

УДК 539.375

© 1996 г. В.В. БОЛОТИН, В.Л. ЛЕБЕДЕВ, Г.Х. МУРЗАХАНОВ, С.В. НЕФЕДОВ

МОДЕЛЬ РОСТА ДИСКОВОЙ ТРЕЩИНЫ МАЛОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ

В рамках общей теории усталостных трещин рассмотрена задача о распространении внутренней дисковой трещины. Принято, что материал является идеальным упругопластическим, что позволяет описать явление малоциклового усталости. В окрестности фронта трещины вводится тонкая пластическая зона, аналогичная пластической зоне в задаче Леонова – Панасюка – Дагдейла. Сопротивление материала росту усталостной трещины принято зависящим как от пластической деформации, так и от микроповреждений на фронте трещины и ее продолжении. Конечные результаты представлены в виде диаграмм скорости роста трещин в функции от размаха коэффициента интенсивности напряжений. Показано, что диаграммы отражают все три стадии распространения усталостных трещин: ускоренный рост на начальном участке; закон роста, близкий к степенному на среднем участке; ускоренный рост перед окончательным разрушением. Показатель диаграмм на среднем участке остается близким к двум при изменении в широких пределах параметров, характеризующих процесс накопления микроповреждений.

1. Рассмотрим тело с трещинами под действием циклических нагрузок. Силами инерции будем пренебрегать, трактуя все состояния тела как состояния равновесия в обычном смысле. Применим принцип виртуальных перемещений, рассматривая в качестве обобщенных координат параметры a_1, \dots, a_m , с точностью до которых заданы трещины. Выберем эти параметры из условий $\delta a_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, m$) и применим принцип виртуальных перемещений для механических систем с односторонними связями [1, 2]:

$$\delta A_e + \delta A_i + \delta A_f \leq 0 \quad (1.1)$$

Здесь δA_e и δA_i – работа соответственно внешних и внутренних сил на вариациях δa_j , δA_f – виртуальная работа разрушения. Перепишав левую часть условия (1.1) в виде двух слагаемых

$$\delta A_e + \delta A_i \equiv \sum_{j=1}^m G_j \delta a_j, \quad \delta A_f \equiv - \sum_{j=1}^m \Gamma_j \delta_j \quad (1.2)$$

тем самым вводим два типа обобщенных сил: активные обобщенные силы G_j (силы, продвигающие трещины) и пассивные обобщенные силы Γ_j (силы сопротивления). В случае однопараметрической трещины в линейно упругом теле активная сила G совпадает с интенсивностью высвобождения энергии, а сила сопротивления Γ с удельной работой разрушения, отнесенной к обеим вновь образуемым поверхностям трещины.

Состояние тела трещины под нагрузкой может быть классифицировано по двум уровням: по отношению к равновесию и отношению к устойчивости. В зависимости от знака левой части в (1.1) было предложено [1–3] различать субравновесные, равновесные и неравновесные состояния. В первом случае трещины не распространяются, в третьем распространяются неустойчиво. Если состояние тела с трещинами равновесно, то его устойчивость определяется знаком следующих вариаций от виртуальной работы. В терминах обобщенных сил классификация состояний может быть введена при помощи соотношений

$$G_j \lesseqgtr \Gamma_j \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1.3)$$

В случае равенства вводятся дополнительные условия на производные от обобщенных сил по параметрам трещин.

Для того, чтобы применить эти понятия к усталостным трещинам, необходимо учесть накопление повреждения на фронтах трещин и их продолжения. Пусть микроповреждения описываются, вообще, тензорным полем $\omega(x, N)$, где x – координатный вектор, N – номер цикла. Поле микроповреждений является функционалом истории нагружения и роста трещин, так что

$$\omega(x, N) = \omega_{n=0}^{n=N} \{s(n), a(n)\} \quad (1.4)$$

где $s(n)$ – набор переменных, характеризующих нагружение в пределах n -го цикла, $a(n)$ – совокупность обобщенных координат a_1, \dots, a_m на этом цикле. Наибольший интерес представляют микроповреждения на фронтах трещины, т.е.

$$\psi(N) = \omega\{x[a(N)], N\} \quad (1.5)$$

где $x(a)$ – значения радиус-вектора на фронтах. С учетом введенных обозначений перепишем соотношения (1.3) следующим образом:

$$G_j[s(N), a(N), \psi(N)] \lesssim \Gamma_j[s(N), a(N), \psi(N)] \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1.6)$$

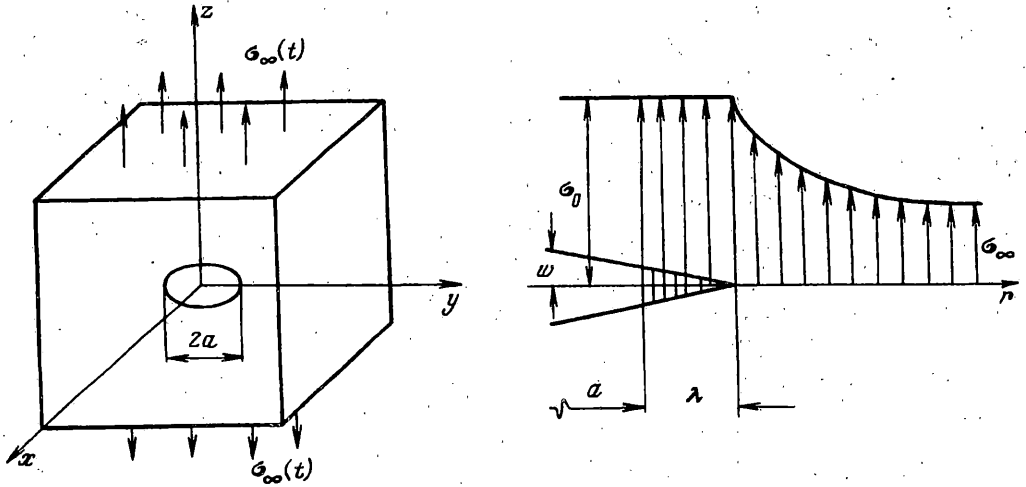
Соотношения (1.6) учитывают два взаимодействующих механизма, управляющих ростом усталостных трещин: глобальный баланс энергии (или сил) в системе тело с трещинами – нагрузка и накопление микроповреждений под действием циклических напряжений. Рост трещин может быть как непрерывным, так и скачкообразным. Однако во втором случае размеры скачков, как правило, малы, так что процесс роста приближенно может быть представлен как непрерывный. Тогда для трещин, растущих по обобщенной координате a_j , имеем приближенное уравнение

$$G_j[s(N), a(N), \psi(N)] \approx \Gamma_j[s(N), a(N), \psi(N)] \quad (1.7)$$

Дальнейший анализ требует информации о свойствах материала, форме тела и условиях его нагружения, а также дополнительных предположений о механизме накопления микроповреждений. В частности, для того, чтобы модель включала как классическую, так и многоцикловую усталость, необходимо учитывать пластическое деформирование материала у фронтов трещин, связанное с ним возникновение остаточных напряжений и деформаций, циклическое упрочнение (разупрочнение). Некоторые из этих эффектов могут быть описаны в рамках модели тонкой пластической зоны Леонова – Панасюка – Дагдейла [4]. В данной статье будет использована аналогичная модель для плоской круговой в плане трещины в неограниченном теле под действием напряжений, действующих ортогонально плоскости трещины. Аналогичная задача для монотонного квазистатического нагружения рассмотрена в [5–7].

2. Рассмотрим дисковую круговую в плане трещину с радиусом a (фиг. 1, a). Внешняя нагрузка задана номинальным напряжением $\sigma_\infty(t)$, приложенным вдоль оси Oz . Эта ось ортогональна плоскости Oxy , в которой расположена трещина и в которой (по предположению) она может расти, оставаясь круговой в плане: Для описания этой осесимметричной задачи используем цилиндрические координаты r, z . Принимая, что материал – идеальный упругопластический, определим поле напряжений $\sigma_z(r)$ в плоскости Oxy , используем модель Леонова – Панасюка – Дагдейла. На продолжении $r \geq a$ принимаем равномерное распределение напряжений в тонкой кольцевой области $a \leq r \leq a + \lambda$, а вне этой области материал рассматриваем как линейно упругий (фиг. 1, b). Напряжение $\sigma_z = \sigma_0$ при $a \leq r \leq a + \lambda$ трактуем как параметр материала; это напряжение имеет порядок предела текучести при растяжении. Ширина пластической зоны λ определяется как

$$\lambda = a[(1 - s^2)^{-1/2} - 1] \quad (2.1)$$



Фиг. 1

а распределение напряжений отрыва при $z = 0, r \geq 0$ как

$$\sigma_z = \begin{cases} \sigma_0, & a \leq r \leq a + \lambda \\ \frac{2\sigma_0}{\pi} \left[\frac{s - (1 - \xi_0^2)^{1/2}}{(\xi^2 - 1)^{1/2}} - s \arcsin(\xi^{-1}) + \arcsin\left(\frac{1 - \xi_0^2}{\xi^2 - \xi_0^2}\right)^{1/2} + \frac{\pi s}{2} \right], & r > a + \lambda \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\xi = r / (a + \lambda), \quad \xi_0 = a / (a + \lambda), \quad s = \sigma_\infty / \sigma_0 \quad (2.3)$$

Пусть номинальные напряжения изменяются во времени циклически. Зададим каждый цикл нагружения максимальным σ_∞^{\max} и минимальным σ_∞^{\min} значениями номинальных напряжений. Тогда размах $\Delta\sigma_z$ напряжений отрыва при $z = 0, r \geq a$ может быть определен по формулам (2.1)–(2.3) с заменой σ_0 на $2\sigma_0$ в пределах циклически активной зоны шириной λ_p :

$$\lambda_p = a[(1 - s_p^2)^{-1/2} - 1], \quad s_p = \Delta\sigma_\infty / 2\sigma_0 \quad (2.4)$$

где $\Delta\sigma_\infty = \sigma_\infty^{\max} - \sigma_\infty^{\min}$ – размах номинальных напряжений. При этом λ в формулах (2.2) и (2.3) заменяется на λ_p . Действительно, разгрузка при упругопластическом деформировании идеального материала происходит упруго до предельного значения $-\sigma_0$, так что размах напряжений в пределах активной зоны составляет $-2\sigma_0$, а номинальные напряжения разгрузки равны $-\Delta\sigma_\infty$. В дальнейшем потребуется также выражение для раскрытия δ на фронте трещины

$$\delta = \frac{8(1 - \nu^2)\sigma_0^2 a^2}{E} [1 - (1 - s^2)^{1/2}] \quad (2.5)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Трещина в рассматриваемой задаче – однопараметрическая, так что соотношения (1.3) принимают вид $G \lesseqgtr \Gamma$. Трещина не растет, если $G < \Gamma$, и растет непрерывно и устойчиво, если $G = \Gamma$, $\partial G / \partial a < \partial \Gamma / \partial a$. Финальное разрушение или скачкообразное подрастание наступает при нарушении одного из этих неравенств. При циклическом деформировании в материале накапливаются микрповреждения, которые влияют как на деформативные свойства материала, так и на его сопротивление росту трещины,

которое характеризуется обобщенной силой сопротивления G . Было показано [8], что влиянием микрповреждений на значения обобщенной силы G можно пренебречь, в то время как это влияние играет существенную роль при вычислении обобщенной силы G . В случае круговой трещины отрыва в линейно упругом теле силу G можно выразить через коэффициент интенсивности напряжений $K_I = 2\sigma_\infty(a/\pi)^{1/2}$. Пользуясь формулой Ирвина, получаем

$$G = 8\sigma_\infty^2 a^2 (1 - \nu^2) / E \quad (2.6)$$

Выражение в правой части совпадает с J -интегралом для рассматриваемой задачи, с его значением, умноженным на длину фронта трещины

$$J = 2\pi\sigma_0 a \delta \quad (2.7)$$

где δ определяется по формуле (2.5).

Если материал упругопластический, то величины, определяемые по формулам (2.6) и (2.7), вообще, не являются обобщенными силами в смысле принципа виртуальных перемещений. Введем обобщенную силу, продвигающую трещину, в соответствии с первым из соотношений (1.2). Тогда

$$G = (\delta A_e + \delta A_i) / \delta a \quad (2.8)$$

где $\delta A_e + \delta A_i$ можно истолковывать как работу, совершаемую внешними и внутренними силами при продвижении фронта трещины на δa . При этом необходимо учитывать, что вместе с размером трещины a должна варьироваться также и длина пластической зоны λ [2, 3].

Как это часто делают в механике разрушения, выразим виртуальную работу $\delta A_e + \delta A_i$ через работу, которую напряжения, действующие в плоскости $z = 0$, должны совершить, чтобы возвратить размеры $a + \delta a$ и $\lambda + \delta \lambda$ к прежним размерам a и λ :

$$\delta A_e + \delta A_i = \frac{\partial}{\partial a} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma_\infty w r dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{a+\lambda} (\sigma_0 - \sigma_\infty) w r dr \right] \delta a$$

Подставим сюда выражение для перемещения $w(r)$ при $0 \leq r \leq a + \lambda$:

$w(r) =$

$$= \begin{cases} \frac{4(1-\nu^2)\sigma_0 a}{\pi E} \left[E(\mu_1, \eta) - \frac{s}{\xi_0} \frac{\xi^2}{(1-\xi^2)^{1/2}} \right], & 0 \leq r \leq a \\ \frac{4(1-\nu^2)\sigma_0 a}{\pi E \xi_0} \left[\xi E(\mu_2, 1/\eta) - \frac{1-s^2}{s} (1-\xi^2)^{1/2} - \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{\xi} F(\mu_2, 1/\eta) \right], & a \leq r \leq a + \lambda \end{cases}$$

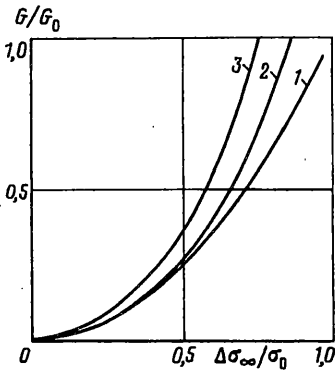
$$\mu_1 = \arcsin \left(\frac{1-\xi^2}{1-\xi_0^2} \right)^{1/2}, \quad \mu_2 = \arcsin \left(\frac{1-\xi^2}{1-\xi_0^2} \right)^{1/2}$$

Здесь $E(\mu, \eta)$ $F(\mu, \eta)$ – неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Вычисления приводят к формуле

$G =$

$$= \frac{8(1-\nu^2)\sigma_0^2 a^2}{E} \left\{ \frac{(1+s)s}{(1-s^2)^{3/2}} [3s-s^2-2(1-s)(1-s^2)^{1/2}] + \frac{(1-s^2)^{1/2}}{(1-s)} [1-(1-s^2)^{1/2}]^2 \right\}$$

(2.9)



Фиг. 2

Подробности вычислений можно найти в [5, 6], где они проведены в контексте определения плотности работы разрушения. Однако, поскольку для равновесных (в смысле механики разрушения) трещин $\delta A_f = -(\delta A_e + \delta A_i)$, то они полностью применимы к определению обобщенной силы по формуле (2.8).

Результаты вычислений по формулам (2.6), (2.7) и (2.9) приведены на фиг. 2, где кривые 1, 2 и 3 отвечают этой последовательности формул. При этом использовано обозначение $G_0 = 8(1-\nu^2)\sigma_0^2 a^2/E$. Как видно из графиков, расхождение между результатами имеет одинаковый порядок, причем это расхождение увеличивается с ростом σ_∞/σ_0 . Аналогичный вывод по трещине в классической задаче

Ирвина получен в работах [2, 9].

3. Значения обобщенной силы сопротивления Γ зависят от состояния материала на фронте трещины и ее продолжении. Необходимо учитывать две группы факторов: пластическое деформирование в зоне шириной λ и накопление микроповреждений под действием циклических напряжений. Последнее происходит как в пределах активной зоны шириной λ_p , т.е. в ближнем поле, так и при $r > a + \lambda_p$, т.е. в дальнем поле. Каждый из факторов может вызвать как упрочнение, так и разупрочнение. В типичной ситуации пластическое деформирование способствует увеличению сопротивления росту трещин, в то время как накопление микроповреждений вызывает уменьшение этого сопротивления. Эти явления учитывает простая математическая модель

$$\Gamma = \Gamma_0(1 - \omega^\alpha)[1 + (2w / \delta_f)^\beta] \quad (3.1)$$

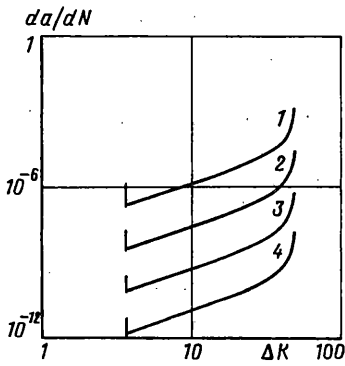
Здесь Γ_0 – сила сопротивления для неповрежденного и первоначально упругого материала. Эта сила равна произведению $2\lambda a$ на значение удельной работы разрушения, отнесенной к обеим новым разрушенным поверхностям. Микроповреждения введены скалярной мерой $0 < \omega < 1$, где значение $\omega = 0$ отвечает неповрежденному материалу, а показатель $\alpha > 0$. Последний множитель в правой части формулы (3.1) позволяет учесть пластическое упрочнение. При этом $2w(r)$ – раскрытие в пределах пластической зоны, δ_f – некоторый параметр материала, $\beta > 0$. В соотношении типа (1.6) входит значение Γ при $r = a$. Обозначая $\psi = \omega(a)$, $\delta = 2w(a)$, получим

$$\Gamma = \Gamma_0(1 - \psi^\alpha)[1 + (\delta / \delta_f)^\beta] \quad (3.2)$$

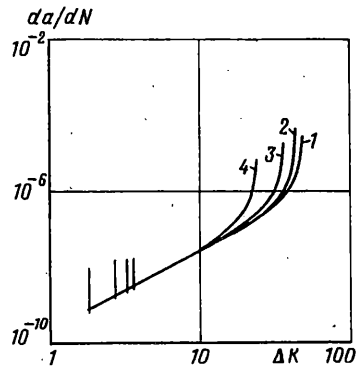
Чтобы замкнуть систему определяющих соотношений, необходимо ввести уравнение, которое описывает процесс накопления микроповреждений на фронте трещины и его продолжении. Как и в [1–3], возьмем это уравнение в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial N} = \begin{cases} 0, & \Delta \sigma_z < \Delta \sigma_{th} \\ \left(\frac{\Delta \sigma_z - \Delta \sigma_{th}}{\sigma_f} \right)^m (1 - \omega)^{-m_1}, & \Delta \sigma_z > \Delta \sigma_{th} \end{cases} \quad (3.3)$$

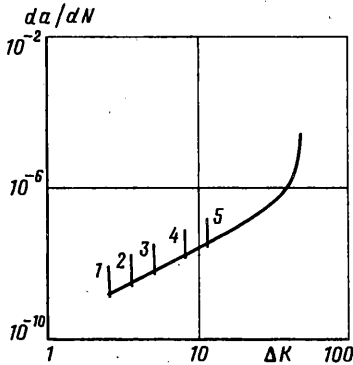
Здесь σ_f – параметр материала, имеющий размерность напряжения и характеризующий сопротивление материала накоплению повреждений, $\Delta \sigma_{th}$ – пороговое значение этого сопротивления. Показатели m и m_1 в уравнении (3.3) удовлетворяют условиям $m > 0$, $m_1 \geq 0$.



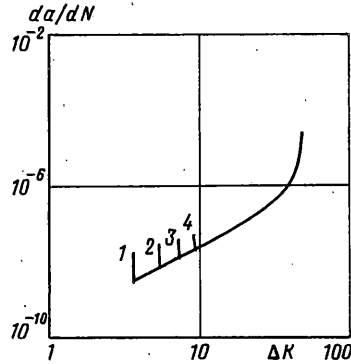
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

4. Для численных примеров возьмем следующие значения в уравнениях (2.9)–(3.3): $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\sigma_0 = 500$ МПа, $\sigma_f = 5$ ГПа, $\Delta\sigma_{th} = 250$ МПа, $\gamma_0 = 15$ кДж/м², $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $m_1 = 1$. Зависимость скорости роста трещин da/dN от размаха ΔK_I коэффициента интенсивности напряжений проиллюстрировано на фиг. 3–6. Начальный участок роста характеризуется достаточно высокой скоростью роста, после чего кривая роста быстро приближается к прямой (в логарифмических координатах). Затем рост трещины ускоряется до достижения финального разрушения. Таким образом, модель включает все три стадии роста усталостных трещин.

Уравнение прямой на среднем участке отвечает полуэмпирическому уравнению Пэриса – Эрдогана, широко используемому в инженерных расчетах. Для удобства сопоставления с предлагаемой моделью представим это уравнение в виде

$$\frac{da}{dN} = \lambda_0 \left(\frac{\Delta K}{K_{IC}} \right)^{m_p} \quad (4.1)$$

Здесь λ_0 – параметр, имеющий размерность длины, K_{IC} – характеристика трещиностойкости при квазистатическом монотонном нагружении, связанная с другими параметрами материала соотношением $K_{IC}^2 = \gamma_0 E / (1 - \nu^2)$. Показатель m_p в уравнении (4.1) определяют из опытных данных, а комплекс $\lambda_0 K_{IC}^{-m_p}$ заменяют одним эмпирическим параметром. Анализ результатов, представленных на фиг. 3–6, показывает, что при изменении исходных числовых данных в широких пределах показатель m_p на среднем участке кривых близок к двум. Так, графики на фиг. 3

построены при $\Delta\sigma_\infty = 100$ МПа, $R = 0$ и значениях $m = 2, 4, 6, 8$ (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно). Обработка кривых из фиг. 4 при $5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2} \leq \Delta K_I \leq 20 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ дает $m_p \approx 2,1$ при изменении показателя m из уравнения (3.3) в пределах $2 \leq m \leq 8$. Однако параметр λ при этом существенно изменяется, уменьшаясь от $4,08 \cdot 10^{-2}$ мм до $3,65 \cdot 10^{-7}$ мм при увеличении показателя m от двух до восьми.

Этот вывод согласуется с приближенным анализом модели, заданной уравнениями (2.9)–(3.3). В так называемом квазистационарном приближении [1] мера микроповреждений на фронте находится как

$$\psi(N) \approx \omega_{ff}(N) + \lambda_p \left(\frac{da}{dN} \right)^{-1} \left(\frac{2\sigma_0 - \Delta\sigma_{th}}{\sigma_f} \right)^m \quad (4.2)$$

Здесь $\omega_{ff}(N)$ – мера микроповреждений в дальнем поле, т.е. микроповреждений, накопленных до того, как частица материала попала в активную зону шириной λ_p . В этом приближении характерный размер λ_0 из уравнения (4.1) совпадает с λ_p . Подставим в (4.2) соотношение $G = \Gamma$, представленное в виде $K_{I,\max}^2 = K_{IC}^2(1 - \psi^\alpha)$. Решая относительно da/dN , приходим у уравнению типа (4.1):

$$\left(\frac{da}{dN} \right) \approx \lambda_p \left(\frac{2\sigma_0 - \Delta\sigma_{th}}{\sigma_f} \right)^m \left[\left(1 - \frac{K_{I,\max}^2}{K_{IC}^2} \right) - \omega_{ff}(N) \right]^{-1} \quad (4.3)$$

Если $\Delta\sigma_\infty \ll \sigma_0$, то формула (2.4) дает

$$\lambda_p = \frac{a}{8} \left(\frac{\Delta\sigma_\infty}{\sigma_0} \right)^2 \quad (4.4)$$

так что при $K_{I,\max}^2 \ll K_{IC}^2$, $\omega_{ff}(N) \ll 1$, $2\sigma_0 \gg \Delta\sigma_{th}$ уравнение (4.3) переходит в уравнение (4.1) с параметрами

$$m = 2, \quad \lambda_0 = \frac{K_{IC}^2}{16\sigma_0^2} \left(\frac{2\sigma_0}{\sigma_f} \right)^m \quad (4.5)$$

Уравнение типа (4.3) для исходной модели малоциклового усталости было получено в [10], где было показано, что $m_p = 2$ является нижним пределом показателя в уравнении (4.1). С другой стороны, параметр λ_0 из уравнения (4.1) оказывается в сильной зависимости от m , изменяясь в данном примере примерно на порядок при изменении m на единицу. Это можно проследить также на фиг. 4, из которого можно получить оценки $\lambda_0 = 4,08 \cdot 10^{-2}$ мм и $\lambda_0 = 7,67 \cdot 10^{-4}$ мм при $m = 2$ и $m = 4$ соответственно.

На фиг. 4 проиллюстрировано влияние отношения $R = \sigma_\infty^{\min}/\sigma_\infty^{\max}$ на скорость роста трещин. Диаграммы роста построены при фиксированном значении $m = 4$ и для $R = 0; 0,1; 0,25; 0,5$ (кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно). Показатель кривых на среднем участке также близок к двум; а постоянная $\lambda_0 = 8 \cdot 10^{-4}$. Однако начальные и конечные участки кривых заметно изменяются в зависимости от R . Уравнение (4.1) с параметрами (4.4) и (4.5) этот эффект не включает. Влияние R на конечном участке содержится в уравнении (4.3). Чтобы включить это влияние на начальном участке, нужно учесть, что $\Delta\sigma_{th}$ и σ_f , вообще, должны зависеть от R . Типичная зависимость, рассчитанная на то, чтобы описать так называемый «эффект закрытия трещины», имеет вид

$$\Delta\sigma_{th} = \Delta\sigma_{th}^0 (1 - R)^\mu \quad (4.6)$$

где $\Delta\sigma_{th}^0$ – пороговое значение при $R = 0$, а показатель $\mu > 0$. С учетом формул (4.4)–(4.6) уравнение (4.1) может быть переписано следующим образом ($K_{I,max}^2 \ll K_{IC}^2$, $\omega_{ff}(N) \ll 1$):

$$\frac{da}{dN} = \lambda \left[\frac{\Delta K - \Delta K_{th}^0 (1 - R)^\mu}{K_{IC}} \right]^{m_p} \quad (4.7)$$

Влияние других условий задачи на da/dN , в частности, влияние начального размера трещины $a(0) = a_0$ и размаха номинального напряжения $\Delta\sigma_\infty$ проявляется существенно лишь на начальном участке роста. Это проиллюстрировано на фиг. 5; построенной при $a_0 = 0,5; 1; 2; 5$ и 10 мм, и фиг. 6, построенной при $\Delta\sigma_\infty = 100, 150, 200$ и 250 МПа. Соответствующие кривые на фиг. 5 и 6 отмечены последовательно цифрами $1, 2, \dots$. Начальный участок всех кривых на фиг. 3–6 характеризуется несколько ускоренным ростом трещины (в том числе и при достаточно больших начальных размерах). Отчасти это связано с характером модели Леонова – Панасюка – Дагдейла (фиг. 1). В течение всей инкубационной стадии, т.е. пока трещина не растет, накопление микрповреждений происходит интенсивно и почти равномерно в пределах всей активной зоны. Накопление микрповреждений происходит также и в пределах пластической зоны. Поэтому после первого страгивания трещина быстро продвигается на расстояние порядка λ_p . Затем трещина начинает распространяться в материале с первоначально низким уровнем микрповреждений. Все это отражено на фиг. 3–6.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант RLS000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 153–160.
2. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.
3. Болотин В.В. Объединенные модели в механизме разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 127–137.
4. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел в трещинах. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
5. Wnuk M. Nature of fracture in relation to the total potential energy // British J. Appl. Phys. Ser. D. 1968. V. 1. № 2. P. 217–236.
6. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
7. Rivinage G. Mécanique Elastoplastique de la Rupture. Toulouse: Cepadues, 1989. 501 p.
8. Болотин В.В., Ковех В.М. Численное моделирование роста усталостных трещин в среде с микрповреждениями // Изв. АН МТТ. 1993. № 2. С. 132–142.
9. Болотин В.В. Об обобщенных силах в аналитической механике разрушения // Новожиловский сборник / Под ред. Н.С. Соломенко. СПб: Судостроение, 1992. С. 161–170.
10. Болотин В.В. Модель усталостной трещины с концевой зоной // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 12. С. 61–67.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.1994