

**МЕХАНИКА  
ТВЕРДОГО ТЕЛА  
№ 3 • 1996**

УДК 533.6.013.42

© 1996 г. А.Г. ГОРШКОВ, В.Н. КУЗНЕЦОВ, И.Т. СЕЛЕЗОВ

**ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА  
В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

Теоретические разработки, полученные при решении задач взаимодействия цилиндрической оболочки с потоком идеальной жидкости не могут быть строго перенесены на модель вязкой жидкости, так как в рамках теории малых возмущений нельзя точно уловить гипотезу прилипания на упругой поверхности.

В публикуемой работе предлагается решение задачи обтекания цилиндрической оболочки потоком вязкой жидкости в рамках допущения Стокса для возмущенного потока, что позволило уловить гипотезу прилипания точно.

1. Рассмотрим бесконечную цилиндрическую оболочку радиуса  $R$  и толщиной  $h$ , которая обтекается потоком вязкой несжимаемой жидкости в поперечном направлении с заданным на бесконечности давлением  $p(t) = p_\infty \sigma(t)$ , где  $p_\infty = \text{const}$ ,  $\sigma(t)$  – функция Хевисайда. Заполнение внутри оболочки не учитывается.

Возмущенный поток будем описывать уравнениями Стокса [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \nu \Delta \mathbf{V} \quad (1.1)$$

и уравнением неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1.2)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости,  $p$  – давление.

Граничные условия, которым должно удовлетворять решение системы уравнений (1.1) и (1.2), будут

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R \quad (1.3)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(t) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – вектор упругих перемещений поверхности цилиндрической оболочки.

Тогда в рамках тёхнической теории оболочек движение оболочки можно записать в форме [2]:

$$L\mathbf{u} + Q(\mathbf{q})_{r=R} - \rho_1 h \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.5)$$

где  $L$  – матрица дифференциальных операторов, вид которых известен [3];  $\rho_1$  – плотность материала оболочки;  $Q$  – матрица, отличные от нуля элементы которой имеют следующий вид:

$$Q_{11} = Q_{22} = -Q_{33} = -(1 - v_1)R/(Eh)$$

где  $v_1$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости;  $\mathbf{q}$  – вектор сил, компоненты которого определены тензором напряжений вязкой жидкости

$$q_{ij}|_{r=R} = \left[ -(p_\infty + p)\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right]_{r=R} \quad (1.6)$$

Для решения уравнений (1.1) и (1.2) выразим вектор скорости жидкости через скалярный  $\psi$  и векторный  $\chi$  потенциалы [4]

$$\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \psi + \operatorname{rot} \chi) \quad (1.7)$$

Подставив значение скорости (1.7) в уравнение (1.2), получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + \operatorname{div} \operatorname{rot} \chi) = 0 \quad (1.8)$$

Если учесть, что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \chi = 0$ , а  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi$ , где  $\Delta$  – оператор Лапласа, то получим уравнение для определения потенциала

$$\partial \Delta \psi / \partial t = 0 \quad (1.9)$$

Уравнение (1.1) с учетом (1.7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} - v \Delta \right) \operatorname{grad} \psi + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} - v \Delta \right) \operatorname{rot} \chi = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (1.10)$$

На потенциалы  $\psi$  и  $\chi$  не накладывалось ранее никаких ограничений, поэтому из уравнения (1.10) можно написать соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} - v \Delta \right) \operatorname{rot} \chi = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} - v \Delta \right) \operatorname{grad} \psi = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (1.12)$$

Уравнение (1.2) с учетом (1.9) приводит к определению давления

$$p = -\rho \partial^2 \psi / \partial t^2 \quad (1.13)$$

Для векторного потенциала  $\chi$  в уравнении (1.11) введем соотношение через скалярные функции  $\chi_1$  и  $\chi_2$ :

$$\chi = \mathbf{e}_r \chi_1 + \nabla \times \mathbf{e}_r \chi_2 \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{e}_r$  – орт координатной оси  $r$ .

Соотношение (1.14) приводит уравнение (1.11) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} - v \Delta \right) \chi_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.15)$$

В цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  значения составляющих вектора скорости (1.7) с учетом (1.14) записываются так

$$V_r = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial r \partial z} \right)$$

$$V_\theta = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \chi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \theta \partial z} \right)$$

$$V_z = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi_2}{\partial \theta} \right)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Сделаем несколько упрощений поставленной задачи. Будем считать, что параметры системы оболочка-жидкость зависят только от координат  $(r, \theta)$  – плоская задача ( $\chi_2 \equiv 0$ ). Используя также общепринятую гипотезу для линейных задач гидроупругости, что граничные условия сносятся на недеформируемую поверхность, получим расщепление нагрузки на обложку в виде суммы

$$q_{ij}|_{r=R} = p_{ij}^* + \bar{p}_{ij} \quad (1.16)$$

где  $p_{ij}^*$  – нагрузка на оболочку со стороны жидкости как на абсолютно твердое тело,  $\bar{p}_{ij}$  – нагрузка, обусловленная возмущениями, вносимыми в жидкость упругими деформациями поверхности. Кроме того, будем считать, что на бесконечности удовлетворяется граничное условие

$$V = V_\infty \sigma(t), \quad V_\infty = \text{const} \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (1.17)$$

Допущение (1.16) позволяет выразить решение поставленной задачи через нагрузку на абсолютно твердое тело  $p_{ij}^*$ , которое, в частности, следуя [5] имеет значение

$$p_{11}^{*L}|_{r=1} = s \frac{k_1}{Re} [4A - 2(\alpha K_0(\alpha) + (\alpha^2 + 4)K_1(\alpha))C] \sin \theta \quad (1.18)$$

$$p_{12}^{*L}|_{r=1} = sk_1 \left[ \left( s + \frac{4}{Re} \right) A - \frac{2}{Re} (2K_1(\alpha) + \alpha K_0(\alpha))C \right] \cos \theta$$

$$A = \frac{V_\infty}{s^2} \left( 1 + \frac{2}{\alpha} \frac{K_1(\alpha)}{K_0(\alpha)} \right), \quad C = \frac{V_\infty}{s^2} \frac{2}{\alpha K_0(\alpha)}$$

где  $L$  – индекс величины в пространстве изображений,  $s$  – параметр преобразования Лапласа.

Найдем нагрузку на оболочку, обусловленную упругими деформациями. Переходя к безразмерным параметрам и переводя задачу в область изображений для потенциалов  $\psi$  и  $\chi_1$ , получим уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi^L = 0 \quad (1.19)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - s \operatorname{Re} \right) \chi_1^L = 0$$

где  $\operatorname{Re}$  – число Рейнольдса.

Общее решение уравнений (1.19) имеет вид [6]

$$\psi^L = \sum_{m=1}^{\infty} [r^{-m} (A_m \cos m\theta + \bar{A}_m \sin m\theta) + r^m (B_m \cos m\theta + \bar{B}_m \sin m\theta)] \quad (1.20)$$

$$\chi_1^L = \sum_{m=1}^{\infty} [K_m(\alpha r) (\bar{C}_m \cos m\theta + C_m \sin m\theta) + I_m(\alpha r) (\bar{D}_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta)],$$

$$\alpha = \sqrt{s \operatorname{Re}}$$

где  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  – функции Бесселя.

Из условий симметрии и на бесконечности будем иметь

$$\bar{A}_m = \bar{B}_m = \bar{C}_m = \bar{D}_m = B_m = D_m = 0 \quad (1.21)$$

Параметры поля скоростей жидкости и давления, возникшие вследствии упругих деформаций оболочки, при этом запишутся в виде

$$\begin{aligned} V_r &= s \left[ -mr^{-m-1} A_m + \frac{m}{r} C_m K_m(\alpha r) \right] \cos m\theta \\ V_\theta &= s [-mr^{-m-1} A_m - \alpha C_m K'_m(\alpha r)] \sin m\theta \\ p^L &= -s^2 A_m r^{-m} \cos m\theta \end{aligned} \quad (1.22)$$

Соотношения (1.22) дают возможность найти значение тензора напряжений вязкой жидкости (1.6) на поверхности, т.е. дополнительную нагрузку на оболочку, определенную полем скоростей от деформации поверхности

$$\begin{aligned} p_{11}^L|_{r=1} &= a_1 A_m + a_2 C_m, \quad p_{12}^L|_{r=1} = b_1 A_m + b_2 C_m \\ a_1 &= s \left[ s + \frac{2}{\text{Re}} m(m+1) \right], \\ a_2 &= 2m \frac{s}{\text{Re}} [\alpha K'_m(\alpha) - K_m(\alpha)] \\ b_1 &= \frac{2s}{\text{Re}} m(m+1), \quad b_2 = \frac{s}{\text{Re}} [m^2 K_m(\alpha) - \alpha K'_m(\alpha) + \alpha^2 K''_m(\alpha)] \end{aligned} \quad (1.23)$$

Значения (1.23) дают возможность найти решение в области изображений для перемещений в виде

$$u_r^L = (h_1 + a_1^* A_m + a_2^* C_m) \cos m\theta \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} u_\theta^L &= (h_2 + b_1^* A_m + b_2^* C_m) \sin m\theta \\ a_1^* &= \frac{a_1 c_3 - b_1 c_2}{\Delta_1} k_1, \quad b_2^* = \frac{b_2 c_1 - a_2 c_2}{\Delta_1} k_1 \\ a_2^* &= \frac{a_2 c_3 - b_2 c_2}{\Delta_1} k_1, \quad b_1^* = \frac{b_1 c_1 - a_1 c_2}{\Delta_1} k_1 \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = c_1 c_3 - c_2^2, \quad c_1 = 1 + U^2 s^2 + k_2 m^4, \quad c_2 = m$$

$$c_3 = -U^2 s^2 - m^2, \quad U = \frac{V_\infty}{c_0}, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho_1 (1 - v_1^2)}$$

$$k_1 = \frac{\rho R}{\rho_1 h} U^2, \quad k_2 = \frac{h^2}{12 R^2}$$

$$h_1 = -\frac{2k_1}{\pi} \int_0^\pi p_{11}^{*L} \cos m\theta d\theta, \quad h_2 = \frac{2k_1}{\pi} \int_0^\pi p_{12}^{*L} \sin m\theta d\theta$$

На поверхности для параметров скорости жидкости (1.22) и перемещений оболочки (1.24) должно выполняться условие (1.3), которое в области изображений имеет вид

$$V_r^L = s u_u^L, \quad V_\theta^L = s u_\theta^L \quad \text{при } r = 1 \quad (1.25)$$

Условие (1.25) позволяет найти значения коэффициентов  $A_m$  и  $C_m$  из системы

$$-mA_m + mC_m K_m(\alpha) = h_1 + a_1^* A_m + a_2^* C_m \quad (1.26)$$

$$-mA_m - \alpha C_m K'_m(\alpha) = h_2 + b_1^* A_m + b_2^* C_m$$

Откуда получим

$$A_m = \frac{n_{22}h_1 - n_{12}h_2}{\Delta_0}, \quad B_m = \frac{n_{11}h_2 - n_{21}h_1}{\Delta_0}$$

$$\Delta_0 = n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12}, \quad n_{11} = -m - a_1^*$$

$$n_{12} = mK_m(\alpha) - a_2^*, \quad n_{21} = -m - b_1^*, \quad n_{22} = -\alpha K'_m(\alpha) - b_2^*$$

2. При переходе от изображения к оригиналу в полученных решениях использовалась интерполяционная формула

$$f(t) = \frac{2}{\pi} e^{\beta t} \int_0^\infty \operatorname{Re}[f^L(s)] \cos qt \, dq \quad (2.1)$$

где постоянная  $\beta$  положительна и больше, чем действительные части особенностей функции  $f^L(s)$ .

Формула (2.1) позволяет с большой точностью находить оригинал функции для различных значений времени, если известна действительная часть  $\operatorname{Re}[f^L(s)]$ . Так как в полученных решениях трудно выделить действительную часть, то выражения полученных функций заменяются приближенными аналитическими выражениями, действительная часть которых определяется.

При выборе приближенной зависимости  $f^L(s)$  использовался метод асимптотически эквивалентных функций [7] с выполнением предельных теорем.

В функцию  $f^L(s)$  вводились свободные параметры, с помощью которых осуществлялось наилучшее ее приближение к точному решению при  $s = x$  (на вещественной оси)

$$f_*^L(s) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_1 + p_2 x + \dots + p_{kp} x^{kp-1}}{q_1 + q_2 x + \dots + q_{kq} x^{kq-1}} \quad (2.2)$$

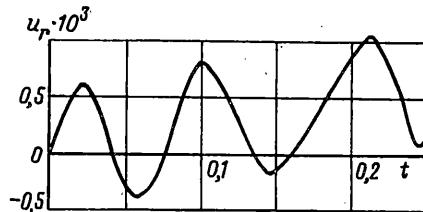
Здесь коэффициенты  $p_{kp}$  и  $q_{kq}$  удовлетворяют условию

$$f = \sum_{k=1}^n \omega_k \left[ f_k - \frac{P(x_k)}{Q(x_k)} \right]^2 = \min \quad (2.3)$$

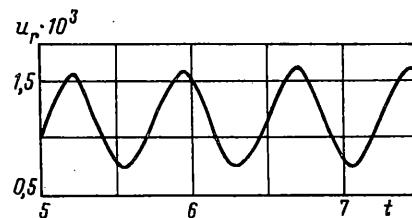
где  $\omega_k > 0$  – весовая функция.

В качестве фундаментальной функции в (2.3) использовался многочлен Чебышева.

Переход от изображений к оригиналам осуществлялся численно при следующих значениях безразмерных параметров:  $k_1 = 0,003$ ,  $k_2 = 0,33 \cdot 10^4$ ,  $U = 0,2191$ ,  $\operatorname{Re} = 2340$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1, 2 показаны прогибы в лобовой части оболочки ( $\theta = 0$ ) для различных моментов времени. Из примера видно, что для больших значений времени процесс приближается к стационарному.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stokes C. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Camb. Trans. 1851. V. 9. № 8. Р. 1–3.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 263 с.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. Киев.: Наук. думка, 1989. 202 с.
5. Слезкин А.Н. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТГЛ, 1955. 519 с.
6. Кузнецов В.Н. Нестационарное взаимодействие системы упругих цилиндрических оболочек с вязкой сжимаемой жидкостью // Прикл. механика. 1988. Т. 24. Вып. 1. С. 30–37.
7. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.

Москва, Днепропетровск, Киев

Поступила в редакцию  
1.II.1994