

УДК 534.1

© 1996 г. В.И. ГУЛЯЕВ, Т.В. ЗАВРАЖИНА, В.Л. КОШКИН

## УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ ДИССИПАТИВНЫХ И КОНСЕРВАТИВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Одним из сценариев перехода динамических систем к хаосу является универсальный по Фейгенбауму каскад бифуркаций удвоения периода. Основные идеи теории универсальности Фейгенбаума были разработаны в терминах точечных отображений [1–5]. Применение методов ренормализации и скейлинга к исследованию одномерных и двумерных отображений позволило выявить ряд универсальных масштабных факторов, определяющих преобразование фазовой плоскости при бифуркациях.

Вопрос об исследовании масштабных свойств периодических движений при переходе к хаосу динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, исследован намного меньше. При этом основное внимание было уделено диссипативным системам [1, 6], для которых сценарий Фейгенбаума служит механизмом возникновения "странного" аттрактора.

Методы сечения Пуанкаре [7–9] и продолжения решения по параметру [10–13] были ориентированы, в основном, на отыскание отдельных областей фазового пространства, в которых реализуются устойчивые и неустойчивые режимы движения, а также на изучение возможных путей развития неустойчивостей. Они позволяют проследить несколько первых членов последовательности бифуркаций удвоения периода, возникающей в системе. Однако применение указанных методов не дает информации о самоподобии периодических движений системы при переходе к хаосу.

Целью публикуемой работы является исследование масштабных свойств периодических движений простейших механических систем (консервативных и диссипативных) при переходе к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Она достигается применением методов скейлинга наряду с уже перечисленными алгоритмами. В качестве основного средства исследования самоподобия фазовых траекторий предлагается построение скейлинговой функции траектории (СФТ). Разработана методика построения и анализа СФТ, базирующаяся на развитом ранее [14] варианте метода продолжения по параметру  $2^n T$ -периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Впервые выполнено построение СФТ для консервативных механических свойств с одной степенью свободы. Проведен сравнительный анализ СФТ диссипативных и консервативных систем на примере ангармонического осциллятора Дуффинга и математического маятника.

Для консервативных систем получен новый универсальный параметр, позволяющий судить о наступлении в системе крупномасштабного хаоса, – значение максимального по модулю мультипликатора  $\rho_\infty = -2,057\dots$  неустойчивого  $2^n T$ -периодического движения ( $n \gg 1$ ) системы в точке накопления  $\lambda_\infty$  на пороге хаоса.

**1. Методика построения последовательности бифуркаций удвоения периода.** Для исследования колебаний нелинейных механических систем применяется подход, развитый в [10–13]. Пусть движение динамической системы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, t) \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, t)$  – нелинейная  $T$ -периодическая по  $t$  вектор функция размерности  $p$ , непрерывно-дифференцируемая необходимое число раз по  $\mathbf{x}$  и  $\lambda$ ;  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$  –  $p$ -мерный вектор фазовых координат,  $\lambda$  – скалярный параметр.

В предположении непрерывной зависимости решения  $x(t)$  системы (1.1) от начальных условий  $x(0)$  и параметра  $\lambda$  условия  $2^n T$ -периодичности решения представим в виде

$$x(0) = x(x(0), \lambda, 2^n T) \quad (1.2)$$

Проварьировав соотношение (1.2) в окрестности некоторого известного (в общем случае приближенного)  $2^n T$ -периодического решения  $x_m(t)$  системы (1.1) при  $\lambda = \lambda_m$ , получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных вариаций начальных условий  $\delta x_m(0)$  по заданной величине  $\delta \lambda_m$  [10]:

$$[Y(2^n T) - E] \delta x_m(0) = -y_\lambda(2^n T) \delta \lambda_m \quad (1.3)$$

Здесь  $Y(2^n T)$  и  $y_\lambda(2^n T)$  – соответственно матрица монодромии и вектор-функция, определяемые из фундаментальной матрицы решений  $Y(t)$  однородной и частного решения  $y_\lambda(t)$  неоднородной систем уравнений в вариациях, полученных в окрестности состояния  $\lambda = \lambda_m$ ,  $x(t) = x_m(t)$  для системы (1.1).

Уточнение начальных условий  $x_{m+1}(0) = x_m(0) + \delta x_m(0)$ , соответствующих проварьированному значению параметра  $\lambda_{m+1} = \lambda_m + \delta \lambda_m$ , проводится с использованием модифицированного метода Ньютона.

Устойчивость периодических решений системы (1.1) на  $m$ -м шаге продолжения по параметру характеризуют, в соответствии с теорией Флоке [15, 16], значения мультипликаторов  $\rho_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) матрицы монодромии  $Y(2^n T)$ . Состояние системы, в котором хотя бы один из мультипликаторов  $\rho_j$  удовлетворяет соотношениям  $|\rho_j| = 1$ ,  $\arg \rho_j = \pi$ , соответствует бифуркации удвоения периода. Поскольку в этом состоянии  $\det \|Y(2^{n+1} T) - E\| = 0$ , ответвляющееся  $2^{n+1} T$ -периодическое решение системы (1.1) может быть построено лишь с привлечением методов теории ветвления [17].

Приближенные уравнения ветвления периодических решений можно получить в форме условий периодичности второго, третьего и т.д. порядков, учитывая в (1.3) члены разложения в ряд Тейлора более высоких порядков малости по  $\delta x(0)$  и  $\delta \lambda$  [17].

Численная реализация построения последовательности бифуркаций удвоения ( $\lambda^{(n)}$ ,  $x^{(n)}(0)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) требует применения высокоточных методов интегрирования для вычисления матрицы  $Y(2^n T)$  и вектора  $y_\lambda(2^n T)$ . В настоящей работе для этих целей применялся метод Эверхарта 11–15 порядков [18]. Все вычисления производились с удвоенной точностью.

**2. Методика построения скейлинговой функции траектории.** Методика построения СФТ основана на использовании двух фазовых траекторий  $\{x^{(n)}(t), 0 \leq t \leq T_n\}$  и  $\{x^{(n+1)}(t), 0 \leq t \leq T_{n+1}\}$  ( $T_n = 2^n$ ), соответствующих  $n$ -ому и  $(n + 1)$ -ому членам бифуркационной последовательности ( $\lambda^{(n)}$ ,  $x^{(n)}(0)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Иными словами, при построении СФТ рассматриваются только такие фазовые траектории, для которых хотя бы один из мультипликаторов  $\rho_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) матрицы монодромии проходит по вещественной оси через точку  $-1$ .

При исследовании масштабных свойств периодических движений механических колебательных систем в качестве компонент фазового вектора  $x(t)$  удобнее использовать обобщенные координаты и скорости. Поэтому для системы с  $N$  степенями свободы переобозначим компоненты фазового вектора следующим образом:

$$x(t) = (x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t), \dots, x_N(t), \dot{x}_N(t)) \quad (p = 2N)$$

где  $x_j(t)$ ,  $\dot{x}_j(t)$  – соответственно  $j$ -я обобщенная координата и скорость.

Для колебательных систем вида (2.1) в фазовой плоскости  $x_j(t)$ ,  $\dot{x}_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) СФТ может быть построена по каждой из фазовых координат [1]:

по координате  $x_j(t)$ :

$$\sigma_{x_j}^{(n)}\left(\frac{t}{T_n}\right) = \frac{d_{x_j}^{(n-1)}(t)}{d_{x_j}^{(n)}(t)}, \quad 0 \leq t \leq T_n \quad (2.1)$$

по скорости  $\dot{x}_j(t)$ :

$$\sigma_{\dot{x}_j}^{(n)}\left(\frac{t}{T_n}\right) = \frac{d_{\dot{x}_j}^{(n-1)}(t)}{d_{\dot{x}_j}^{(n)}(t)}, \quad 0 \leq t \leq T_n$$

Здесь  $d_{x_j}^{(n)}(t)$ ,  $d_{\dot{x}_j}^{(n)}(t)$  – вычисленные при  $\lambda = \lambda^{(n)}$  компоненты вектора

$$\mathbf{d}_j^{(n)}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}_j^{(n)}(t)\|} (\mathbf{r}_j^{(n)}(t) - \mathbf{r}_j^{(n)}(t + T_{n-1})), \quad 0 \leq t \leq T_n$$

$$\|\mathbf{r}_j^{(n)}(t)\| = [(x_j^{(n)}(t))^2 + (\dot{x}_j^{(n)}(t))^2]^{1/2}$$

где  $\mathbf{r}_j^{(n)}(t) = (x_j^{(n)}(t), \dot{x}_j^{(n)}(t))$  – радиус-вектор, описывающий при  $\lambda = \lambda^{(n)}$  движение изображающей точки вдоль проекции фазовой траектории  $\mathbf{x}^{(n)}(t)$  на  $j$ -ю фазовую плоскость на сегменте времени  $0 \leq t \leq T_n$ .

Особенностью построенных таким образом СФТ периодических движений как консервативных, так и диссипативных систем является их разрывный характер, обусловленный тем, что на сегменте  $0 \leq t \leq T_n$  каждая из них претерпевает  $2^{n+1}$  разрывов, поскольку стоящие в знаменателе (2.1) функции  $d_{x_j}^{(n)}(t)$ ,  $d_{\dot{x}_j}^{(n)}(t)$  имеют по  $2^{n+1}$  нулей. Чтобы избежать этот недостаток будем анализировать масштабные свойства периодических движений, вводя СФТ соотношением вида

$$\sigma_j^{(n)}\left(\frac{t}{T_n}\right) = \left\{ \frac{(d_{x_j}^{(n-1)}(t))^2 + (d_{\dot{x}_j}^{(n-1)}(t))^2}{(d_{x_j}^{(n)}(t))^2 + (d_{\dot{x}_j}^{(n)}(t))^2} \right\}^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq T_n \quad (2.2)$$

СФТ типа (2.2) терпят разрывы лишь в точках пересечения соседних слоев фазовых орбит системы (1.1). В связи с этим они имеют более упорядоченный вид.

Построение и последующий анализ СФТ требует высокой точности при определении бифуркационных значений управляющего параметра  $\lambda^{(n)}$  и начальных условий  $\mathbf{x}^{(n)}(0)$ . Поэтому в окрестности точек бифуркации уточнение значений  $\lambda^{(n)}$  и  $\mathbf{x}^{(n)}(0)$  проводилось методом половинного деления по параметру  $\lambda$  до получения 15 верных знаков и 12 знаков в значении мультипликаторов  $\rho_j^{(n)}$ .

**3. Математические модели.** С использованием методики, описанной в п. 1, 2 было проведено исследование эволюции периодических движений следующих нелинейных колебательных систем с одной степенью свободы, происходящей при изменении управляющего параметра  $\lambda$  (интенсивности внешнего возмущения).

1. Консервативные осцилляторы  
математический маятник

$$\ddot{x} + \sin x = \lambda \sin \omega t, \quad \omega = 0,8 \quad (3.1)$$

осциллятор Дуффинга [10]:

$$\ddot{x} + x - x^3 = \lambda \sin \omega t, \quad \omega = 1,3 \quad (3.2)$$

2. Диссипативные осцилляторы  
математический маятник

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \sin x = \lambda \sin \omega t, \quad \omega = 0,8; \quad \mu = 0,02 \quad (3.3)$$

осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} - x + x^3 = \lambda \sin \omega t, \quad \omega = 0,7; \quad \mu = 0,02 \quad (3.4)$$

Было установлено, что для систем (3.1)–(3.4) существует диапазон параметров, для которого переход от регулярных режимов движения к хаотическим осуществляется через универсальный по Фейгенбауму каскад бифуркаций удвоения периода. Для каждой из систем были определены несколько первых членов бифуркационных последовательностей. На их основе проведено исследование масштабных свойств  $2^n T$ -периодических решений систем (3.1)–(3.4), включающее построение СФТ и определение с ее помощью масштабных факторов перехода к хаосу. В первом столбце табл. 1, 2 соответственно приведены бифуркационные значения управляющего параметра  $\lambda^{(n)}$  консервативного маятника (3.1) и маятника с диссипацией энергии (3.3).

**4. Обсуждение результатов.** Для одномерных точечных отображений были выявлены три универсальные постоянные, характеризующие закономерности преобразования фазового пространства при бифуркациях удвоения [1–5]. Две из них ( $\alpha$  и  $\beta' = \alpha^2$ ) дают представление о характере самоподобия в расположении соседних элементов суперустойчивых  $2^n$ -циклов ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), возникающих вблизи неподвижной точки, соответствующей максимуму квадратичного отображения, при бифуркациях удвоения периода. В пределе хаотического движения универсальный параметр скейлинга  $\alpha$  и постоянная  $\beta'$  принимают значения  $\alpha = 2,502907875\dots$ ,  $\beta' = 6,264547831\dots$ . Масштабные факторы  $\alpha$  и  $\beta'$  позволяют изучать локальное изменение масштаба в окрестности лишь одной неподвижной точки, соответствующей максимуму квадратичного отображения (при  $t = 0 - \varepsilon$  и  $t = 0 + \varepsilon$ ). Локальное изменение масштаба вдоль всего аттрактора в бесконечной последовательности бифуркаций удвоения описывает СФТ  $\sigma(t/T_n)$  ( $0 \leq t \leq T_n$ ,  $T_n = 1$ ), которая позволяет определить, как частный случай, значения  $\alpha$  и  $\beta'$  соответственно при  $t = 0 - \varepsilon$  и  $t = 0 + \varepsilon$  в окрестности неподвижной точки [1, 5].

Третий масштабный фактор характеризует сходимось бифуркационных значений управляющего параметра к предельному значению (точке накопления), при котором развивается крупномасштабный хаос. Универсальная константа Фейгенбаума  $\delta$  связывает три соседних бифуркационных значения параметра

$$\delta^{(n)} = (\lambda^{(n+1)} + \lambda^{(n)}) / (\lambda^{(n+2)} + \lambda^{(n+1)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4,66920\dots \quad (4.1)$$

и позволяет предсказать предельное значение параметра  $\lambda_\infty$  на пороге хаоса

$$\lambda_\infty = \lambda^{(n)} + (\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)})\delta^{(n)} / (\delta^{(n)} - 1) \quad (4.2)$$

О наступлении динамического хаоса позволяет судить еще один универсальный параметр диссипативных систем [19] – значение максимального по модулю мультипликатора  $\rho_\infty$  неустойчивого  $2^n$ -цикла ( $n \geq 1$ ) в точке накопления  $\lambda_\infty$ ,  $\rho_\infty = -1,60119\dots$

Для гамильтоновых систем, описываемых двумерными отображениями, аналогичные универсальные постоянные  $\alpha$  и  $\delta$  принимают иные значения [2–4]:  $\alpha = 4,018\dots$ ,  $\delta = 8,721097\dots$

При исследовании двумерных гамильтоновых отображений, представленных в форме квадратичного отображения Вогелара, Грином и Мак-Каем масштабный фактор  $\beta' = \alpha^2$  обнаружен не был, однако выявлен дополнительный параметр подобия  $\beta = 16,36\dots$ , который совместно с  $\alpha$  определяет характер самоподобия фазовой плоскости системы при бифуркациях удвоения периода [2, 3].

Рассмотрим основные особенности СФТ, построенных нами согласно (2.1) и (2.2), для диссипативных систем (3.3), (3.4): СФТ, построенные для  $n \geq 1$ , имеют многоступенчатую форму с явным преобладанием двух ярко выраженных уровней; вид СФТ практически не зависит от номера бифуркации  $n$  ( $n \geq 1$ ); все СФТ  $\sigma_{x_1}^{(n)}(t/T_n)$ ,

Таблица 1

$n$	$\lambda^{(n)}$	$\alpha^{(n)}$	$\beta^{(n)}$	$\delta^{(n)}$	$\rho^{(n)}$
0	-0,469748217065440	-	-	-	-
1	-0,430767430636541	-	-	-	-2,085498
2	-0,431605320297182	-	-	-	-2,054360
3	-0,431705603138909	-	-	8,3552644	-2,057852
4	-0,431717119048156	-	-	8,7082001	-2,057433
5	-0,431718440284573	3,688318	16,153731	8,7160096	-2,057460
6	-0,431718591781920	4,048181	16,367612	8,7211852	-2,057396
7	-0,431718609153199	4,016488	16,345550	8,7211392	-2,057445
8	-0,431718611145067	4,018094	16,368240	8,7210975	-2,057431

Таблица 2

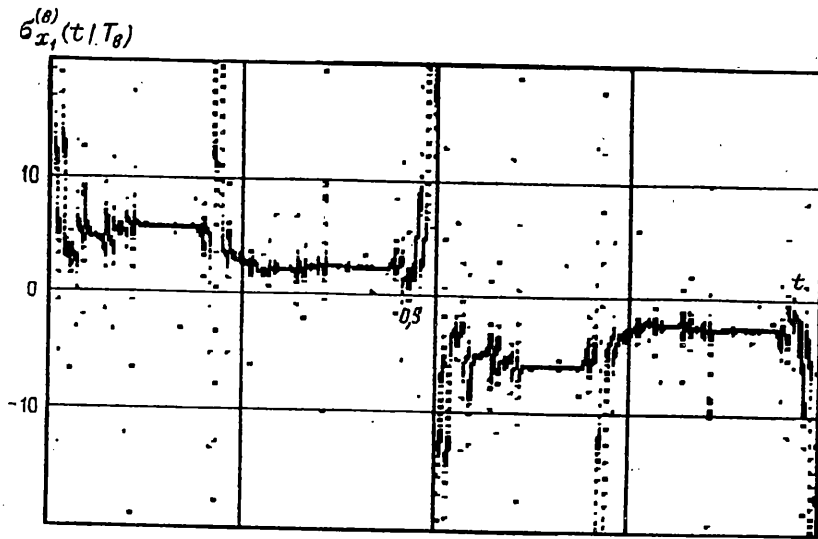
$n$	$\lambda^{(n)}$	$\alpha^{(n)}$	$\beta^{(n)}$	$\delta^{(n)}$	$\rho^{(n)}$
1	-0,43323405482052	-	-	-	-1,842610
2	-0,43408522785865	-	-	-	-1,691442
3	-0,43419610108465	-	-	7,6769935	-1,605589
4	-0,43421252293415	-	-	6,7515675	-1,587971
5	-0,43421564349717	3,2796861	35,1831316	5,2624637	-1,598018
6	-0,43421630822185	2,7243974	8,5145634	4,6945196	-1,601238
7	-0,43421645072879	2,5905227	5,8947661	4,6645074	-1,601368
8	-0,43421648127003	2,5879912	5,6103227	4,6660496	-1,601635
9	-0,43421648781120	2,5103689	5,4560892	4,6690812	-1,601209

$\sigma_{x_1}^{(n)}(t/T_n)$ ,  $\sigma_1^{(n)}(t/T_n)$  близки между собой. При этом основные качественные и количественные закономерности СФТ в пределе хаотического движения сохраняются для обеих фазовых координат  $x_1$  и  $\dot{x}_1$  вне зависимости от применяемого способа построения ((2.1) или (2.2)). На фиг. 1 приведена СФТ  $\sigma_{x_1}^{(n)}(t/T_n)$  математического маятника (3.3) при  $n = 8$ , которая имеет универсальный характер для рассмотренных диссипативных систем.

Необходимо отметить, что описанные качественные особенности диссипативных систем (3.3) и (3.4) находятся в согласии с результатами исследований, проведенных Фейгенбаумом для нелинейного ангармонического осциллятора Дуффинга с затуханием [1].

С использованием найденных СФТ определим основные масштабные факторы, характеризующие преобразование фазовой плоскости системы (3.3) при бифуркациях удвоения. Как известно [1, 5], для этого достаточно определить скачки СФТ лишь в точках по  $t$ , отстоящих друг от друга на четверть периода. В столбцах 2, 3 табл. 2 приведены значения СФТ по координате  $\sigma_{x_1}^{(n)}(t/T_n)$  для различных  $n$  в точках  $t_1 = 3T_n/8$ ,  $t_2 = T_n/8$ . По аналогии с известными параметрами подобию  $\alpha = \sigma(t/T_n)|_{t=0-\theta}$  и  $\beta' = \sigma(t/T_n)|_{t=0+\theta} = \alpha^2$ , введенными Фейгенбаумом [1] при построении СФТ методом функциональной ренормгруппы, будем использовать следующие обозначения:  $\alpha^{(n)} = \sigma_{x_1}^{(n)}(t/T_n)|_{t=3T_n/8}$  и  $\beta'^{(n)} = \sigma_{x_1}^{(n)}(t/T_n)|_{t=T_n/8}$ .

Как показали расчеты, с увеличением номера бифуркации  $n$  параметры  $\alpha^{(n)}$  и  $\beta'^{(n)}$  обнаруживают быструю сходимость к значениям 2,5029... и 5,4560... . Таким образом, масштабный фактор  $\alpha^{(n)}$  для  $n \geq 1$  с высокой точностью совпадает со значением универсального параметра скейлинга  $\alpha = 2,502907875...$ , однако  $\beta'^{(n)}$  такого совпа-



Фиг. 1

дения с квадратом значения  $\alpha$  не дает. Отметим также, что указанные закономерности сохраняются и для СФТ по скорости  $\sigma_{\dot{x}_1}^{(n)}(t/T_n)$ . Аналогичные результаты были получены при исследовании масштабных свойств системы (3.4).

Третий масштабный фактор  $\delta^{(n)}$ , характеризующий совместно с  $\alpha^{(n)}$  и  $\beta'^{(n)}$  масштабные свойства преобразования фазового пространства систем (3.3), (3.4) при бифуркациях удвоения, для  $n \gg 1$  удовлетворяет соотношению (4.1). Обратимся к столбцу 4 таблицы 2, где приведены значения  $\delta^{(n)} = (\lambda^{(n-2)} + \lambda^{(n-1)}) / (\lambda^{(n-1)} + \lambda^{(n)})$ , вычисленные для десяти первых бифуркаций удвоения периода маятника (3.3). Анализ указанных значений показывает, что с увеличением  $n$   $\delta^{(n)}$  стремятся к универсальной постоянной  $\delta$ , а следовательно, бифуркационные значения управляющего параметра  $\lambda^{(n)}$  сходятся к предельному значению  $\lambda_\infty$  на пороге хаоса. Значение параметра  $\lambda_\infty = -0,43421648959398$ , при котором колебания маятника (3.3) будут носить хаотический характер, было получено при  $n = 9$ , а для осциллятора Дуффинга (3.4)  $\lambda_\infty = 0,164739691295026$  при  $n = 8$ .

Отношение масштабных факторов  $\alpha^{(n)}$ ,  $\beta'^{(n)}$  и  $\delta^{(n)}$ , определенных по диссипативной СФТ, введем соотношением

$$\gamma_1^{(n)} = \frac{\alpha^{(n)}}{\beta'^{(n)}} \delta^{(n)} \quad (4.3)$$

Для системы (3.3) значения  $\gamma_1^{(n)}$  приведены во второй строке табл. 3 для  $n = 5-9$ .

Были также построены СФТ консервативных колебательных систем (3.1) и (3.2). Функции, полученные по методике (2.1), позволяют выделить следующие качественные отличия от диссипативного аналога: СФТ  $\sigma_{x_1}^{(n)}(t/T_n)$ ,  $\sigma_{\dot{x}_1}^{(n)}(t/T_n)$ , зависят от порядкового номера  $n$  бифуркации и с увеличением последнего усложняются; СФТ  $\sigma_{\dot{x}_1}^{(n)}(t/T_n)$  по скорости существенно отличается от СФТ  $\sigma_{x_1}^{(n)}(t/T_n)$  по координате. При одинаковом значении  $n$  СФТ по скорости имеет более сложный характер. В качестве примера на фиг. 2, *a, b* представлены СФТ по координате и по скорости для  $n = 8$  маятника (3.1).

$n$	5	6	7	8	9
$\gamma_2^{(n)}$	1,9900950	2,1569990	2,1429890	2,1408860	-
$\gamma_1^{(n)}$	0,4905542	1,5020900	2,1524065	2,1524065	2,1482632

СФТ, построенные согласно (2.2), лишены этих особенностей и для обеих рассмотренных консервативных систем в пределах изученного диапазона параметров проявляют совпадение. При этом их вид практически не зависит ни от номера бифуркации  $n$ , ни от характера нелинейности системы. Полученная универсальная СФТ  $\sigma_1^{(n)}(t/T_n)$  представлена на фиг. 2, с.

Все построенные СФТ консервативных систем с одной степенью свободы (по координате, по скорости, универсальная) не имеют многоступенчатой формы с преобладанием двух ярко выраженных уровней, свойственной системам с диссипацией.

Однако для систем (3.1) и (3.2) все СФТ имеют характерный участок в окрестности  $t_1 = 3T_n/8$ ,  $t_2 = 7T_n/8$ . Указанные характерные фрагменты СФТ выделены на фиг. 2 сплошной линией. Значения СФТ по координате маятника (3.1) в точке  $t_1 = 3T_n/8$  приведено в столбце 2 табл. 1. По аналогии с диссипативным случаем обозначим  $\alpha^{(n)} = \sigma_{x_1}^{(n)}(t/T_n)|_{t_1=3T_n/8}$ . В отличие от диссипативного аналога на сегменте  $0 \leq t \leq T_n/4$  для консервативных СФТ в окрестности точки  $t = T_n/8$  второй характерный участок обнаружен не был. Вместо него на указанном сегменте возникают два характерных участка в окрестности точек  $t_3 = T_n/16$ ,  $t_4 = 3T_n/16$ . Эти участки также имеют место и в точках  $t_5 = 9T_n/16$ ,  $t_6 = 11T_n/16$  на сегменте  $T_n/2 \leq t \leq 3T_n/4$ . Эти участки выделены на фиг. 2 штриховой линией. В столбце 3 табл. 1 даны значения СФТ по координате системы (3.1) в точке  $t_3 = T_n/16$ . Для этого значения введем обозначение  $\beta^{(n)} = \sigma_{x_1}^{(n)}(t/T_n)|_{t_3=T_n/16}$ .

Анализ масштабных факторов позволяет сделать заключение о том, что вычисленные по СФТ для первых девяти бифуркаций удвоения периода параметры  $\alpha^{(n)}$  и  $\beta^{(n)}$  обнаруживают с ростом  $n$  быструю сходимость к универсальной скейлинговой постоянной  $\alpha = 4,018\dots$  и дополнительному параметру подобия  $\beta = 16,36\dots$ . Третий масштабный фактор  $\delta^{(n)}$  для системы (3.1) приведен в столбце 4 табл. 1. При увеличении номера  $n$  он стремится к универсальной консервативной постоянной  $\delta = 8,721097\dots$ .

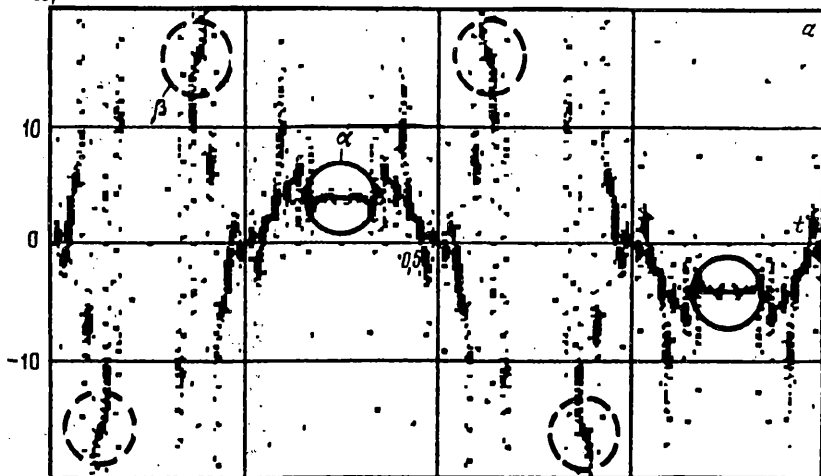
Рассмотрим отношение параметров  $\alpha^{(n)}$ ,  $\beta^{(n)}$  и  $\delta^{(n)}$ , определенных по консервативной СФТ, аналогичное соотношению (4.3):

$$\gamma_2^{(n)} = \frac{\alpha^{(n)}}{\beta^{(n)}} \delta^{(n)} \quad (4.4)$$

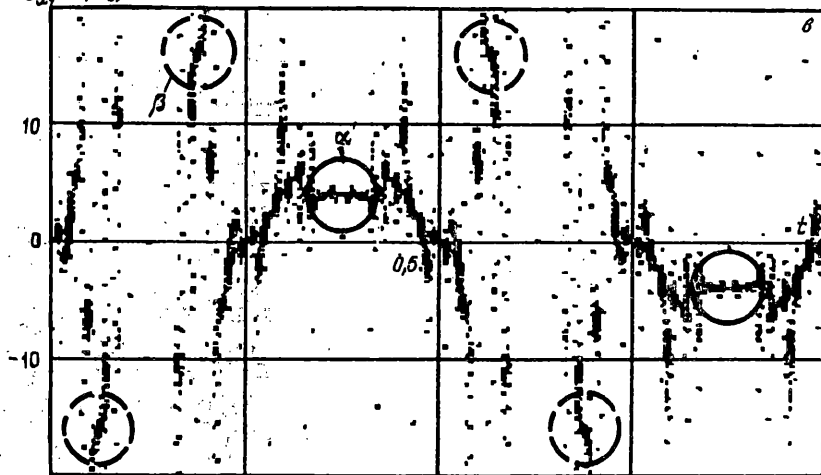
Значения  $\gamma_2^{(n)}$  для системы (3.1) при  $n = 5-8$  приведены в первой строке табл. 3.

Сравнение отношений  $\gamma_1^{(n)}$  (4.3) и  $\gamma_2^{(n)}$  (4.4) (табл. 3) выявляют их быструю сходимость к одному и тому же значению 2,14... как для диссипативного (3.3), так и для консервативного (3.1) математического маятника. Эта закономерность была получена и для осциллятора Дуффинга (3.4) и (3.2). Этот факт позволяет предположить, что подобное совпадение значений  $\gamma_2^{(n)}$ ,  $\gamma_1^{(n)}$  для консервативных и для диссипативных систем в пределе хаотического движения будет иметь место и для других

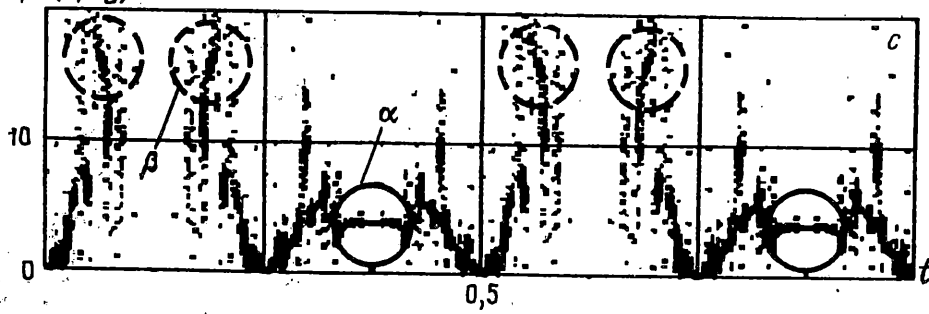
$\sigma_{x_1}^{(\theta)}(t/T_0)$



$\sigma_{x_2}^{(\theta)}(t/T_0)$



$\sigma_{x_3}^{(\theta)}(t/T_0)$



Фиг. 2



динамических систем и тем самым будет представлять собой единый универсальный параметр, описывающий переход к хаосу всех динамических систем (диссипативных и консервативных), испытывающих каскад бифуркаций удвоения периода.

В последнем столбце табл. 1, 2 приведены соответственно значения максимального по модулю мультипликатора  $\rho^{(n)}$  неустойчивых движений консервативного маятника (3.1) и маятника с диссипацией (3.3) при предельном значении параметра  $\lambda = \lambda_\infty$ . Как известно [1, 5], в пределе бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода при  $\lambda = \lambda_\infty$  в некоторой области фазового пространства существует бесконечное множество таких неустойчивых движений (так называемый аттрактор Фейгенбаума). Из табл. 1 видно, что устойчивость каждого из них в точке накопления диссипативной системы характеризуется мультипликатором  $\rho^{(n)}$ , который с увеличением  $n$  проявляет сходимость к универсальному значению  $\rho_\infty = -1,60119\dots$ , полученному ранее в [19]. Исследование мультипликаторов  $\rho^{(n)}$  в точке накопления систем (3.1), (3.2) показывает, что подобное свойство имеет место и для гамильтоновых систем. Однако найденное нами универсальное значение мультипликатора неустойчивого  $2^n T$ -периодического движения при  $\lambda = \lambda_\infty$  (см. табл. 3) отлично от  $\rho_\infty = -1,60119\dots$  и равно  $\rho_\infty = -2,0574\dots$ . Полученное значение мультипликатора является еще одним универсальным параметром гамильтоновых систем, который наряду с  $\lambda_\infty$  позволяет предсказать возможность появления в динамической системе хаотических колебаний.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feigenbaum M.J. Universal Behaviour in Nonlinear Systems // Los Alamos Sci. 1980. V. 1. No 1. P. 4–27.
2. Helleman R.H.G. Feigenbaum sequences in conservative and dissipative systems // Chaos and order in nature. Proc. Intern. Symp. Synergetics, Schloss Elmau, Bavaria, 1981. Berlin: Springer, 1981. P. 232–248.
3. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
4. Неймарк Ю.Н., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
6. Vieira Maria C. de Sousa, Gunaratne Gemunu H. The trajectory scaling function for period doubling bifurcations in flows // J. Statist. Phys. 1990. V. 58. No. 5–6. P. 1245–1256.
7. Hayashi C., Abe M., Oshima K., Kawakami H. The method of mapping as applied to the solution for certain types of nonlinear differential equations // 9 Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев: Наук. думка, 1984. С. 1. С. 40–44.
8. Holmes P., Whitley D. On the attracting set for Duffing's equation // Physica D. 1983. V. 7. No. 1–3. P. 111–123.
9. Byatt Smith J.G. Regular and chaotic solutions of Duffing's equation for large forcing // IMA J. Appl. Math. 1986. V. 37. No. 2. P. 113–145.
10. Гуляев В.И., Зубрицкая А.Л., Кошкин В.Л. Построение последовательностей бифуркаций кратного увеличения периода решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 929–933.
11. Гуляев В.И., Зубрицкая А.Л., Кошкин В.Л. Универсальная последовательность бифуркаций удвоения периода вынужденных колебаний маятника // ПММ. 1990. Т. 53. Вып. 5. С. 715–720.
12. Гуляев В.И., Зубрицкая А.Л., Кошкин В.Л. Об удвоении периода колебаний маятника переменной длины // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 6. С. 74–80.
13. Гуляев В.И., Зубрицкая А.Л., Кошкин В.Л. Универсальная последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний спутника на эллиптической орбите // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 3–8.
14. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. и др. Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. Львов: Вища школа, 1983. 287 с.
15. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
16. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 300 с.
17. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
18. Everhart E. An efficient integrator of very high order and accuracy with appendix listing of RADAU. Denver: Univ. of Denver. 1974. 20 P.
19. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 213 с.