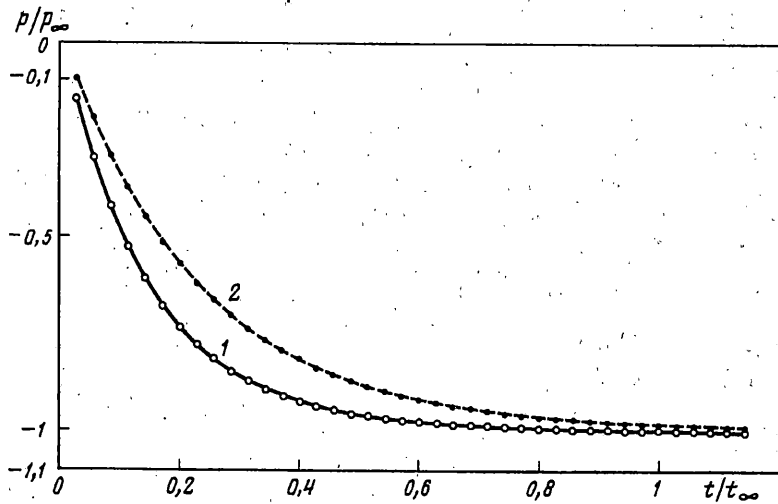
Для пространственной дискретизации данного процесса мы использовали вариационно-разностный метод [5]. Решение разностного аналога уравнения (23) для однородной среды в случае осесимметричной задачи в прямоугольной области может быть эффективно осуществлено асимптотически оптимальным прямым методом, сочетающим метод разделения Фурье, быстрое дискретное преобразование Фурье и метод прогонки. Число операций при этом пропорционально числу неизвестных. Для слоистой среды аналогичная эффективность может быть достигнута в декартовых координатах для области в виде прямоугольника или параллелепипеда.

Для уменьшения числа итераций нулевое приближение для $p^{m,0}$ в (24) строится с помощью экстраполяции (например, линейной) по значениям p на предыдущих временных шагах.

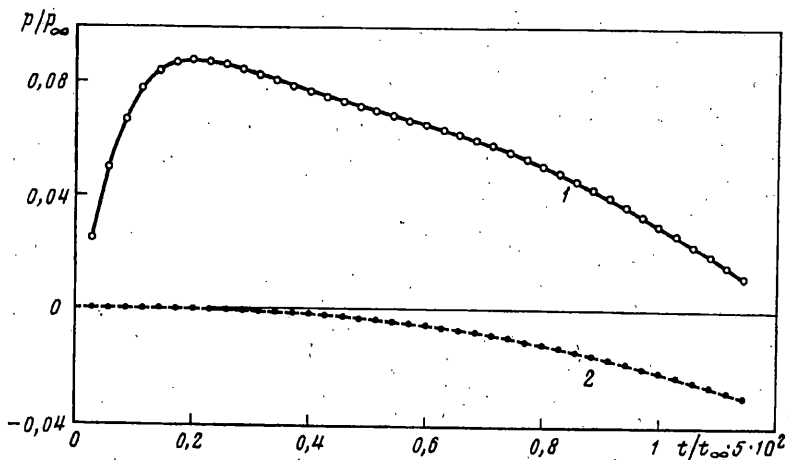
4. Опишем решение задачи об откачке жидкости через скважину в трехслойном водонасыщенном грунте, который моделируется изотропной слоистой упругой средой (фиг. 1)². Модули упругости водоупорных слоев 1 и 3 взяты соответствующими глине, водопроводящего слоя 2 – известняку.

¹ Данным выводом мы обязаны доц. МГУ Е.В. Чижонкову.

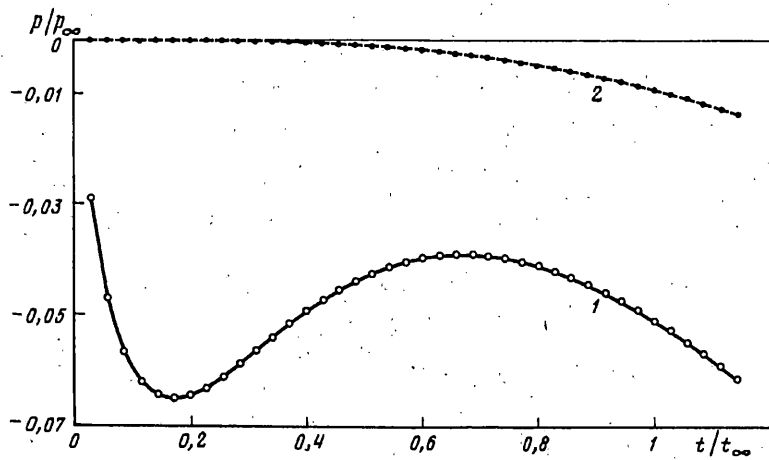
² Данные о слоях и физические константы грунта были любезно предоставлены нам профессорами Геологического факультета МГУ – Э.В. Калинин и В.М. Шестаковым.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Скважина расположена в слое 2. Параметр водоотбора $Q(t)$ выбран постоянным. Качественное поведение решения отражено в графиках на фигурах 2 и 3. Цифрой 1 обозначены графики, соответствующие решению задачи об откачке в представленной выше постановке Био, цифрой 2 – решению в постановке так называемого упругого режима фильтрации.

Модель упругого режима, по причине ее простоты, как правило и используют в практических целях [2, 11]. Уравнения упругого режима можно получить из уравнений модели Био введением дополнительных ограничений на деформацию каркаса. Например, можно предположить отсутствие сдвиговых компонент тензора деформаций или отсутствие компоненты горизонтального перемещения каркаса [11]. В обоих случаях можно связать давление p с $\text{div } \mathbf{u}$ конечным соотношением. Тогда (9) записывается относительно одной переменной – давления p и имеет вид уравнения диффузии, а система (4), (9) распадается на два несвязных уравнения, решение которых не вызывает трудностей. На фиг. 2 и фиг. 3 представлены графики приращения давления жидкости (отнесенного к p_∞) по времени, отнесенному к условному времени t_∞ установления фильтрации для точки, находящейся на глубине в $2/3$ толщины слоя 1 от поверхности земли и на расстоянии 10 радиусов скважины от боковой поверхности скважины. Под p_∞ понимается $p(t_\infty)$ в соответствующей точке объема. Из них следует, что с установлением процесса фильтрации решение по модели Био стремится к решению упругого режима. На начальном же интервале времени (приблизительно $1/1000$ от времени установления процесса фильтрации) отличие в поведении решений принципиально: график 1 возрастает, в то время как график 2 убывает. Аналогичные зависимости для слоя 4, представленные на фиг. 4, показывают, что для слоя, расположенного под фильтрационным, процесс возрастания давления существенно смещен по времени и продолжается приблизительно $1/5$ от времени установления фильтрации.

Подобные отличия в решении от получаемого в расчетах по модели упругого режима имеют практический интерес, поскольку, в связи с особенностями эксперимента, практически отсутствуют экспериментальные данные по областям, расположенным под фильтрационным слоем. Таким образом видно, что использование модели Био позволяет описать эффект аномального возрастания давления жидкости (и, соответственно, изменение направления деформирования каркаса) вблизи скважины в начальный период откачки, хорошо известный из практики [3], в то время как модель упругого режима его не отслеживает. Это показывает предпочтительность использования модели Био в расчетах нестационарной фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous solid // J. Appl. Phys. 1955. V. 26. P. 182–185.
2. Wolff R.G. Relationship between horizontal strain near a well and reverse water level fluctuation // Water Resources Research. 1970. V. 6. № 6. P. 1721–1728.
3. Vorja R.I. One-step and linear multistep methods for nonlinear consolidation // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1991. V. 85. № 3. P. 239–272.
4. Дьяконов Е.Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач. М.: Наука, 1989. 272 с.
5. Победря Б.Е., Шещенин С.В., Холматов Т. Задача в напряжениях. Ташкент: Фан, 1988. 200 с.
6. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977. 431 с.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
8. Михлин С.Г. Спектр пучка оператора теории упругости // Успехи математич. наук. 1973. Т. 28. № 3. С. 43–82.
9. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 311 с.
10. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. 446 с.
11. Gambolati G. Numerical models in land subsidence control // Comput. Meth. Appl. mechanics and engng. 1975. № 5. P. 227–237.

Москва

Поступила в редакцию

23.XI.1994