

УДК 533.6.013.42

© 1996 г. Ю.А. ДУБОВСКИХ, В.Е. ХРОМАТОВ, В.П. ЧИРКОВ

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ  
И ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ УПРУГИХ  
ПАНЕЛЕЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ**

Дано применение асимптотического метода В.В. Болотина к задачам флаттера прямоугольных в плане упругих пластин, взаимодействующих со сверхзвуковым потоком газа. В качестве порождающего решения взяты решения типа бегущих волн, а для удовлетворения граничным условиям использованы решения типа динамического краевого эффекта. Изучены условия невырождения краевых эффектов. Исследовано влияние начального натяжения в срединной плоскости, способов закрепления пластины, параметров демпфирования на критические скорости флаттера, формы и частоты колебаний на границе области флаттера. Построенные асимптотические приближения используются для вычисления амплитуд установившегося флаттера вблизи границы устойчивости.

1. Наряду с численным методом исследования динамического поведения конструкций продолжают развиваться и аналитические методы, основанные на построении решений дифференциальных уравнений. Весьма эффективным для исследования колебаний и устойчивости упругих систем является асимптотический метод В.В. Болотина [1–4]. В основе метода, называемого в дальнейшем согласно [4] АМБ, лежит представление собственных функций в виде суммы решения для внутренней области, не зависящего от граничных условий, и корректирующего решения типа динамического краевого эффекта. Это позволяет получить асимптотические решения для широкого класса упругих систем.

Применение АМБ к решению задач о собственных колебаниях упругих тел и сложных строительных конструкций посвящены работы [4–20]. В [5] решена задача о высокочастотных колебаниях упругого параллелепипеда, построены условия стыковки решений и определены три серии частот собственных колебаний. В [6] рассмотрены задачи о собственных колебаниях прямоугольных пластин с различными краевыми условиями и приведены результаты расчета собственных частот. В [7] АМБ применен для расчета собственных частот и форм колебаний многопролетных пластин и показана эффективность применения АМБ для расчета сложных строительных конструкций. В частности в [8] решена задача о собственных колебаниях коробчатой конструкции, составленной из упруго соединенных пластин. Дальнейшее применение АМБ было дано уже к расчету ортотропных пластин [9], к задачам о колебаниях и устойчивости предварительно напряженных пластин [10].

Модификация АМБ [11] основанная на отыскании уточненных решений во внутренней области напряженных пластин, не привела к значительным изменениям в результатах расчета частот. В [12] проведен расчет колебаний разветвленной пространственной системы, составленной из ортотропных пластин. Получены уравнения стыковки для коробчатой системы и определены собственные частоты колебаний. В [13, 14] произведен расчет собственных частот колебаний защемленных изотропных и ортотропных пластин по формуле Рэлея – Ритца. В качестве базисных функций использовались асимптотические соотношения, удовлетворяющие условиям на всех границах. Здесь также отмечается согласие результатов с расчетами по АМБ. Дальнейшее применение АМБ к расчету пластин и обзор зарубежных исследований в

этой области содержится в [15–17]. В [18] сочетание АМБ с методом Рэлея позволило получить соотношения для частот и критических усилий сжатой ортотропной прямоугольной пластины. Применение АМБ к задачам колебаний оболочек дано в [19–20]. Установлены границы области невырождения динамических краевых эффектов в цилиндрических и пологих ортотропных оболочках, границы распределения и точки сгущения собственных частот колебаний.

На основе асимптотического метода в 1963 г. В.В. Болотиным была решена задача о плотности распределения собственных частот колебаний оболочек [21] и установлены области сгущения собственных частот колебаний оболочек. Для оболочек с переменной метрикой асимптотический метод был применен в работах [22, 23], где исследованы границы распределения частот колебаний оболочек вращения. В [22] выведены формулы для асимптотической плотности собственных частот колебаний круговой конической оболочки и, как частный случай, получаемая из них формула для плотности частот цилиндрической оболочки, совпадающая с [21]. В [23] выведены формулы для плотности частот колебаний оболочек положительной и отрицательной гауссовой кривизны.

Исследование распределения собственных частот колебаний ортотропных оболочек проведено в [19, 24, 25]. В [19, 24] получены асимптотические формулы для плотности частот колебаний цилиндрических оболочек, изучен вклад осесимметрических форм в спектре частот колебаний. В [25] в конечном виде получены формулы для асимптотической плотности частот колебаний пологих оболочек, установлены границы распределения частот ортотропных сферических оболочек и оболочек положительной и отрицательной гауссовой кривизны. Влияние безмоментных усилий в срединной поверхности цилиндрических оболочек на распределение собственных частот исследовано в [26]. Установлена возможность вырождения точек сгущения собственных частот. В [27] на основе АМБ было исследовано распределение собственных частот колебаний пологих трехслойных оболочек, обнаружены точки сгущения собственных частот, смещение областей сгущения при наличии сжимающих усилий в срединной поверхности оболочек. Интерес исследователей к проблеме изучения распределения собственных частот колебаний на основе АМБ не ослабевает и в настоящее время. В [28] с использованием подхода, развитого в [3, 21], исследованы формы колебаний в области сгущения собственных частот и вне ее.

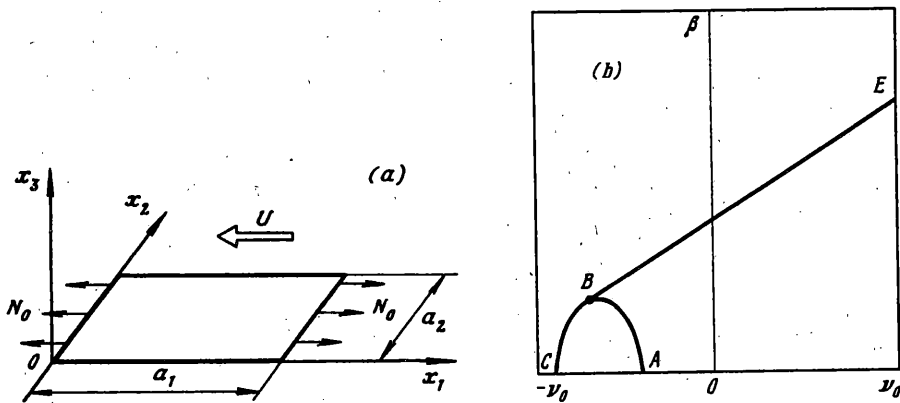
Асимптотические оценки для частот и форм собственных колебаний упругих систем, информация об их плотности распределения позволяют построить приближенные интегральные оценки для статистических характеристик напряженно-деформированного состояния оболочек, испытывающих случайные воздействия [3, 29, 30]. Метод интегральных оценок [29, 30] основан на замене суммы вкладов от каждой формы колебаний интегралом по некоторой области в пространстве волновых чисел. В отличие от прямого суммирования по формам собственных колебаний, интегральный метод позволяет получить результаты в замкнутой форме и дает возможность изучить влияние различных факторов на поведение упругих тел. В развитие [29, 30] в [31] проведен расчет вероятностных характеристик перемещений, ускорений, напряжений пологих оболочек под действием широкополосной случайной нагрузки. Для частот и форм колебаний приняты асимптотические соотношения [1, 2], спектральная плотность перемещений и ускорений точек срединной поверхности оболочки оказалась пропорциональной плотности частот колебаний [21]. Изучение плотности частот колебаний оболочек необходимо не только для предсказания поведения оболочек в различных частотных диапазонах возбуждения, но и для обоснования представления распределенных систем системами с конечным числом степеней свободы. Так в [32] определены корреляционные функции и спектральные плотности перемещений, ускорений и напряжений в пологих оболочках, находящихся в поле случайных сил. Для искомым заданных функций взяты решения по АМБ. В рядах, входящих в разложения спектральных плотностей, удерживается число членов

ряда, определяемое плотностью распределения собственных частот колебаний оболочек.

Асимптотический метод был распространен на широкий класс других самосопряженных краевых задач на собственные значения. В [33] АМБ проведено определение нижнего критического давления для цилиндрической оболочки при различных условиях закрепления по торцам. Решение также строится из суммы внутреннего решения, которое быстро затухает от границы внутрь области, и решения типа краевого эффекта. Проведено исследование существования краевого эффекта в задачах устойчивости и указаны границы его существования. В [34] исследована зависимость параметра критической нагрузки от внешних возмущений и от условий закрепления торцов конических оболочек при гидростатическом нагружении. В [35], выполненной в развитие [21], исследована плотность распределения собственных значений в задачах устойчивости пологих оболочек. В конечном виде приведены формулы для плотности собственных значений и установлены асимптотические точки сгущения. У продольно сжатой цилиндрической оболочки и сферической оболочки при гидростатическом давлении спектр собственных значений начинается с точки сгущения.

В задачах нелинейной динамики пластин и оболочек для исследования спектров колебаний традиционно применяются вариационные или численные методы. При этом определение высших частот и форм колебаний оказывается весьма трудоемким и с большими затратами машинного времени. Применение АМБ к задачам нелинейной динамики позволяет решить эти проблемы. В [4, 36, 38] решены задачи о нелинейных колебаниях пластин. В [36, 37] получены конечные соотношения для высших частот и форм колебаний прямоугольных пластин с широким классом граничных условий на основе приближенных уравнений колебаний типа Бергера. Установлено хорошее согласие результатов вычисления частот нелинейных колебаний пластин АМБ с МКЭ. В [38] исследованы нелинейные колебания прямоугольных пластин на основе полной системы уравнений типа Кармана и установлена область приближенных оценок [36]. Применение асимптотического метода к нелинейным задачам колебаний оболочек позволило выявить ряд интересных явлений [39–41]. В [39] исследована плотность распределения частот нелинейных колебаний пологих цилиндрических оболочек на основе полной системы уравнений Кармана. В [40] в конечном виде получены асимптотические соотношения для частот и плотности частот нелинейных колебаний пологих оболочек, установлены точки сгущения частот при нелинейных колебаниях оболочек. В [41] построены решения типа динамических краевых эффектов для сферических и цилиндрических оболочек, описываемых приближенными уравнениями типа Бергера.

Идеи, заложенные в асимптотическом методе, оказались плодотворными и для решения других задач механики. В [42] дано применение АМБ к задачам оптимизации колебаний пластин. В [43] получены конечные соотношения для частот колебаний пластин в магнитном поле при различных краевых условиях и исследовано влияние напряженности магнитного поля на собственные частоты. Задачи флаттера тонкостенных конструкций в сверхзвуковом потоке газа относятся к несамосопряженным краевым задачам и описываются сложными многомерными дифференциальными уравнениями в частных производных [44]. Параметрическое исследование задач флаттера является трудоемким, требует больших затрат машинного времени. АМБ дает возможность использовать преимущества аналитических методов с последующим численным анализом на ЭВМ. В [45] исследована устойчивость пластины в сверхзвуковом потоке газа. Получены уравнения стыковки, показана его счетная устойчивость, изучено влияние внешнего и внутреннего демпфирования. В [46] изучена устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки, обтекаемой потоком газа. Исследование схемы точного решения задачи приводит к рассмотрению определителя восьмого порядка с комплексными элементами, содержащего элементы с отрицательными и положительными действительными частями. При значительных удли-



Фиг. 1

нениях оболочки вычисление определителя становится неустойчивым процессом. Применение АМБ позволяет избежать этих проблем. В работе построены порождающие решения типа динамических краевых эффектов, получены асимптотические условия устойчивости по отношению к явлению типа флаттера. Исследована критическая скорость флаттера в зависимости от параметров оболочки. В [47] исследованы волновые движения и нелинейный флаттер пластин в потоке газа.

2. Рассмотрим прямоугольную в плане изотропную пластину толщиной  $h$  со сторонами  $a_1$  и  $a_2$ , обтекаемую сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью  $U$  (фиг. 1, а).

Уравнение линейных колебаний пластины в приближении поршневой теории [44] для аэродинамического давления возьмем в виде

$$D \left( 1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \Delta w + \rho_0 c_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} - U \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \epsilon \rho h \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

Здесь  $w(x_1, x_2, t)$  – функция прогиба,  $D$  – цилиндрическая жесткость,  $\rho_0, c_0$  – плотность и скорость звука в невозмущенном потоке газа,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\epsilon$  и  $\eta$  – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования,  $N_0$  – начальное растягивающее усилие в срединной плоскости пластины.

Вводя безразмерные параметры  $x'_1 = x_1/a_2, x'_2 = x_2/a_2, w' = w/h, t' = \omega_0 t, \omega_0^2 = D/\rho h a_2^4, \eta' = \omega_0 \eta, \epsilon_0 = \rho_0 c_0 \omega_0 a^4/2/D, \epsilon' = \epsilon/\omega_0, \beta = \rho_0 c_0 U a^3/2/D, \gamma = \epsilon' + \epsilon_0, \nu_0 = N_0 a^2/2/D$ , перепишем уравнение (2.1) в безразмерной форме

$$\left( 1 + \eta' \frac{\partial}{\partial t'} \right) \Delta \Delta w' - \beta \frac{\partial w'}{\partial x'_1} - \nu_0 \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2_1} + \gamma \frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{\partial^2 w'}{\partial t'^2} = 0 \quad (2.2)$$

Параметры  $\beta, \nu_0, \eta'$  и  $\gamma$  характеризуют соответственно скорость потока, начальное усилие в срединной поверхности, внутреннее, аэродинамическое и внешнее демпфирование. Здесь и в дальнейшем штрихи у безразмерных параметров опущены.

Границы области устойчивости в плоскости параметров  $\beta, \nu_0$  изображены на фиг. 1, в. Кривая  $ABC$  соответствует границе области дивергенции, прямая  $BE$  – границе области флаттера. Поведение пластины в области сжимающих усилий довольно подробно изучено в монографии В.В. Болотина [44]. Будем исследовать устойчивость плоской формы равновесия пластины в области растягивающих усилий, основываясь на применении АМБ.

Порождающее решение будем искать в комплексной форме в виде суперпозиции двух волн, распространяющихся в направлении потока

$$w_0(x_1, x_2, t) = \sin[k_2(x_2 - \xi_2)] \sum_{j=1}^2 C_j \exp[i(k_{1j}x_1 - \omega t)] \quad (2.3)$$

Это решение удовлетворяет уравнению (2.2), если волновые числа и частота связаны соотношением

$$(1 - i\eta\omega)(k_{1j}^2 + k_2^2)^2 + v_0 k_{1j}^2 - i\beta k_{1j} - i\gamma\omega - \omega^2 = 0 \quad (2.4)$$

В окрестности кромок  $x_1 = 0$  и  $x_1 = \lambda$ , где  $\lambda = a_1/a_2$ , решение ищется в виде

$$w(x_1, x_2, t) = W_1(x_1) \exp(-i\omega t) \sin[k_2(x_2 - \xi_2)] \quad (2.5)$$

Подстановка (2.5) в уравнение (2.2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции  $W_1(x_1)$ , решение которого  $W_1(x_1) = \exp(r x_1)$  удовлетворяет характеристическому уравнению

$$(1 - i\eta\omega)(r^2 - k_2^2)^2 - v_0 r^2 - \beta r - (i\gamma\omega + \omega^2) = 0 \quad (2.6)$$

Сравнение (2.4) и (2.6) показывает, что два корня  $r_1 = ik_{11}$  и  $r_2 = ik_{12}$  соответствуют порождающему решению (2.3). Два других корня определяют корректирующие решения у кромок. Эти корни располагаются в разных полуплоскостях. Корень, расположенный в левой полуплоскости, обозначим  $r_3$ , в правой  $-r_4$ .

Решение  $w(x_1|0, x_2, t)$ , описывающее динамический краевой эффект у задней по потоку кромки  $x_1 = 0$ , имеет вид (2.5) с функцией

$$W_1(x_1|0) = \sum_{j=1}^2 C_j \exp(ik_{1j}x_1) + C_3 \exp(r_3x_1)$$

Для жестко закрепленной кромки  $x_1 = 0$  удовлетворение граничным условиям дает

$$W_1(x_1|0) = C_1 \left[ \exp(r_1x_1) + \frac{r_1 - r_3}{r_3 - r_2} \exp(r_2x_1) + \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} \exp(r_3x_1) \right] \quad (2.7)$$

Аналогично для шарнирно опертой кромки получим

$$W_1(x_1|0) = C_1 \left[ \exp(r_1x_1) + \frac{r_1^2 - r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \exp(r_2x_1) + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_3^2 - r_2^2} \exp(r_3x_1) \right] \quad (2.8)$$

Решение  $w(x_1|\lambda, x_2, t)$  в окрестности передней по потоку кромки  $x_1 = \lambda$  будем искать в виде (2.5) с функцией

$$W_1(x_1|\lambda) = \sum_{j=1}^2 C_j \exp(ik_{1j}x_1) + C_4 \exp[r_4(x_1 - \lambda)] \quad (2.9)$$

Удовлетворяя граничным условиям на кромке  $x_1 = \lambda$ , выразим константы  $C_2$  и  $C_4$  через  $C_1$ . Уравнение стыковки, получаемое в результате приравнивания решений во внутренней области с точностью до динамических краевых эффектов, дает замыкающее соотношение для нахождения волновых чисел и критических параметров. Однако для не очень удлиненных по потоку пластин ( $\lambda \leq 2$ ) действительная часть корня  $r_3$ , соответствующего динамическому краевому эффекту у задней кромки, может оказаться близкой к действительной части корней  $r_1 = ik_{11}$  и  $r_2 = ik_{12}$ , соответствующих порождающему решению. В этом случае погрешность стыковки оказывается значительной [45]. Для того, чтобы этого избежать, вместо (2.9) возьмем решение (2.7),

подкорректированное в окрестности передней кромки соответствующим динамическим краевым эффектом

$$W_1(x_1|\lambda) = W(x_1|0) + C_4 \exp[r_4(x_1 - \lambda)] \quad (2.10)$$

Условие стыковки в данном случае заменяется условием существования нетривиального решения однородной системы уравнений относительно констант  $C_1$  и  $C_4$ , полученной в результате удовлетворения граничным условиям на передней кромке. Например, для пластины, жестко закрепленной по кромкам  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = \lambda$ , это условие имеет вид

$$\begin{aligned} & (r_3 - r_2)(r_4 - r_1) - (r_3 - r_1)(r_4 - r_2) \exp[(r_2 - r_1)\lambda] + \\ & + (r_4 - r_3)(r_2 - r_1) \exp[(r_3 - r_1)\lambda] = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Последнее слагаемое в (2.11) учитывает волну, отраженную от задней по потоку кромки. Для шарнирно опертых кромок вместо (2.11) получим

$$\begin{aligned} & (r_3^2 - r_2^2)(r_4^2 - r_1^2) - (r_3^2 - r_1^2)(r_4^2 - r_2^2) \exp[(r_2 - r_1)\lambda] + \\ & + (r_4^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_1^2) \exp[(r_3 - r_1)\lambda] = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решение в окрестности кромок пластины  $x_2 = 0$  и  $x_2 = 1$ , расположенных вдоль потока, ищем в виде  $w(x_1, x_2, t) = W_2(x_2) \exp[i(k_{1j}x_1 - \omega t)]$ . Подстановка этого решения в исходное уравнение (2.2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции  $W_2(x_2)$ , решению которого в форме  $W_2(x_2) = \exp(qx_2)$  соответствует характеристическое уравнение

$$(1 - i\eta\omega)(q^2 - k_{1j}^2)^2 + \nu_0 k_{1j}^2 - i\beta k_{1j} - (i\gamma\omega - \omega^2) = 0$$

Это уравнение имеет корни

$$q_{1,2} = \pm ik_2, q_{3j} = -(k_2^2 + 2k_{1j}^2)^{1/2}, q_{4j} = (k_2^2 + 2k_{1j}^2)^{1/2}$$

Чисто мнимые корни  $q_{1,2}$  соответствуют порождающему решению (2.3). Остальные корни, расположенные попарно в различных полуплоскостях комплексной плоскости, описывают динамические краевые эффекты у продольных кромок. Так как  $k_{1j}$  комплексные, то краевые эффекты будут осциллирующими.

В окрестности кромки  $x_2 = 0$  динамические краевые эффекты определяются корнями  $q_{3j}$ . Соответствующее решение имеет вид

$$w(x_1, x_2|0, t) = W_2(x_2|0) \sum_{j=1}^2 C_j \exp[i(k_{1j}x_1 - \omega t)] \quad (2.13)$$

$$W(x_2|0) = \sin[k_2(x_2 - \xi_2)] + \frac{1}{2} D_1 \sum_{j=1}^2 \exp(-\theta_{1j}x_2) \cos(\theta_{2j}x_2)$$

$$\theta_{1j} = |\operatorname{Re} q_{3j}|, \theta_{2j} = |\operatorname{Im} q_{3j}| \quad (j = 1, 2)$$

Из граничных условий на кромке  $x_2 = 0$  находим тангенс фазовой постоянной и константу  $D_1$ :

$$F_{21} \equiv \operatorname{tg}(k_2 \xi_2) = \frac{2k_2}{\theta_{11} + \theta_{12}}, D_1 = \frac{2k_2}{[(\theta_{11} + \theta_{12})^2 + 4k_2^2]^{1/2}}$$

Подобным образом строится решение  $w(x_1, x_2|1, t)$ , удовлетворяющее граничным

условиям на кромке  $x_2 = 1$  и стремящиеся к порождающему решению при удалении от кромки во внутрь области. Динамические краевые эффекты у этой кромки определяются корнями  $q_{4j}$ .

Решение для функции  $w(x_1, x_2|1, t)$  имеет вид, аналогичный (2.13), с функцией  $W_2(x_2|1)$ , равной

$$W_2(x_2|1) = \sin[k_2(x_2 - \xi_2)] + \\ + \frac{1}{2} D_2 \sum_{j=1}^2 \exp[\kappa_{1j}(x_2 - 1)] \cos[\kappa_{2j}(x_2 - 1)] \\ \kappa_{1j} = |\operatorname{Re} q_{4j}|, \quad \kappa_{2j} = |\operatorname{Im} q_{4j}| \quad (j = 1, 2)$$

Граничные условия на жестко закрепленной кромке  $x_2 = 1$  приводят к соотношениям

$$F_{22} = \operatorname{tg}[k_2(\xi_2 - 1)] = \frac{2k_2}{\kappa_{11} + \kappa_{12}}, \quad D_2 = -\frac{2k_2}{[(\kappa_{11} + \kappa_{12}^2) + 4k_2^2]^{1/2}}$$

Из условия стыковки в направлении оси  $x_2$  получим уравнение

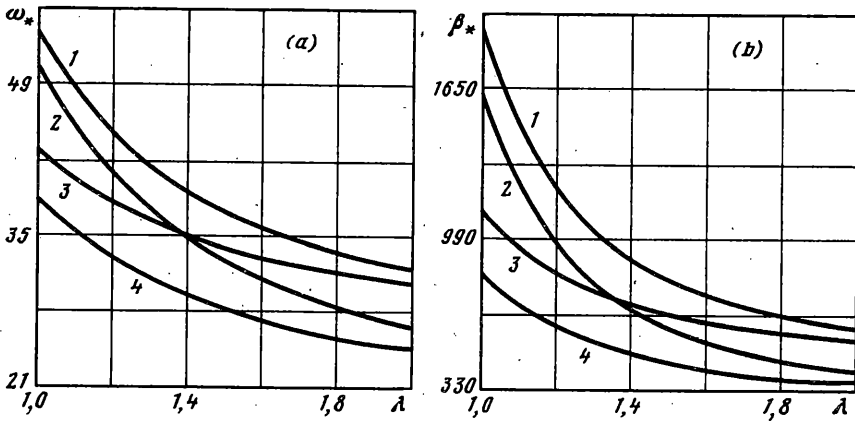
$$k_2 = \operatorname{arctg} F_{21} + \operatorname{arctg} F_{22} + m\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.14)$$

Для пластины, шарнирно опертой по продольным кромкам  $x_2 = 0$  и  $x_2 = 1$ , решение в направлении оси  $x_2$  совпадает с порождающим решением, при этом  $F_{12} = F_{22} = D_1 = D_2 = 0$ . Вместо уравнения (2.14) будем иметь  $k_2 = m\pi$ .

Критические параметры  $\beta_*$  и  $\omega_*$  находятся численно путем минимизации целевой функции, в качестве которой берется абсолютное значение левой части уравнения (2.11) или (2.12) в зависимости от способа закрепления поперечных кромок. На каждом шаге минимизации по методу Нелдера – Мида [47] решается система уравнений (2.6) и (2.14) для нахождения волновых чисел  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_2$  и связанных с ними характеристических показателей.

Вычисления показывают, что критическая частота флаттера  $\omega_*$  и критическая скорость потока  $\beta_*$  возрастают с ростом начального натяжения  $v_0$  и уменьшаются при увеличении отношения размеров пластины  $\lambda$ . Наблюдается также увеличение критических параметров флаттера при увеличении коэффициента  $\gamma$ , характеризующего внешнее и аэродинамическое демпфирование. Увеличение коэффициента внутреннего демпфирования  $\eta$  приводит к росту критического параметра скорости потока, в то время как характер влияния внутреннего демпфирования на критическую частоту флаттера зависит от соотношения размеров пластины и начального натяжения. При малых значениях начального натяжения увеличение внутреннего демпфирования приводит к росту критической частоты флаттера. В то же время существует пороговое значение начального натяжения, начиная с которого увеличение внутреннего демпфирования вызывает уменьшение критического параметра частоты, причем величина порогового значения уменьшается при увеличении отношения размеров пластины.

Устойчивость пластины в сверхзвуковом потоке газа существенным образом зависит от способа закрепления ее кромок, что проиллюстрировано на фиг. 2, а, в. Наиболее устойчивой к явлению типа флаттера является жестко закрепленная по всему контуру пластина (кривые 1 на фиг. 2), наименее устойчивой – пластина, все кромки которой шарнирно оперты (кривые 4). Кривые 2 соответствуют случаю жесткого закрепления поперечных кромок и шарнирному опиранию продольных, кривые 3 – альтернативному способу закрепления. При отношении размеров  $\lambda < 1,4$  значения критических параметров флаттера для второго типа закрепления кромок выше соответствующих значений для третьего типа закрепления. Дальнейшее



Фиг. 2

увеличение  $\lambda$  приводит к противоположному эффекту. Графики на фиг. 2 построены при значениях параметров  $v_0 = 50$ ;  $\eta = 0,05$ ;  $\gamma = 0,05$ . При других значениях этих параметров качественный характер расположения кривых устойчивости не меняется.

Формы флаттерных колебаний при критических значениях параметров скорости и частоты рассчитываются по формуле

$$w(x_1, x_2, \tau) = \text{Re}[W_1(x_1)\exp(-\omega_*\tau)]W_2(x_2)$$

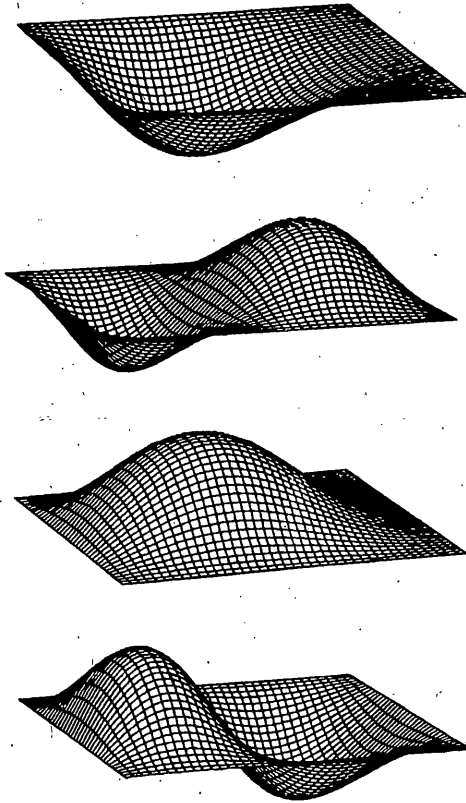
Функции  $W_1(x_1)$  и  $W_2(x_2)$  находятся суперпозицией порождающего решения и корректирующих решений в окрестности каждой из кромок. Анализ форм колебаний показывает, что аэроупругие колебания на границе устойчивости имеют характер бегущей волны. Это явление более отчетливо проявляется у удлиненных пластин, а также у пластин, имеющих шарнирно опертые кромки. С увеличением отношения размеров сторон  $\lambda$  длина волны уменьшается. Максимальное значение прогиба достигается в области, примыкающей к задней по потоку кромке. Характерные формы колебаний изображены на фиг. 3, где зафиксированы в пределах одного периода колебаний  $t_* = 2\pi/\omega_*$  последовательные состояния изогнутой срединной поверхности квадратной пластины, поперечные кромки которой шарнирно оперты, а продольные жестко закреплены. Параметры начального натяжения и демпфирования не оказывают существенного влияния на формы аэроупругих колебаний.

3. В линейной постановке можно найти критическую скорость сверхзвукового потока и критическую частоту, которые соответствуют потере устойчивости невозмущенной формы равновесия пластины по типу флаттера. При этом решение линейных уравнений возмущенного движения имеет колебательный характер с экспоненциально нарастающей во времени амплитудой. Однако на самом деле на границе устойчивости в закритической области резкого нарастания амплитуд не наблюдается. Это связано с проявлением фактора геометрической нелинейности: вследствие несближения закрепленных кромок возникают дополнительные растягивающие усилия в срединной поверхности пластины, которые ограничивают нарастание амплитуды и приводят к возникновению установившихся колебательных циклов [44].

Для оценки амплитуды и частоты предельных циклов применим АМБ в сочетании с методами исследования нелинейных колебаний. Уравнение нелинейных колебаний пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, можно получить из линейного уравнения (2.1), добавив в него слагаемые  $-N_1(w)\partial^2 w/\partial x^2_1$  и  $-N_2(w)\partial^2 w/\partial x^2_2$ , где дополнительные мембранные усилия в срединной поверхности, вызванные сопротивлением несближению противоположных кромок

$$N_j(W) = \frac{Eh}{2a_1a_2(1-\nu^2)} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2 dx_1 dx_2 \quad (j=1,2)$$





Фиг. 3

В безразмерной форме уравнение нелинейных колебаний принимает вид

$$\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta \Delta w - \beta \frac{\partial w}{\partial x_1} - (v_0 + v_1(w)) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - v_2(w) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \gamma \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Безразмерные растягивающие усилия вводятся как

$$v_j(w) = \frac{6}{\lambda} \iint_{00}^{\lambda_1} \left( \frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2 dx_1 dx_2 \quad (j = 1, 2)$$

Решение уравнения (3.1) для шарнирно опертой по продольным кромкам пластины будем искать в следующем виде:

$$w(x_1, x_2, t) = W(x_1, t) \sin(\pi x_2) \quad (3.2)$$

Решение  $W(x_1, t)$  в окрестности задней по потоку кромки будем строить в виде суперпозиции двух распространяющихся по потоку волн, экспоненциально модулированных по пространственной координате, и волны краевого эффекта, движущейся в противоположном направлении. При этом волновые числа и соответствующие им характеристические показатели берутся равными их значениям при критических параметрах флаттера, а амплитуда и частота предельных циклов вычисляются с учетом нелинейных факторов.

В области флаттера, достаточно близкой к границе устойчивости, решение для функции  $W(x_1, t)$  будем искать в действительной форме

$$W(x_1, t) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(t) \exp(r_{\alpha} x_1) \quad (\alpha = \pm 1, \pm 2, \pm 3) \quad (3.3)$$

где отрицательные индексы соответствуют комплексно сопряженным величинам, т.е.  $A_{-\alpha} = \bar{A}_\alpha$ ,  $r_{-\alpha} = \bar{r}_\alpha$  и т.д. Из граничных условий при  $x_1 = 0$  следует, что с точностью до невязки асимптотического метода все амплитуды  $A_\alpha$  можно выразить через  $A_1$  и  $A_{-1}$  следующим образом:  $A_\alpha = C_\alpha A_1^\alpha$ , где  $A_1^\alpha = A_1$  при  $\alpha > 0$  и  $A_1^\alpha = \bar{A}_1$  при  $\alpha < 0$ ,  $C_{-\alpha} = \bar{C}_\alpha$ . Константы  $C_\alpha$  определяются типом граничных условий. Для жестко закрепленной кромки  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = -(r_3 - r_1)/(r_3 - r_2)$ ,  $C_3 = (r_2 - r_1)/(r_3 - r_2)$ . Для шарнирно опертой кромки  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = -(r_3^2 - r_1^2)/(r_3^2 - r_2^2)$ ,  $C_3 = (r_2^2 - r_1^2)/(r_3^2 - r_2^2)$ .

Подстановка (3.2) и (3.3) в уравнение (3.1) приводит к нелинейному дифференциальному уравнению относительно комплексной амплитуды  $A_1(t)$ :

$$\left[ (r_1^2 - \pi^2)^2 - \nu_0 r_1^2 - \beta r_1 - \frac{3}{\lambda} \sum_{\alpha} \sum_{\delta} (r_1^2 r_\alpha r_\delta - \pi^4) A_1^\alpha A_1^\delta S_{\alpha\delta} \right] A_1 + \left[ \gamma + \eta (r_1^2 - \pi^2)^2 \right] \frac{dA_1}{dt} + \frac{dA_1^2}{dt^2} = 0 \quad (\alpha, \delta = \pm 1, \pm 2, \pm 3) \quad (3.4)$$

$$S_{\alpha\delta} = \frac{C_\alpha C_\delta}{r_\alpha + r_\delta} \left[ \exp[(r_\alpha + r_\delta)\lambda] - 1 \right] \quad (\alpha, \delta = \pm 1, \pm 2, \pm 3)$$

Для отыскания периодических решений уравнения (3.4) применим метод Пуанкаре – Ляпунова – Линдстедта. Обозначим коэффициент при нелинейных слагаемых в (3.4) через  $\mu = 1/\lambda$ . При  $\mu = 0$  приходим к линейному уравнению, которое при  $\beta = \beta_*$  имеет периодическое решение  $\exp(-i\omega_* t)$ . Здесь  $\beta_*$ ,  $\omega_*$  – критическая скорость и критическая частота флаттера, найденные из решения линейной задачи.

Решение уравнения (3.4) будем искать в виде ряда по степеням параметра  $\mu$ :  $A_1(\tau) = A_{10}(\tau) + \mu A_{11}(\tau) + \dots$ . Полагая  $\beta = \beta_* + \mu \beta_1$ ,  $\omega_* t = \tau(1 + \mu p_1 + \mu^2 p_2 + \dots)$ , вместо уравнения (3.4) после приравнивания выражений при одинаковых степенях параметра  $\mu$  получим систему дифференциальных уравнений относительно функций  $A_{1j}(\tau)$ . Первые два уравнения системы имеют вид

$$L A_{10} = 0, \quad L A_{11} = L_1 A_{10} \quad (3.5)$$

Оператор  $L$  соответствует линейным слагаемым в уравнении (3.4):

$$L = (r_1^2 - \pi^2)^2 - \nu_0 r_1^2 - \beta_* r_1 + \omega_* \left[ \gamma + \eta (r_1^2 - \pi^2)^2 \right] \frac{d}{d\tau} + \omega_*^2 \frac{d^2}{d\tau^2}$$

В правой части уравнений (3.5) содержится оператор  $L_1$ , вводимый следующим образом

$$L_1 A_{10} = \left[ \beta_1 r_1 - 3 \sum_{\alpha} \sum_{\delta} (r_1^2 r_\alpha r_\delta - \pi^4) A_{10}^\alpha A_{10}^\delta S_{\alpha\delta} - 2 p_1 (r_1^2 - \pi^2) \right]^2 + + 2 p_1 (\nu_0 r_1^2 - \beta_* r_1) A_{10} - p_1 \omega_* \left[ \gamma + \eta (r_1^2 - \pi^2)^2 \right] \frac{dA_{10}}{d\tau}$$

Первое из уравнений (3.5) имеет периодическое решение с амплитудой:  $a_0$ :  $A_{10}(\tau) = a_0 \exp(-i\tau)$ . Условие существования периодического решения второго уравнения имеет вид

$$\int_0^{2\pi} [L_1 A_{10}(\tau)] \exp(i\tau) d\tau = 0 \quad (3.6)$$

Это уравнение служит для определения амплитуды  $a_0$  и поправки к частоте  $p_1$ .

Учитывая, что  $A_{10}^a = A_{10}$  при  $\alpha > 0$  и  $A_{10}^a = \bar{A}_{10}$  при  $\alpha < 0$ , уравнение (3.6) после вычисления интегралов приводится к виду

$$6a_0^2(b_R + ib_I) - p_1(c_R + ic_I) + \beta_1 r_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$b_R + ib_I = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\delta=-3}^{-1} (r_1^2 r_{\alpha} r_{\delta} - \pi^2) S_{\alpha\delta}$$

$$c_R + ic_I = 2\omega_*^2 + i\omega_* \left[ \gamma + \eta (r_1^2 - \pi^2)^2 \right]$$

Уравнение (3.7) с комплексными коэффициентами эквивалентно системе двух вещественных уравнений относительно амплитуды нелинейных колебаний пластины и поправки к частоте. Эта система уравнений с учетом обозначения  $r_1 = r_R + r_I$  имеет решение

$$a_0^2 = \frac{\beta_1 (r_I c_R - r_R c_I)}{6 (c_I b_R - c_R b_I)}, \quad p_1 = \beta_1 \frac{r_I b_R - r_R b_I}{c_I b_R - c_R b_I} \quad (3.8)$$

Если знаменатель в (3.8) не равен нулю, то существует предельный цикл с амплитудой  $a_0$  и частотой

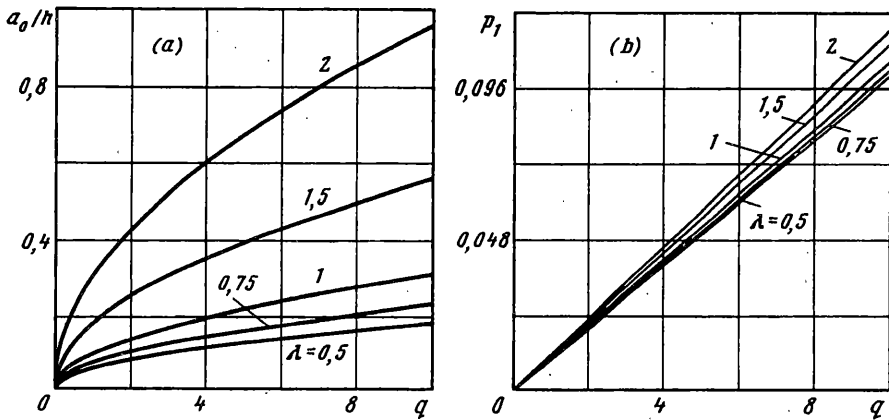
$$\omega = \omega_* - \frac{\beta_1 (r_I b_R - r_R b_I)}{\lambda (c_I b_R - c_R b_I)} \quad (3.9)$$

Параметр  $\beta_1 = (\beta - \beta_*)\lambda$  в формулах (3.7)–(3.9) характеризует степень продвижения в глубь области неустойчивости (см. фиг. 1, в). Из формул (3.8) следует, что при удалении от границы области устойчивости амплитуда и поправка к частоте возрастают.

Численные расчеты показывают, что с увеличением начального натяжения амплитуда предельного цикла и поправка к частоте возрастают с увеличением параметра  $\beta_1$  более интенсивно, причем влияние начального натяжения на амплитуду более существенное, чем на поправку к частоте. Внешнее демпфирование, характеризуемое параметром  $\gamma$ , оказывает малое влияние, в то время как влияние внутреннего демпфирования более существенно. Увеличение параметра  $\eta$  приводит к снижению амплитуды  $a_0$ . Влияние внутреннего демпфирования на поправку к частоте  $p_1$  аналогично влиянию на критическое значение частоты  $\omega_*$ . Это влияние зависит от соотношения размеров пластины и начального натяжения. Для укороченных по потоку пластин увеличение внутреннего демпфирования приводит к уменьшению  $p_1$ . Для удлиненных пластин при малых величинах начального натяжения с увеличением  $\eta$  поправка к частоте  $p_1$  уменьшается, а при больших значениях  $v_0$  — увеличивается.

Влияние отношения размеров пластины проиллюстрировано на фиг. 4, а, в, где приведены зависимости безразмерной амплитуды предельного цикла и поправки к частоте от относительного превышения критической скорости потока  $q = 100 \beta_1 / \beta_*$  при различных значениях параметра  $\lambda$ . Графики построены для случая жесткого закрепления поперечных кромок при тех же значениях параметров  $v_0$ ,  $\gamma$  и  $\eta$ , что и на фиг. 2 и 3. С увеличением протяженности пластины вдоль потока возрастает как амплитуда предельного цикла, так и поправка к частоте.

Результаты расчетов показывают, что в закритической области имеет место "мягкое" возбуждение флаттера [44] с медленным нарастанием амплитуд колебаний. Формы закритических колебаний, полученные в результате численного интегрирования уравнения (3.1) и нормировки по отношению к максимальным амплитудам колебаний, совпадают с соответствующими формами колебаний на границе устойчивости (см. фиг. 3).



Фиг. 4

Данная работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 94-01-00162).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 831–842.
2. Болотин В.В. Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях для прямоугольных областей // Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 60–72.
3. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
4. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
5. Болотин В.В. О собственных колебаниях прямоугольного упругого параллелепипеда // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 155–158.
6. Кудрявцев Е.П. Применение асимптотического метода для исследования собственных колебаний прямоугольных пластин // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1964. Вып. 10. С. 352–362.
7. Москаленко В.Н., Чен-Де-Лин. О собственных колебаниях многопролетных неразрезных пластинок // Прикл. механика. 1965. Т. 1. Вып. 3. С. 59–67.
8. Dickinson S.M., Warburton G.B. Natural frequencies of plate systems using the edge effect method // J. Mech. Eng. Sci. 1967. V. 9. No. 4. P. 318–324.
9. King W.W., Lin C.C. Application of Bolotin's method to vibrations of plates // AIAA J. 1974. V. 12. No. 3. P. 91–103.
10. Dickinson S.M. Bolotin's method applied to the buckling and lateral vibration of stressed plates // AIAA J. 1975. V. 13. No. 1. P. 109–110.
11. Dickinson S.M. Modified Bolotin's method applied to buckling and vibration of stressed plates // AIAA J. 1975. V. 13. No. 12. P. 1672–1673.
12. Ueng C.E.S., Nickels R.C. Dynamic response of a structural panel by Bolotin's method // Int. J. Solids and Struct. 1978. V. 14. No. 7. P. 571–578.
13. Vijayakumar K., Ramaiah G.K. Use of asymptotic solutions from a modified Bolotin method for obtaining natural frequencies of clamped rectangular orthotropic plates // J. Sound and Vibr. 1978. V. 59. No. 3. P. 335–347.
14. Vijayakumar K., Ramaiah G.K. Analysis of vibration of clamped square plates by the Rayleigh-Ritz method with asymptotic solution from a modified Bolotin method // J. Sound and Vibr. 1978. V. 56. No. 1. P. 127–135.
15. Emmerling F.A. Ermittlung von Eigenkreisfrequenzen schwingender Rechteckplatten mit Hilfe der asymptotischen Methode von Bolotin // Stahlbau. 1979. V. 48. No. 11. S. 327–334.
16. Elishakoff I. Bolotin's dynamic edge-effect method // Shock and Vibr. Digest. 1976. V. 8. No. 1. P. 95–104.
17. Elishakoff I., Sternberg A., Tom J. van Baten. Vibrations of multispan stiffened plates via modified Bolotin method // Recent Advances in Struct. Dynamics. 1980. V. 1. P. 36–50.
18. Крижевский Г.А. Применение асимптотического метода к исследованию колебаний и устойчивости ортотропных прямоугольных пластин // Прикл. механика. 1989. Т. 25. Вып. 8. С. 90–93.
19. Жинжер Н.И., Хроматов В.Е. Применение асимптотического метода к исследованию спектров колебаний ортотропных круговых цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 6. С. 95–101.

20. Жинжер Н.И. Динамические краевые эффекты в ортотропных упругих оболочках // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 752–755.
21. Болотин В.В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 362–369.
22. Москаленко В.Н. О спектрах частот собственных колебаний тонких упругих оболочек вращения // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 301–305.
23. Товстик П.Е. О плотности частот колебаний тонких упругих оболочек вращения // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 291–301.
24. Жинжер Н.И., Хроматов В.Е. Плотность частот свободных колебаний ортотропных круговых цилиндрических оболочек // Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973. С. 464–468.
25. Хроматов В.Е. Плотность собственных частот тонких пологих ортотропных оболочек // Прикл. механика. 1977. Т. 13. Вып. 7. С. 3–41.
26. Хроматов В.Е. Свойства спектров тонких круговых цилиндрических оболочек, колеблющихся в окрестности безмоментного напряженного состояния // Изв. АН СССР. ММТ. 1972. № 2. С. 103–108.
27. Хроматов В.Е. Свойства спектров собственных колебаний пологих трехслойных оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 2. С. 130–137.
28. Langley R.S. The modal density and mode count of thin cylinders and curved panels // J. Sound and Vibr. 1994. V. 169. No. 1. P. 43–53.
29. Болотин В.В. Об упругих колебаниях, возбуждаемых силами с широким спектром // Изв. ВУЗов. Машиностроение. 1963. № 4. С. 14–31.
30. Bolotin V.V. Broadband random vibrations of elastic systems // Int. J. Solid Struct. 1966. V. 2. P. 105–124.
31. Пальмов В.А. Тонкие оболочки под действием широкополосной случайной нагрузки // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 763–768.
32. Хроматов В.Е. Широкополосные случайные колебания тонких пологих оболочек и их связь с задачами о распределении собственных частот / Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 2. Тбилиси: Мецниереба, 1975. С. 392–399.
33. Корнев В.М. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним поперечным давлением, с учетом краевого эффекта // Инж. ж. МТТ. 1967. № 3. С. 73–78.
34. Корнев В.М. Определение критических нагрузок и форм потери устойчивости упругих оболочек вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 62–66.
35. Бендич Н.Н., Корнев В.М. О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 2. С. 364–368.
36. Жинжер Н.И., Хроматов В.Е. Асимптотический метод в задачах исследования нелинейных колебаний прямоугольных слабоортотропных пластин // Прикл. механика. 1984. Т. 20. Вып. 8. С. 73–78.
37. Андрианов И.В., Крижевский Г.А. Исследование собственных колебаний круговых и секториальных пластин с учетом геометрической нелинейности // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. С. 149–154.
38. Денисов В.Н., Жинжер Н.И. Асимптотический метод в задаче о нелинейных колебаниях изотропных прямоугольных пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 152–158.
39. Жинжер Н.И., Денисов В.Н. Асимптотический метод в задаче о нелинейных колебаниях оболочек // Проблемы прочности. 1983. № 9. С. 27–30.
40. Жинжер Н.И., Хроматов В.Е. Применение асимптотического метода к исследованию колебаний пологих оболочек при конечных амплитудах // Прикл. механика. 1990. Т. 26. Вып. 11. С. 93–99.
41. Andrianov I. V., Kholod E. G. Non-linear free vibration of shallow cylindrical shell by Bolotin's asymptotic method // J. Sound and Vibr. 1994. V. 165. № 1. P. 9–17.
42. Андрианов И.В., Искра В.С. Применение асимптотического метода В.В. Болотина в задачах оптимального управления колебаниями // Проблемы машиностроения. 1991. № 36. С. 79–82.
43. Багдасарян Г.Е. Применение асимптотического метода В.В. Болотина для исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин // Проблемы машиностроения. 1986. № 25. С. 63–68.
44. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
45. Жинжер Н.И. Динамические краевые эффекты при аэроупругих колебаниях пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 175–180.
46. Жинжер Н.И., Кадарметов И.М. Применение асимптотического метода к задаче о флаттере ортотропной цилиндрической оболочки // Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. № 2. С. 31–39.
47. Bolotin V.V., Dubovskikh Yu.A., Zhinzher N.I. Wave motion of elongated elastic bodies subjected to nonlinear flutter // Nonlinear Waves in Active Media. / Ed. J. Engelbrecht. Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 84–91.