МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1996

УДК 539.375

© 1996 г. Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН, М.Б. КОНОВАЛОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ-РАССЛОЕНИИ В ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ

В данной работе рассматривается задача статического деформирования двухслойной пластины с плоской трещиной-расслоением произвольной в плане формы. Исходная постановка данной задачи формулируется в рамках линейной пространственной теории упругости. В настоящей работе получено интегродифференциальное уравнение, связывающее нагрузку и перемещение поверхности слоя. С использованием этого уравнения, описывается раскрытие трещины-расслоения в двухслойной пластине. В предположении малости параметра, равного отношению толщины пластины к характерному размеру трещины на основе асимптотического разложения формулируется внутренняя и внешняя задачи. Внутренняя задача – плоская задача о полубесконечной трещине-расслоении в двухслойной полосе, внешняя – задача о двух пластинах с различными упругими свойствами в условиях изгиба и плосконапряженного состояния, скрепленных по контуру трещины со специфическими условиями закрепления, определяемыми асимптотикой решения внутренней задачи на бесконечности. Оказывается, что эти условия отличаются от условий жесткого закрепления. Сращивание этих решений позволяет сформулировать методику определения КИН в пластине с трещиной-расслоением как последовательность вычислений для задач, существенно более простых по сравнению с исходной задачей.

Ранее исследования трещины-расслоении в тонких пластинах проводились в предположении о том, что деформирование пластины с трещиной в области трещины соответствует деформированию двух пластин жесткоскрепленных по контуру трещины. Разнообразные эффекты, связанные с поведением таких трещин рассмотрены энергетическим методом в работах [1–5] и др. Метод асимптотического сращивания применялся в работе [6] для анализа взаимного влияния близко расположенных трещин. В [7] решена методом Винера – Хопфа плоская задача о полубесконечном разрезе, параллельном границе полуплоскости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двухслойную пластину, состоящую из двух различных упругих слоев. На границе раздела этих слоев находится плоская трещина-расслоение, имеющая произвольную в плане форму. Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния такой конструкции. Вычитая из решения исходной задачи решение вспомогательной задачи о деформировании двухслойной пластины без трещины, можно свести исходную задачу к рассматриваемой в дальнейшем задаче определения раскрытия трещины на границе раздела слоев при действии на ее поверхности напряжений, равных по величине и противонаправленных напряжениям, действующим на месте трещины согласно решению вспомогательной задачи. Сложности решения задачи обусловлены влиянием верхней и нижней границ пластины на напряженное состояние в окрестности контура трещины. Это приводит к необходимости анализа трехмерного напряженно-деформированного состояния. При этом предполагается, что контур трещины расположен на достаточном удалении от края пластины. Следовательно, влиянием локального распределения напряжений у края пластины на решение у контура трещины можно пренебречь.

2. Оператор теории трещин для слоя. В качестве первого этапа построения решения задачи получим оператор, связывающий деформирование поверхности упругого слоя и нагрузку на этой же поверхности. Рассмотрим упругий слой. Координаты в плоскости слоя обозначим x_i (i = 1, 2), по толщине слоя $x_3 = y$. Перемещения в соответствующих направлениях u_i, $u_3 = w$. Деформирование слоя при отсутствии объемной нагрузки описывается уравнениями теории упругости

$$\mu\Delta U + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} U = 0 \tag{1.1}$$

здесь λ, μ – постоянные Лямэ, а U – вектор смещений. Напряжения τ_{13}, τ_{23}, σ_{33}, рассматриваемые в дальнейшем, представим в виде:

$$\tau_{i3} = \mu(u_{i,3} + w_{,i}), \quad \sigma_{33} = 2\mu w_{,y} + \lambda(\sum_i u_{i,i} + w_{,y}) \tag{1.2}$$

Пусть на нижней поверхности слоя (при $y = H$) нагрузка отсутствует $\tau_{i3} = 0$, $\sigma_{33} = 0$, а на верхнем – (при $y = 0$) напряжения равны приложенной нагрузке $\tau_{i3} = \tau_i$, $\sigma_{33} = \sigma$.

Построим оператор, связывающий τ_i, σ и u_i, w при $y = 0$. Сделаем преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 с параметрами ξ_1, ξ_2 [8]:

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int f(x)e^{i\xi x}dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int F(\xi)e^{-i\xi x}d\xi$$

$$x = (x_1,\ x_2), \quad \xi = (\xi_1,\ \xi_2), \quad \xi x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$$

Здесь символ F обозначает трансформанту функции f. В дальнейшем трансформанту будем обозначать той же буквой, что и преобразуемую функцию. Соотношения (1.1) и (1.2) для образов Фурье примут следующий вид:

$$\frac{\mu}{\lambda+\mu}u_{1,yy} - \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\xi^2 + \xi_1^2\right]u_1 - \xi_1\xi_2 u_2 - i\xi_1 w_{,y} = 0$$

$$\frac{\mu}{\lambda+\mu}u_{2,yy} - \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\xi^2 + \xi_2^2\right]u_2 - \xi_1\xi_2 u_1 - i\xi_2 w_{,y} = 0$$

$$\left(1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)w_{,yy} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\xi^2 w - i\xi_1 u_{1,y} - i\xi_2 u_{2,y} = 0 \tag{2.1}$$

$$\tau_i = \mu\,(u_{i,y} - i\xi_i w)$$

$$\sigma = 2\mu w_{,y} + \lambda\left(-\sum_i i\xi_1 u_1 + w_{,y}\right) \tag{2.2}$$

Здесь $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Решая систему (2.1) при соответствующих условиях при $y = H$ и затем подставляя в решение $y = 0$, получим соотношения, связывающие образы Фурье τ_i, σ и u_i, w при $y = 0$:

$$\sigma = -2\mu\xi\left[R_1(\xi)w - iQ(\xi)\left(\frac{\xi_1}{\xi}u_1 + \frac{\xi_2}{\xi}u_2\right)\right] \tag{2.3}$$

$$\tau_i = -2\mu\xi_i\left[iQ(\xi)w + R_2(\xi)\left(\frac{\xi_1}{\xi}u_1 + \frac{\xi_2}{\xi}u_2\right)\right] - \mu\,\mathrm{th}\,\xi H\left(\frac{\xi^2 - \xi_i^2}{\xi}u_i - \frac{\xi_1\xi_2}{\xi}u_j\right)$$

Здесь и в дальнейшем $j = 2$ (при $i = 1$) и $j = 1$ (при $i = 2$), а R_i, Q имеют следующий вид:

$$R_{1,2}(\xi) = \frac{(\lambda+2\mu)\ (\lambda+\mu)\ (\mathrm{sh}\,\xi H\,\mathrm{ch}\,\xi H \mp \xi H)}{(\lambda+3\mu)\ (\lambda+\mu)\ \mathrm{ch}^2\,\xi H + \mu^2 + (\lambda+\mu)^2(\xi H)^2}$$

$$Q(\xi) = \frac{\mu(\lambda+\mu)\,\mathrm{sh}^2\,\xi H + (\lambda+\mu)^2(\xi H)^2}{(\lambda+3\mu)\ (\lambda+\mu)\,\mathrm{ch}^2\,\xi H + \mu^2 + (\lambda+\mu)^2(\xi H)^2}$$

Рассмотрим данные соотношения при стремлении толщины H к нулю. Для этого разложим R_i, Q по параметру H и ограничимся первыми членами разложения. Тогда соотношения (2.3) трансформируются в соотношения для пластины, испытывающей изгиб и плосконапряженное состояние (аналогичные приведенным в следующем разделе – (3.2)). При стремлении H к бесконечности (2.3) трансформируются в символ известного оператора, связывающего нагрузку и перемещение на границе полупространства.

Используя соотношения (2.3), можно получить оператор теории трещин для двухслойной среды, связывающий нагрузку на поверхности двух (в общем случае различных) слоев и разность смещений поверхностей. Для этого необходимы соотношения, обратные к соотношениям (2.3):

$$w=\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\ \frac{1}{\xi}L_1(\xi)\sigma+i\frac{1}{2\xi^2}M(\xi)\sum_k\xi_k\tau_k$$

$$u_i=\frac{\xi_i}{\xi}\ \frac{1}{2\mu\xi^2}\ \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}L_2(\xi)\sum_k\xi_k\tau_k-i\frac{\xi_i}{\xi^2}\ \frac{1}{2}M(\xi)\sigma-$$

$$-\frac{1}{\mu}\operatorname{cth}\xi H\left(\frac{\xi^2-\xi_i^2}{\xi^3}\tau_i-\frac{\xi_1\xi_2}{\xi^3}\tau_j\right) \qquad (2.4)$$

Здесь L_i, M имеют следующий вид:

$$L_{1,2}(\xi)=-(\operatorname{sh}\xi H\operatorname{ch}\xi H\pm\xi H)/(\operatorname{sh}^2\xi H-(\xi H)^2)$$

$$M(\xi)=-\left(\frac{\operatorname{sh}^2\xi H}{\lambda+\mu}+\frac{(\xi H)^2}{\mu}\right)\frac{1}{2(\operatorname{sh}^2\xi H-(\xi H)^2)}$$

Раскрытие трещины равно разности смещений поверхностей слоев при действии взаимнокомпенсирующихся нагрузок на этих поверхностях. Для этого просуммируем соотношения (2.4) для двух различных слоев, а затем для полученных соотношений запишем обратные. В результате получим символ оператора, связывающего раскрытие трещины в двухслойной среде и нагрузку. В частности, рассмотрим два слоя толщиной H с упругими параметрами λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, соответственно. Введем обозначения:

$$\frac{1}{\mu_0}=\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}+\left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\lambda_2+\mu_2}\right)\frac{2\operatorname{sh}^2\xi H}{\operatorname{sh}^2\xi H-(\xi H)^2} \qquad (2.5)$$

$$\frac{1}{\lambda_0+\mu_0}=\frac{1}{\lambda_1+\mu_1}+\frac{1}{\lambda_2+\mu_2}+\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu_0},\quad \frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}$$

При этих обозначениях соотношения, связывающие нагрузку и раскрытие трещины в двухслойной среде, будут иметь вид

$$\sigma=-2\mu_0\xi\left[R_1^0(\xi)w-iQ^0(\xi)\left(\frac{\xi_1}{\xi}u_1+\frac{\xi_2}{\xi}u_2\right)\right]$$

$$\tau_i=-2\mu_0\xi_i\left[iQ^0(\xi)w+R_2^0(\xi)\left(\frac{\xi_1}{\xi}u_1+\frac{\xi_2}{\xi}u_2\right)\right]-$$

$$-\mu\operatorname{th}\xi H\left(\frac{\xi^2-\xi_i^2}{\xi}u_i-\frac{\xi_1\xi_2}{\xi}u_j\right) \qquad (2.6)$$

Выражения R_i^0, Q^0 – имеют вид аналогичный R_i, Q из (2.3) при подстановке в них λ_0, μ_0. Соотношения (2.6) справедливы и для случая двух слоев различной толщины. Однако в этом случае коэффициенты (2.5) существенно усложняются.

3. Трещина-расслоение в двуслойной пластине. Предположим, что толщина $2H$ слоя много меньше размеров трещины. Асимптотическое разложение соотношений теории упругости для слоя приводит к соотношениям теории пластин. Рассмотрим как трансформируются соотношения, полученные в предыдущем разделе. Разложим коэффициенты в уравнениях (2.4) в ряд по малому параметру e – имеющему порядок отношения толщины пластины к размеру трещины в плане. Решение также представим в виде асимптотического разложения по параметру e (при стремлении e к нулю): $w = w^0 + ew^1 + \ldots$, $u = u^0 + eu^1 + \ldots$ Полученные таким образом соотношения для главных членов асимптотического разложения (нулевого порядка) имеют вид (верхний индекс здесь и в дальнейшем опущен):

$$w = -\frac{1}{D\xi^4}\sigma - i\frac{1}{C\xi^4}(\sum_k \xi_k \tau_k)$$

$$u_i = i\frac{\xi_i}{C\xi^4}\sigma - \left(\frac{\xi_i^2}{B} + \frac{\xi^2 - \xi_i^2}{\mu H}\right)\frac{1}{\xi^4}\tau_i + \left(\frac{1}{\mu H} - \frac{1}{B}\right)\frac{\xi_1\xi_2}{\xi^4}\tau_j \tag{3.1}$$

$$D = EH^3 / 12(1-\nu^2), \quad C = EH^2 / 6(1-\nu^2), \quad B = EH / 4(1-\nu^2), \quad a = \mu H$$

Соотношения (3.1) являются преобразованными по Фурье соотношениями для нагрузки и перемещений в пластинке, находящейся в условиях изгиба и плосконапряженного состояния. При этом D – изгибная, B – мембранная, а C – мембранно-изгибная жесткости. Построенный аналогичным образом главный член асимптотического разложения для соотношений (2.6) будет иметь следующий вид:

$$\sigma = -\left(\frac{1}{D_0} - \frac{B_0}{C_0^2}\right)^{-1}\xi^4[w] + \left(\frac{C_0}{D_0 B_0} - \frac{1}{C_0}\right)^{-1} i\xi^2 \sum_i \xi_i [u_i]$$

$$\tau_i = -\left(\frac{C_0}{D_0 B_0} - \frac{1}{C_0}\right)^{-1} i\xi_i\xi^2[w] - \left(\left(\frac{1}{B_0} - \frac{D_0}{C_0^2}\right)^{-1}\xi_i^2 + \right. \tag{3.2}$$

$$\left. + a_0(\xi^2 - \xi_i^2)\right)[u_i] + \left(a_0 - \left(\frac{1}{B_0} - \frac{D_0}{C_0^2}\right)^{-1}\right)\xi_1\xi_2[u_j]$$

Здесь использованы следующие обозначения: $1/D_0 = 1/D_в + 1/D_н$, $1/B_0 = 1/B_в + 1/B_н$, $1/C_0 = 1/C_в - 1/C_н$, $a_0 = a_в - a_н$. Индексы *в* и *н* обозначают верхний и нижний слой соответственно, а $[u_i]$ – раскрытие трещины (разность смещений). Таким образом, соотношения (3.2) описывают раскрытие трещины-расслоения, когда ее размер много больше толщины. Эти соотношения можно трактовать как раскрытие зазора между двумя пластинами на области трещины, скрепленными по контуру трещины. Очевидно, что полученное таким образом решение будет справедливо только при достаточном удалении от контура трещины, вблизи которого возникает пограничный слой. При этом контур предполагается достаточно гладким (т.е. его радиус кривизны много больше толщины слоя).

Для анализа пограничного слоя, в области контура трещины необходимо рассмотреть соотношения (2.6) как уравнения с быстро меняющимися градиентами по нормали к контуру трещины. Введем локальные быстрые координаты $z = (ez_1, z_2)$, определяемые направлением нормали и касательной к контуру. Здесь $(z_1, z_2) = V(x - x_Г)$, где V – матрица поворота, а $x_Г$ – координата точки контура. Введем параметры преобразования Фурье $\zeta = (\zeta_1/e, \zeta_2)$ соответствующие z: $(\zeta_1, \zeta_2) = V^{-1}\xi$, $x\xi = z\xi + x_\Gamma V\zeta$ (последним слагаемым можно пренебречь в силу линейности рассматриваемых здесь соотношений). Соотношения, рассмотренные выше, описывают изотропное тело и, следовательно, инвариантны при повороте осей координат. Поэтому соотношения (2.6) в локальной системе координат будут инвариантны при замене ξ на ζ. Для соотношений (2.6) при вышеописанных заменах, построим асимптотическое разложение, аналогичное ряду для (3.1). При этом необходимо учесть, что $\zeta_1 H / e \gg \zeta_2 H \to 0$. Это равносильно пренебрежению в (2.6) градиентами по нормали контура. Таким образом, для определения главного члена асимптотики решения в пограничном слое получим ($H_0 = H/e$):

$$\begin{aligned}
&\sigma = -2\mu_0\zeta_1(R_1^0(\zeta_1)\,[w] - iQ^0(\zeta_1)\,[u_1]) \\
&\tau_1 = -2\mu_0\zeta_1(iQ^0(\zeta_1)\,[w] + R_2^0(\zeta_1)\,[u_1]), \qquad \tau_2 = -\mu\zeta_1 \,\mathrm{th}\,\zeta_1 H_0[u_2]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Соотношения (3.3) определяют оператор для случая двумерной задачи о пограничном слое (в плоскости нормальной к линии контура трещины). Заметим, что задача (3.3) распадается на две задачи для плоской (σ, τ_1) и антиплоской (τ_2) деформации. Таким образом имеется асимптотическое представление решения общих соотношений (2.6) для двух случаев: (3.2) и (3.3), справедливых вдали и вблизи от контура трещины.

4. Трещина-расслоение в двухслойной полосе. Плоскую задачу (3.3) будем рассматривать аналогично работе [7], как задачу Римана на мнимой оси $t = i\zeta_1 H_0$. Запишем соотношения (3.3) для преобразований Лапласа, трансформировав коэффициенты (2.4) (при этом будем предполагать, что толщины верхнего и нижнего слоев одинаковы):

$$\mathbf{F}_-(p) = \frac{1}{A}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix}[w]\\ [u]\end{Bmatrix} e^{px}dx, \quad \mathbf{F}_+(p) = \int_{-\infty}^0 \begin{Bmatrix}\sigma\\ \tau\end{Bmatrix} e^{px}dx$$

$$A = \sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda_k + 2\mu_k}{2\mu_k(\lambda_k+\mu_k)}, \quad \mathbf{F}_-(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{F}_+(t)$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{Vmatrix} \dfrac{t+\sin t\cos t}{\sin^2 t - t^2} & -d\dfrac{t^2 + g\sin^2 t}{\sin^2 t - t^2} \\ d\dfrac{t^2+g\sin^2 t}{\sin^2 t - t^2} & \dfrac{-t+\sin t\cos t}{\sin^2 t - t^2}\end{Vmatrix}$$

$$d = \frac{(\mu_2-\mu_1)\ (\lambda_1+\mu_1)\ (\lambda_2+\mu_2)}{(\lambda_1+2\mu_1)\mu_2(\lambda_2+\mu_2)+(\lambda_2+2\mu_2)\mu_1(\lambda_1+\mu_1)} \tag{4.1}$$

$$g = \left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_1-\mu_2}+1\right)\frac{\mu_1\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)}$$

Решение этих задач определяется с точностью до равнодействующих нагрузки на поверхности трещины M, Q, P_1 P_2. Собственные значения матрицы $\mathbf{G}$ (t) имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sin t\cos t \pm t\varphi}{\sin^2 t - t^2}$$

Матрица $\mathbf{G}$ (t) может быть факторизована следующим образом. Запишем разложение матрицы

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{X}_-^{-1}(t)\mathbf{X}_+(t)$$

$$\beta_-(p)=\frac{1}{2\varphi}\ln(-p\gamma+i\varphi)+\frac{1}{\varphi}\ln\frac{\varphi-1}{p\gamma}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{1}{2\varphi}\ln B_2(t/i)\frac{dt}{t-p} \tag{4.6}$$

Ядро $\ln B_2$ удовлетворяет условию Гельдера и соответствующая ему часть решения может быть представлена в виде интеграла Коши. Асимптотика функции $X_+(p)$ при $\operatorname{Re} p\to\infty$ имеет вид

$$\mathbf{X}_+^{-1}(p)=p^{-1/2}\mathbf{G}+p^{-3/2}\mathbf{H},\quad \operatorname{Re} p\to\infty \tag{4.7}$$

Подставим разложение матрицы $\mathbf{G}$ (t) в исходную задачу. Это определит решение с точностью до целой вектор-функции. Учтем, что при $\operatorname{Re} p\to\infty$ решение имеет особенность порядка $p^{-1/2}$ (особенность напряжений в устье трещины). Следовательно, с учетом структуры (4.7) запишем:

$$\mathbf{X}_+\mathbf{F}_+=(a_1+ibp\gamma,\quad a_2+bp\gamma) \tag{4.8}$$

Коэффициенты a_1, a_2, b подлежат определению из условия при $p = 0$:

$$F_{+1}(0)=\int_{-\infty}^{0}\sigma dx=Q,\quad F_{+2}(0)=\int_{-\infty}^{0}\tau_1 dx=P_1,\quad \frac{dF_{+1}}{dp}(0)=\int_{-\infty}^{0}x\sigma dx=M$$

Используя полученные выражения, запишем выражение трансформант напряжений при $\operatorname{Re} p\to\infty$:

$$\sqrt{p}\mathbf{F}_+(p)=\mathbf{G}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+bd\mathbf{H}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\quad \operatorname{Re} p\to\infty$$

Для антиплоской задачи

$$F_-(p)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x}\{[[u_2]]\}e^{px}dx,\quad F_+(p)=\int_{-\infty}^{0}\{\tau_2\}e^{px}dx$$

При этом $G(t) = \operatorname{ctg} t$. Асимптотика напряжений в устье трещины (при $\operatorname{Re} p\to\infty$):

$\sqrt{p}F_+(p)=P_2,\quad \operatorname{Re} p\to\infty.$

5. Расчет пластины с трещиной-расслоением. Асимптотика решения данных задач при стремлении p к бесконечности позволяет получить выражения для коэффициентов интенсивности напряжений K_1, K_2, K_3:

$$\mathbf{K}=\frac{1}{\sqrt[4]{1-d^2g^2}}\frac{1}{\sqrt{1+g}}\left(k_M M+\left(k_T-\frac{\omega}{2}k_M\right)P_1+(\delta k_M+\sqrt{3}\omega\sqrt{4-3\omega^2}k_T)Q\right)$$

$$\mathbf{K}=\begin{Bmatrix}K_1\\K_2\end{Bmatrix},\quad K_3=\sqrt{2}P_2$$

$$k_M=\sqrt{6}\begin{Bmatrix}\cos q-\sin q\\-\cos q-\sin q\end{Bmatrix},\quad k_T=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-3\omega^2}\begin{Bmatrix}\cos q+\sin q\\\cos q-\sin q\end{Bmatrix}$$

$$\delta=\frac{2(1+\ln 2)}{\pi}+\alpha_1+\alpha_2$$

$$\alpha_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2}{(1-d^2g^2)}}\tanh^2 x\right)\right]\frac{dx}{x}$$

$$\mathbf{X}_{\pm}^{\pm 1}(p) = \Lambda_{\pm}^{\pm 1}(p)\ [\mathbf{I}\,\mathrm{ch}(\varphi\beta_{\pm}) \pm \mathbf{D}\,\mathrm{sh}(\varphi\beta_{\pm})] \tag{4.2}$$

$$\varphi = \sqrt{1 - t^2\gamma^2}, \qquad \gamma = d\left(1 + g\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)$$

$$\mathbf{D} = \| d_{ij} \|, \quad d_{11} = 1, \quad d_{22} = -1, \quad d_{12} = -t\gamma, \quad d_{21} = t\gamma$$

Тогда аналитические в соответствующих полуплоскостях функции $\Lambda_{\pm}$, $\beta_{\pm}$ должны удовлетворять следующим скалярным задачам Римана

$$\Lambda_{+}(\Lambda_{-})^{-1} = \sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t - t^2\varphi^2}}{\sin^2 t - t^2} \tag{4.3}$$

$$\beta_{+} - \beta_{-} = \frac{1}{\varphi}\ln\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{1}{2\varphi}\ln\frac{\sin t\cos t + t\varphi}{\sin t\cos t - t\varphi} \tag{4.4}$$

Введем обозначение:

$$B_1(x) = \frac{\mathrm{sh}^2 x\sqrt{\mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x - x^2\varphi^2}}{\mathrm{ch}^2 x(\mathrm{sh}^2 x - x^2)\sqrt{1 - d^2g^2}}$$

В соответствии с этим первую задачу (4.3) преобразуем к виду

$$\Lambda_{+}(\Lambda_{-})^{-1} = i\,\mathrm{ctg}^2 t\sqrt{1 - d^2g^2}\,B_1(t/i)$$

Учтем соотношение

$$\mathrm{ctg}^2 p = \frac{\pi^2\Gamma^2(1 + p/\pi)\Gamma^2(1 - p/\pi)}{p^2\Gamma^2(1/2 + p/\pi)\Gamma^2(1/2 - p/\pi)}$$

В соответствии с этим решение первой задачи Римана (4.3) запишем в виде

$$\Lambda_{+}(p) = \frac{\pi\Gamma^2(1 + p/\pi)}{\Gamma^2(1/2 + p/\pi)}\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln B_1(t/i)\frac{dt}{t - p}\right)$$

$$\Lambda_{-}(p) = \frac{p^2\Gamma^2(1/2 - p/\pi)}{\pi i\Gamma^2(1 - p/\pi)}\ \frac{1}{\sqrt{1 - d^2g^2}}\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln B_1(t/i)\frac{dt}{t - p}\right) \tag{4.5}$$

Здесь контуром интегрирования L является мнимая ось. Ядро $\ln B_1$ удовлетворяет условию Гельдера и соответствующая ему часть решения может быть представлена в виде интеграла Коши. С учетом особенности правой части на бесконечности и в нуле вторую задачу (4.4) трансформируем к виду

$$\beta_{+} - \beta_{-} = -\frac{i\pi}{2\varphi} - \frac{1}{\varphi}\ln\frac{\varphi - 1}{t\gamma} + \frac{1}{2\varphi}\ln B_2(t/i)$$

Первое слагаемое выделяет неинтегрируемую часть на бесконечности, а второе в нуле. Используем обозначение

$$B_2(x) = \left(\frac{x\gamma}{\varphi + 1}\right)^2 \frac{\sin t\cos t + t\varphi}{\sin t\cos t - t\varphi}$$

В соответствии с этим решение второй задачи Римана представим в виде

$$\beta_{+}(p) = -\frac{1}{2\varphi}\ln(p\gamma + i\varphi) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{2\varphi}\ln B_2(t/i)\frac{dt}{t - p}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2\sqrt{1+x^2d^2}}\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\psi^2\right)\right]\frac{dx}{x}$$

$$q = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{1+x^2d^2}}\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\psi^2\right)dx$$

$$\psi = \frac{xd}{\sqrt{1+x^2d^2}+1}, \quad \omega = d(1+g) \tag{5.1}$$

Решения (4.5), (4.6) для трансформант $[w]$ и $[u_i]$ при стремлении p к нулю являются полиномами от $1/p$. Их коэффициенты определяют асимптотику $[w]$ и $[u_i]$ для пограничного слоя при z стремящемся к бесконечности:

$$[w] = \frac{Q}{D_0}\left(\frac{z_3}{6}+\upsilon z+\gamma\right)-\frac{M}{D_0}\left(\frac{z^2}{2}+\delta z+\beta\right)-$$

$$-\frac{P_1}{C_0}\ \frac{\sqrt{3}\sqrt{4-3\omega^2}}{6}(z+\delta)+\frac{P_1}{C_0}\left(\frac{z^2}{2}+\delta z+\beta+\frac{4-3\omega^2}{12}\right)$$

$$[u_1] = -\frac{Q}{C_0}\left(\frac{z^2}{2}+\beta\right)+\frac{M}{C_0}(z+\delta)-\frac{P_1}{B_0}(z+\theta)+$$

$$+\frac{\sqrt{3}\sqrt{4-3\omega^2}}{12}\omega\left(\frac{M}{D_0}+\frac{\delta Q}{D_0}-\frac{P_1}{C_0}\right)-\omega\alpha_2\frac{P_1}{C_0}$$

$$[u_2] = \frac{P_2}{a_0}\left(z+\frac{1+\ln 2}{\pi}\right) \tag{5.3}$$

Здесь z – быстро меняющаяся координата по нормали к контуру $z = (x_i, n_i)/e$, где n_i – вектор нормали к контуру, e – малый параметр задачи; Q, M, P_1, P_2 – соответствующие усилия, приложенные к трещине,

$$\theta = 2(1+\ln 2)/\pi+\alpha_1-\alpha_2$$

$$\beta = \frac{\omega^2}{8}+\frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2}{2}+\left(2\alpha_1+2\alpha_2+\frac{1+\ln 2}{\pi}\right)\frac{1+\ln 2}{\pi}+$$

$$+0,4+\frac{2+g}{2(1+g)}+\frac{d^2(1+g)g-61/90}{4-3\omega^2}+2\chi_2$$

$$\upsilon = \beta-\omega^2/4+dg/(3\omega)-\delta^2$$

$$\gamma = \delta\left(\frac{dg}{3\omega}-\beta-\frac{\omega^2}{8}\right)+\left(\alpha_1+\frac{2(1+\ln 2)}{\pi}\right)\left(\beta_2+\frac{\alpha_2^2}{2}\right)+\alpha_2\left(\beta_1+\frac{\alpha_1^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\left(2\alpha_1+\frac{1+\ln 2}{\pi}\right)\frac{1+\ln 2}{\pi}+2\chi_1\right)+\frac{\alpha_1^3+\alpha_2^3}{6}-\alpha_2\frac{\omega^2}{2}+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+$$

$$+2\chi_2+\zeta+\alpha_1\left(2\chi_1+\frac{(1+\ln 2)^2}{\pi^2}\right)+\frac{2(1+\ln 2)}{\pi}\left(\beta_1+\frac{\alpha_1^2}{2}\right)$$

$$\zeta=\frac{1}{6\pi}\int_0^\infty\frac{d^3}{dx^3}\left[\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2}{(1-d^2g^2)}}\tanh^2 x\right)-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2d^2}}\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\psi^2\right)\right]\frac{dx}{x}$$

$$\frac{\Gamma(1+p/\pi)}{\Gamma(1/2+p/\pi)}(p\to 0)=\sum_0^\infty\chi_{n-1}p^n$$

Решение задачи (4.1) определено с точностью до коэффициентов, которые являются усилиями, приложенными к полубесконечной трещине. КИН в конце трещины также определяются этими коэффициентами. С другой стороны, решение (5.2) на бесконечности пограничного слоя является решением системы (3.2), в которой градиенты вдоль контура пренебрежимы по сравнению с градиентами по нормали. Таким образом, выражение (5.2), определяет поведение решения (3.2) вблизи контура, где Q, M, P_1, P_2 – соответствующие усилия на контуре пластины (пересчитанные к системе координат, связанной с нормалью к контуру). Следовательно, соответствующие кинематические условия на контуре пластины определяются коэффициентами из (5.2) в зависимости от силовых условий. Тем самым определены условия упругого закрепления для уравнений (3.2). В частности, если в выражении (5.2) ограничиться главным членом асимптотики для части выражения, соответствующей кинематическим условиям (при e стремящемся к нулю) получим $F = M\delta/D_0$. Это слагаемое определяет условие упругого закрепления для угла поворота поверхностей пластины (3.2) у контура трещины.

Таким образом, для построения решения исходной задачи необходимо произвести последовательно ряд вычислений: определение коэффициентов упругости закрепления на основе решения (5.2) задачи о полубесконечной трещине в двухслойной полосе; решение задачи (3.2) о деформировании двух пластин на области трещины, упруго закрепленных по контуру; подсчет коэффициентов интенсивности напряжений (5.1) для полубесконечной трещины в полосе, загруженной на бесконечности моментами и силами, определяемыми как усилия на контуре пластин в предыдущей задаче.

6. Изменение КИН при варьировании контура трещины. Данная методика может быть использована для анализа влияния вариации контура трещины на КИН. Пусть вариация контура трещины определяется как $eJ(x)$, где e – малый параметр, а $J(x)$ – масштабированная вариация контура. Решение (3.2) $[W]$ будем искать в виде: $W_0 + eW_1 + \ldots$ (аналогично для U_1 и U_2). Следовательно, для W_0 и W_1 необходимо решить уравнения (3.2). При этом для W_1 соотношения (3.2) должны рассматриваться с однородной правой частью, а задача для W_0 есть задача для исходного контура. Эти соотношения необходимо дополнить условиями на контуре. Учитывая, что $W(x + eJ) = W(x) + eJ(n, \mathrm{grad})\, W(x) + \ldots$, запишем для W_0 соотношения упругого закрепления $F = M\delta / D_0$, $F=(n,\ \nabla)W_0$, $M=-D_0(n,\ \nabla)^2 W_0$. Аналогичное условие для W_1: $(n,\ \nabla)W_1+J(n,\ \nabla)^2W_0=-((n,\ \nabla)^2W_1+J(n,\ \nabla)^3W_0)\delta$. Таким образом для учета изменения КИН при варьировании контура необходимо:

определить W_1 как решения (3.2) при неоднородных условиях на контуре, определяемых W_0;

вычислить усилия на контуре трещины в задаче для W_1;

вычислить КИН по формуле (5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Слепян Л.И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.
2. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композитных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
3. *Болотин В.В.* Разрушение композиционных материалов по типу расслоений // Расчет на прочность. М.: Машиностроение, 1986. Вып. 27. С. 8–20.
4. *Williams J.G.* On the calculation of energy release rates for cracked laminates // Intern. J. Fract. 1988. V. 36. No. 2. P. 101–119.
5. *Парцевский В.В.* Расслоение композитных пластин при изгибе // Механика композитных материалов. 1990. № 6. С. 1047–1050.
6. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Коэффициенты интенсивности напряжений для параллельных сближенных трещин в плоской области // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 132–140.
7. *Златин А.Н., Храпков А.А.* Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 4. С. 810–813.
8. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.II.1996