

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1996**

УДК 539.3

© 1996 г. Г.А. ВАНИН

**ГРАДИЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ПЛОСКОГО
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОУРОВНЕВЫХ СРЕД**

Реальные среды представляют собой многоуровневые системы и корректный учет в них межуровневого взаимодействия приводит к необходимости создания моделей, учитывающих влияние более тонких элементов их структуры. Плоское деформированное состояние, например, в волокнистых средах достигается в поперечном сечении линейно-армированных композитов при двумерном поперечном напряженном состоянии [1]. Поэтому учет высокоградиентных полей в однотипных композитах возможен при обобщении традиционных моделей механики в условиях плоского деформированного состояния. В прошлом попытки решения подобных задач предпринимали в рамках микрополярной и моментной теорий упругости и не привели к законченным результатам [2–7]. Ниже решение задачи о межуровневом взаимодействии структурно-неоднородных сред в приближении моментной теории упругости получено как частный случай градиентной теории многоуровневых композитов [8]. При этом выявлены ограничения, присущие микрополярной теории упругости и установлены эффекты, имеющие практический интерес. В качестве приложений теории найдено решение задачи о плоском деформированном состоянии двухуровневых композиционных материалов с двоякопериодической упаковкой волокон и рассмотрена задача о концентрации напряжений около кругового отверстия в пластине из композита в случае одноосного растяжения и учета влияния градиентного состояния на более высоком масштабном уровне.

1. Поперечные состояния волокнистой среды рассмотрим в случае, когда одинаковые волокна находятся в совершенном контакте с матрицей, а их оси расположены в узлах гексагональной сетки. Внутреннее поле в элементарной ячейке представим в виде суммы рассеянной и активной составляющих, причем последнюю в виде разложения [8]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ik} \\ U_k \end{pmatrix} = \exp(x\nabla_2 + y\nabla_3) \begin{pmatrix} \sigma_{ik} \\ U_k \end{pmatrix} \quad (i, k = 2, 3) \quad (1.1)$$

Удерживая здесь начальные члены, получим первое приближение, аналогичное моментной теории упругости [2, 3]. Для дальнейшего выпишем их в явном виде

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \overset{\circ}{\sigma}_{22} + \alpha_1 x + \alpha_2 y, & \alpha_1 &= \nabla_2 \sigma_{22} - \nabla_3 \sigma_{23} \\ \sigma_{33} &= \overset{\circ}{\sigma}_{33} + \beta x + \alpha_2 y, & \beta &= \nabla_3 \sigma_{22}, \quad \beta = \nabla_2 \sigma_{33} \\ \sigma_{23} &= \overset{\circ}{\sigma}_{23} - \alpha_2 x - \alpha_1 y, & \alpha_2 &= \nabla_3 \sigma_{33} - \nabla_2 \sigma_{23} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Соответствующие разложения смещений и составляющие деформированного состояния будут

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^0 + x_n(\varepsilon_{kn} + \omega_{kn}) + x_n x_i / 2 (\partial \varepsilon_{ki} / \partial x_n + \partial \omega_{ki} / \partial x_n) + \dots \\ \varepsilon_{ik} &= \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i), \quad \omega_{ik} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_k - \partial u_k / \partial x_i) \\ x_2 &= x, \quad x_3 = y, \quad \omega_{32} = \Omega \quad (i, k, n = 2, 3) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Градиентные составляющие однородных смещений среды определяются суммой двух состояний согласно (1.2):

$$U_j = (u_2 + iu_3)_j = \hat{\kappa} A_j z^2 - 2\bar{A}_j z\bar{z} + C_j \bar{z}^2 \quad (1.4)$$

$$A_1 = (\alpha_1 - i\alpha_2)(16G_{23})^{-1}, \quad A_2 = (\beta - i\alpha)(16G_{23})^{-1}, \quad C_1 = 3A_1$$

$$C_2 = -A_2, \quad z = x + iy \quad (j = 1, 2)$$

где $\hat{\kappa}$, G_{23} – интегральные постоянные, метод определения которых через свойства компонентов волокнистой среды известен [1]. Рассеянную составляющую поля составим из суммы функций, убывающих от каждого центра волокна, поэтому в локальной системе координат в качестве разрешающих выберем функции Колосова [9] $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\begin{pmatrix} \Phi(z) \\ \Psi(z) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} z^{-k} \quad (1.5)$$

Разложения комплексных потенциалов $\Phi_a(z)$, $\Psi_a(z)$, регулярные в центре волокна, строятся аналогично [1]. Коэффициенты разложения функций устанавливаются соотношениями совершенного контакта компонентов среды

$$(\sigma_n - i\sigma_{ns})^+ = (\sigma_n - i\sigma_{ns})^- \quad U^+ = U^-$$

Обобщенные моменты \hat{m}_{ik} , сопряженные соответствующим кривизнам $\hat{\kappa}_{ik}$, вводим с помощью принципа усреднения высокоградиентных полей [8]:

$$\hat{\sigma}_{ik} \hat{\kappa}_{ik} + \hat{m}_{ik}^{sn} \hat{\kappa}_{ik}^{sn} = \operatorname{Re} \frac{i}{2F} \oint_{L_F} (\sigma U - \bar{\Sigma} \bar{U}) d\bar{z} \quad (1.6)$$

$$\sigma = \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad \Sigma = \sigma_{33} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{23}$$

Здесь и везде в дальнейшем усредненные величины отмечаются угловыми скобками над буквами, L_F и F – граничный контур и площадь выделенного элемента структуры среды. Главные члены асимптотических разложений интегральных моментов и соответствующих кривизн по степеням концентрации волокон ζ представим для двух состояний (1.4) раздельно

$$\begin{pmatrix} \hat{m}'_{23} \\ \hat{m}'_{32} \end{pmatrix} = \frac{J_2 L}{\hat{\kappa} + 1} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\kappa}'_{23} \\ \hat{\kappa}'_{32} \end{pmatrix} = \frac{(\hat{\kappa} + 1)(p + q)}{8GL} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$L = \hat{\kappa} + 1 + \zeta^2 [\hat{\kappa}(\kappa - \kappa_a G / G_a)(1 + \kappa_a G / G_a)^{-1} + (1 - G / G_a)(\kappa + G / G_a)^{-1}] + \dots \quad (1.7)$$

$$p = \kappa + \zeta^2 (\kappa - 1)(\kappa - \kappa_a G / G_a)(1 + \kappa_a G / G_a)^{-1} - \zeta^4 (\kappa - \kappa_a G / G_a)^2 (1 + \kappa_a G / G_a)^{-2} + \dots$$

$$q = 1 - \zeta^2 (\kappa - 1)(1 - G / G_a)(\kappa + G / G_a)^{-1} - \zeta^4 [\kappa + 8(1 - \zeta)^2](1 - G / G_a)^2 (\kappa + G / G_a)^{-2}$$

$$\kappa_{23} = \partial \Omega / \partial y, \quad \kappa_{32} = \partial \Omega / \partial x, \quad J_2 = \frac{1}{F} \int_F x^2 dF$$

Определяющие соотношения состояний α , β будут

$$\begin{pmatrix} \hat{m}'_{23} \\ \hat{m}'_{32} \end{pmatrix} = \frac{8GJ_2 L^2}{(\hat{\kappa} + 1)^2 (p + q)} \begin{pmatrix} \hat{\kappa}'_{23} \\ \hat{\kappa}'_{32} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Здесь и везде в дальнейшем индексом a отмечены величины, относящиеся к во-

локнам, без индекса – величины для матрицы или ко всем компонентам одновременно. Состояния α_1 , α_2 характеризуются аналогичными связями между усредненными характеристиками

$$\begin{pmatrix} \hat{m}_{23}'' \\ \hat{m}_{32}'' \end{pmatrix} = \frac{J_2 L_0}{\hat{\kappa} + 1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x}_{23}'' \\ \hat{x}_{32}'' \end{pmatrix} = \frac{(\hat{\kappa} + 1)(p + 9q)}{8G L_0} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$L_0 = \hat{\kappa} + 9 - 3\zeta^2 / 2(\hat{\kappa} - 1)(1 - G/G_a)(\kappa + G/G_a)^{-1} + \\ + \zeta^2 / 2(\hat{\kappa} - 5)(\kappa - \kappa_a G/G_a)(1 + \kappa_a G/G_a)^{-1}$$

Определяющие соотношения состояний α_1 , α_2 :

$$\begin{pmatrix} \hat{m}_{23}'' \\ \hat{m}_{32}'' \end{pmatrix} = \frac{8G J_2 L_0^2}{(\hat{\kappa} + 1)^2 (p + 9q)} \begin{pmatrix} \hat{x}_{23}'' \\ \hat{x}_{32}'' \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Введенные интегральные постоянные композита $\hat{\kappa}$ и G_{23} в принятом приближении для сред с гексагональной упаковкой определяются характеристиками составляющих компонентов [1]:

$$G_{23} = G[\kappa + \zeta + (1 - \zeta)G/G_a][(1 - \zeta)\kappa + (1 + \zeta\kappa)G/G_a]^{-1} + \dots$$

$$\hat{\kappa} = 3 - 4(v_{23} + v_{12}v_{21})(1 + v_{23})^{-1}, \quad v_{12} = v_{21}E_2/E_1$$

$$v_{21} = v - (\kappa + 1)(v - v_a)\zeta d + \dots, \quad d = [2 + \zeta(\kappa - 1) + (1 - \zeta)(\kappa_a - 1)G/G_a]^{-1} \quad (1.10)$$

$$E_2^{-1} = v_{21}^2/E_1 + (4G_{23})^{-1} + (8G)^{-1}[2(1 - \zeta)(\kappa - 1) + (\kappa_a - 1)(\kappa_a - 1 + 2\zeta)G/G_a]d$$

$$v_{23} = 1 - 2v_{12}v_{21} - E_2(4G)^{-1}\{\kappa - 1 - (\kappa + 1)\zeta[\kappa - 1 - (\kappa_a - 1)G/G_a]d\} + \dots$$

$$E_1 = \zeta E_a + (1 - \zeta)E - 8G\zeta(1 - \zeta)(v - v_a)d + \dots$$

Последнее слагаемое в формуле для E_1 обычно пренебрежимо мало. Составляющие кривизн выражим через суммарные кривизны с использованием их связи с моментами

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_{23} \\ \hat{x}'_{32} \end{pmatrix} = \frac{(\hat{\kappa} + 1)^2(p + q)}{8G J_2 L^2} \begin{pmatrix} \hat{m}'_{23} \\ \hat{m}'_{32} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x}''_{23} \\ \hat{x}''_{32} \end{pmatrix} = \frac{(\hat{\kappa} + 1)^2(p + 9q)}{8G J_2 L_0^2} \begin{pmatrix} \hat{m}''_{23} \\ \hat{m}''_{32} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$\hat{x}_{ik} = \hat{x}'_{ik} + \hat{x}''_{ik} = \hat{x}'_{ik}(1 + \lambda), \quad \lambda = (p + 9q)(p + q)^{-1} L^2 / L_0^2$$

Вводим приведенные моменты и составляем определяющие соотношения относительно новых параметров

$$\hat{m}_{ik} = (1 + \lambda)^{-1}(\hat{m}'_{ik} + \lambda\hat{m}''_{ik}) \quad (1.12)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{m}_{23} \\ \hat{m}_{32} \end{pmatrix} = 2R_0 \begin{pmatrix} \partial / \partial y \\ \partial / \partial x \end{pmatrix} \Omega, \quad R_0 = \frac{4G J_2 L^2 L_0^2}{(\hat{\kappa} + 1)^2[(p + q)L_0^2 + (p + 9q)L^2]} \quad (1.13)$$

Основные уравнения и естественные краевые условия для сред первого уровня с учетом начальных градиентных состояний устанавливаем путем варьирования обобщенного функционала

$$\delta W = \int f df (\hat{\sigma}_{ik} \delta \hat{e}_{ik} - \hat{X} \delta \hat{u}_2 - \hat{Y} \delta \hat{u}_3 + \hat{m}_{23} \delta \hat{x}_{23} + \hat{m}_{32} \delta \hat{x}_{32}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_f df \left[\delta \hat{u}_2 \left(-\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\sigma}_{23}}{\partial y} - \hat{X} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{m}_{32}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{m}_{23}}{\partial y^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta \hat{u}_3 \left(-\frac{\partial \hat{\sigma}_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\sigma}_{33}}{\partial y} - \hat{Y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{m}_{23}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{m}_{32}}{\partial x^2} \right) \right] + \\
&\quad + \oint_{L_f} \delta \hat{u}_2 \left[\hat{\sigma}_{22} dy - \left(\hat{\sigma}_{23} + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{m}_{23}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{m}_{32}}{\partial x} \right) dx \right] + \oint_{L_f} \delta \Omega (\hat{m}_{32} dy - \hat{m}_{23} dx) + \\
&\quad + \oint_{L_f} \delta \hat{u}_3 \left[\left(\hat{\sigma}_{23} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{m}_{23}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{m}_{32}}{\partial x} \right) dy - \hat{\sigma}_{33} dx \right]
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Откуда следуют уравнения равновесия, полученные с учетом (1.12):

$$\partial \hat{\sigma}_{22} / \partial x + \partial \hat{\sigma}_{23} / \partial y + R_0 \partial \nabla^2 \Omega / \partial y + X = 0 \tag{1.15}$$

$$\partial \hat{\sigma}_{23} / \partial x + \partial \hat{\sigma}_{33} / \partial y - R_0 \partial \nabla^2 \Omega / \partial x + Y = 0$$

Рассмотрим два метода решения основных уравнений для трансверсально-изотропной среды, аналогичные известным соотношениям в моментной изотропной теории упругости. Если объемные силы X, Y имеют потенциал $X = -\partial V / \partial x, Y = -\partial V / \partial y$, то уравнения (1.15) удовлетворяются двумя вещественными функциями Φ и $F = 2R_0\Omega$:

$$\hat{\sigma}_{22} = \partial^2 \Phi / \partial y^2 + V - \partial^2 F / \partial x \partial y, \quad \hat{\sigma}_{33} = \partial^2 \Phi / \partial x^2 + V + \partial^2 F / \partial x \partial y \tag{1.16}$$

$$\hat{\sigma}_{23} = -\partial^2 \Phi / \partial x \partial y + \frac{1}{2} \partial^2 F / \partial x^2 - \frac{1}{2} \partial^2 F / \partial y^2$$

Подстановка (1.16) в уравнение неразрывности

$$(1 + v_{23}) (\partial^2 \hat{\sigma}_{22} / \partial y^2 + \partial^2 \hat{\sigma}_{33} / \partial x^2 - 2 \partial^2 \hat{\sigma}_{23} / \partial x \partial y) = (v_{23} + v_{12}v_{21}) \nabla^2 \hat{\sigma} \tag{1.17}$$

приводит к разрешающему уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi + (1 - v_{23} - 2v_{12}v_{21})(1 - v_{12}v_{21})^{-1} \nabla^2 V = 0 \tag{1.18}$$

Уравнение для F построим согласно формул (1.16) и соотношений

$$\partial \Omega / \partial y = (2R_0)^{-1} \partial F / \partial y = \partial \varepsilon_{33} / \partial x - \partial \varepsilon_{23} / \partial y$$

$$\partial \Omega / \partial x = (2R_0)^{-1} \partial F / \partial x = \partial \varepsilon_{23} / \partial x - \partial \varepsilon_{22} / \partial y$$

$$(1 - l^2 \nabla^2) \partial F / \partial x = -2R_0 / E_2 \partial / \partial y [(1 - v_{12}v_{21}) \nabla^2 \Phi + (1 - v_{23} - 2v_{12}v_{21}) V]$$

$$(1 - l^2 \nabla^2) \partial F / \partial y = 2R_0 / E_2 \partial / \partial x [(1 - v_{12}v_{21}) \nabla^2 \Phi + (1 - v_{23} - 2v_{12}v_{21}) V]$$

Откуда следует

$$(1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 F = 0 \tag{1.19}$$

$$l^2 = R_0 (2G_{23})^{-1} = 2J_2 L^2 L_0^2 G / G_{23} (\hat{\alpha} + 1)^{-2} [(p + q)L_0^2 + (p + 9q)L^2]^{-1}$$

Более простые соотношения получаются при использовании функций комплексного переменного. Комплексное преобразование уравнений равновесия (1.15) и известных соотношений

$$\partial\hat{\sigma}_{22}/\partial x + \partial\hat{\sigma}_{23}/\partial y = (\hat{\lambda} + G_{23})\partial\hat{\epsilon}/\partial x + G_{23}\nabla^2\hat{u}_2$$

$$\partial\hat{\sigma}_{23}/\partial x + \partial\hat{\sigma}_{33}/\partial y = (\hat{\lambda} + G_{23})\partial\hat{\epsilon}/\partial y + G_{23}\nabla^2\hat{u}_3, \quad \epsilon = \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

приводит к одному уравнению

$$2G_{23}\partial^2U/\partial z\partial\bar{z} + (\hat{\lambda} + G_{23})\partial\hat{\epsilon}/\partial\bar{z} - iR_0\partial\nabla^2\Omega/\partial\bar{z} - \partial V/\partial\bar{z} = 0$$

Непосредственным интегрированием этого уравнения с использованием соотношения $2\partial U/\partial z = \frac{1}{2}(\hat{\lambda} + G_{23})^{-1}\hat{\sigma} + 2i\Omega$ находим зависимость компонентов состояния от трех неизвестных функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и Ω :

$$\hat{\sigma} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + (1 - \hat{v})^{-1}V$$

$$\hat{\Sigma} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] - 2\frac{\hat{\kappa}-1}{\hat{\kappa}+1}\int\frac{\partial V}{\partial z}d\bar{z} + 4(\hat{\kappa}+1)l^2\varphi'''(z) + 8iR_0\partial^2\Omega/\partial z^2, \quad (1.20)$$

$$\nabla^2\Omega - l^{-2}\Omega = 0$$

$$2G_{23}U = \hat{\kappa}\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z) + \frac{\hat{\kappa}-1}{\hat{\kappa}+1}\int Vdz + \\ + 4iR_0\partial\Omega/\partial\bar{z} - 2(\hat{\kappa}+1)l^2\overline{\varphi''(z)} = 2G_{23}(u + 4il^2\partial\Omega/\partial\bar{z})$$

Подобные соотношения без определения параметров для однородной изотропной среды на основе моментной теории упругости были предложены Миндлиным [3, 6]. Путем их сопоставлений можно установить ограничения и отличия моментных и градиентной теорий упругости. Чтобы получить соотношения моментной теории упругости, необходимо ввести в (1.15) и (1.16) несимметричные напряжения

$$\begin{pmatrix} \hat{\tau}_{23} \\ \hat{\tau}_{32} \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_{23} \pm R_0\nabla^2\Omega, \quad \hat{\tau}_{23} - \hat{\tau}_{32} = -\partial\hat{m}_{32}/\partial x - \partial\hat{m}_{23}/\partial y$$

$$\hat{m}_{32} - i\hat{m}_{23} = -2i(\hat{\kappa}+1)l^2\varphi''(z) + 4R_0\partial\Omega/\partial z$$

$$F = 2R_0\Omega - i(\hat{\kappa}+1)l^2[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}] \quad (1.21)$$

Из этих соотношений следует, что перестановка индексов несимметричных касательных напряжений $\hat{\tau}_{ik}$ вследствие того, что Ω – антисимметричный тензор второго ранга приводит к взаимным переходам напряжений друг в друга. Отметим, что введение несимметричных напряжений не приводит к принципиальным изменениям в решении поставленной задачи. Введенное ранее определение постоянной $2B = R_0$ – изгибно-крутильный модуль – является недостаточным. Из приведенного вывода следует, что для сред с упаковкой волокон, отличающейся от гексагональной, число упругих постоянных будет несколько при учете только первых градиентных членов состояния. С учетом высших градиентов полей число упругих параметров образует множество [8]. Поэтому в дальнейшем новые параметры будем называть

$$\partial \bar{u} / \partial n - i(1 - \bar{\Delta})G_{-1}^{23}(\phi_{\theta}'' - e^{-i\theta}) = 0 \quad (1.23)$$

$$0 = (s \partial / \partial s) - R^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial n - \partial_1 \bar{u} / \partial s +$$

$$\phi' + \phi'' - e^{-2i\theta} [\bar{\Delta} \phi'' + \bar{\Delta}' + 2(\alpha + 1) \bar{\Delta} \phi''] + 2iR^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial n +$$

а начинио брипакаам хепес брејенхие фынкунн

$$\bar{Q}'' - i\bar{Q}' = 0, M'' = 0$$

Т панхнхие ючорнаа бројоффорто кпака ($z \in s$):

$$R^0 / R^0 \partial_2 \bar{u} / \partial n - i(1 - \bar{\Delta})G_{-1}^{23}(\phi_{\theta}'' - e^{-i\theta}) = [(\phi_{\theta}'' - e^{-i\theta}) - i(1 - \bar{\Delta})G_{-1}^{23}(\phi_{\theta}'' - e^{-i\theta})]$$

$$- R^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial n - \partial_1 \bar{u} / \partial s = (\alpha + 1)(1 - G_{-1}^{23} / G_{+1}^{23})$$

$$+ 2(\alpha + 1) \bar{\Delta} \phi'' + 2iR^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial n + \partial_1 \bar{u} / \partial s +$$

$$\phi' + (1 + \alpha) G_{-1}^{23} / G_{+1}^{23} (1 - G_{-1}^{23} / G_{+1}^{23}) - \phi'' - e^{-2i\theta} [\bar{\Delta} \phi'' + \bar{\Delta}' +$$

$$+ \partial_1 \bar{u} / \partial n - \partial_1 \bar{u} / \partial s - R^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial n - \partial_1 \bar{u} / \partial s +$$

$$- \partial_1 \bar{u} / \partial n - e^{-2i\theta} [\bar{\Delta} \phi'' + \bar{\Delta}' + 2(\alpha + 1) \bar{\Delta} \phi''] + 2iR^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s +$$

$$- \partial_1 \bar{u} / \partial s - R^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s - R^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial n -$$

$$\phi' + \phi'' - e^{-2i\theta} [\bar{\Delta} \phi'' + \bar{\Delta}' + 2(\alpha + 1) \bar{\Delta} \phi''] + 2iR^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s +$$

брисам хепес падемаронне фынкунн

$$(\bar{Q}'' - i\bar{Q}')_+ = (\bar{Q}'' - i\bar{Q}')_- \quad (sp / \bar{U}d) = (+sp / \bar{U}d), \quad M'_+ = M'_-, \quad \bar{Q}_+ = \bar{Q}_-$$

хоро соктохнн котрактнхимик спбн

хомжин и жире кпиронн. Кпакеъие ючорнаа бирепумехнорто котракта с ынетрон традицнх
тие P'' , P''_s – пакыци кпиренхби кпироффорто котракта с ынетрон традицнх
 $\partial / \partial s$ – ыпонброяхие то

$$M'' = m^{32} \cos \theta + m^{23} \sin \theta = 2R^0 \partial / \partial n \{\bar{Q} - i(1 - \bar{\Delta})G_{-1}^{23}(\phi, z) -$$

$$- R^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial n - \partial_1 \bar{u} / \partial s\}$$

$$+ 2(\alpha + 1) \bar{\Delta} \phi''(z) + 2iR^0 \partial_2 \bar{u} / \partial s + \partial_1 \bar{u} / \partial n + \partial_1 \bar{u} / \partial s -$$

$$+ (z) \phi' + (z) \phi'' - (z) \phi' + (z) \phi = e^{2i\theta} (\bar{Q}'' - i\bar{Q}')$$

$$\bar{Q}'' - i\bar{Q}' = (\bar{Q}'' - i\bar{Q}')$$

$$\bar{Q}'' = \bar{Q}'' \cos \theta + (\bar{Q}'' + \bar{Q}'' \partial m^{32} / \partial x + \bar{Q}'' \partial m^{23} / \partial y) \sin \theta$$

$$\oint ds (\bar{Q}'' \partial u^2 + \bar{Q}'' \partial u^3 + M'' \bar{u}^2) = \oint ds (\bar{Q}'' \partial u^2 + \bar{Q}'' \partial u^3 + M'' \bar{u}^2)$$

сгебрн. Котрыхпн нхтерпай (1.14) ыпогспасыем к бнртн

хочтохнхимин непорто, биропоро и тар жате традицнхимик соктохнн ыенохногонн

Число и порядок операторов, входящих в краевые соотношения (1.22) и (1.23), согласуются с порядком основных дифференциальных уравнений. Параметр l первого градиентного состояния играет фундаментальную роль в микрополярной теории упругости и пропорционален радиусу окружности, ограничивающей равновеликую площадь гексагональной ячейки структуры

$$l = R(\hat{\alpha} + 1)^{-1} LL_0(G/2)^{1/2} \{G_{23}[(p + q)L_0^2 + (p + 9q)L^2]\}^{-1/2} \quad (1.24)$$

Зависимость l/R от ζ и упругих характеристик волокон для композита с полимерной матрицей ($v = 0,382$) представлена на фиг. 1, где верхняя кривая приведена для пористой перфорированной среды ($G_a = 0$), а нижняя для среды с абсолютно жесткими волокнами ($G_a = \infty$). Как видно из проведения кривых, в пористых средах достигается большее влияние градиентных эффектов. Подобный вывод согласуется и с данными градиентной теории этих сред при продольном сдвиге [8].

2. В качестве приложений градиентной механики рассмотрим две задачи для двухуровневых волокнистых композитов с двоякоперiodической структурой. Обозначения параметров решетки на втором масштабном уровне приведены на фиг. 2. Полагаем, что среда находится в плоском деформированном состоянии, определяемом функциями $\phi'_0(z)$ и $\psi'_0(z)$.

1. Задача о напряженном состоянии среды с учетом межуровневого взаимодействия и градиентного состояния на первом уровне. В этих условиях, полагая $V = 0$, напряженное состояние на втором уровне структуры будет двоякоперiodическим

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \Sigma \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} \sigma \\ \Sigma \end{pmatrix}_{z+\omega_j} \quad (j = 1, 2)$$

где ω_1 и $\omega_2 = b\omega_1 e^{-i\alpha}$ – периоды на втором уровне. Разрешающие функции будут удовлетворять согласно (1.20) условиям двойкой периодичности

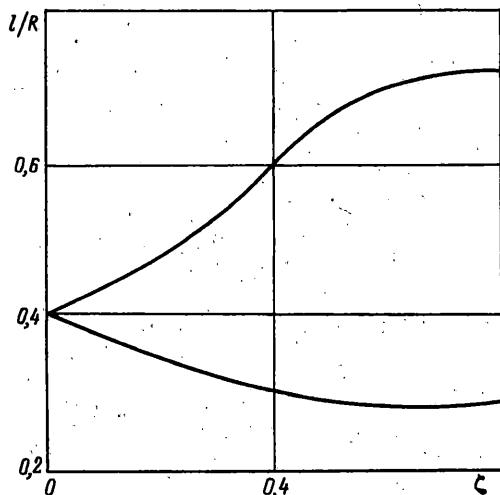
$$\phi'(z) = \phi'(z + \omega_j), \quad \Omega''(z) = \Omega''(z + \omega_j) \quad (2.1)$$

$$[\bar{z}\phi'' + \psi' + 2(\hat{\alpha} + 1)l^2\phi'']_z = [\bar{z}\phi'' + \psi' + 2(\hat{\alpha} + 1)l^2\phi'']_{z+\omega_j}$$

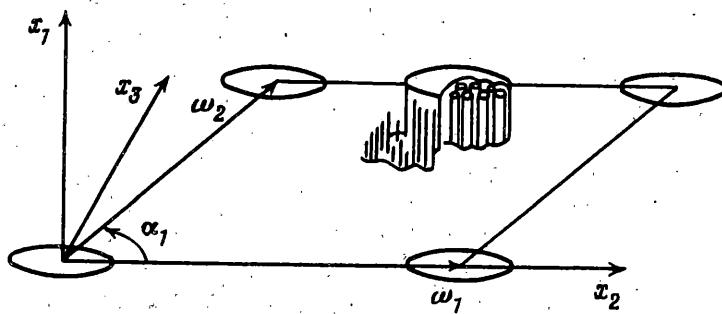
Первое и последнее условия (2.1) удовлетворяются автоматически при введении эллиптических функций [1, 8, 10, 11]. Если отдельная ячейка структуры содержит N элементов неоднородности волокон, то полагаем [1]:

$$\begin{pmatrix} \phi'(z) \\ \psi'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 \\ D_0 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \left[\begin{pmatrix} C_{ks} \\ D_{ks} \end{pmatrix} \zeta^{(s-1)}(z - a_k) - \begin{pmatrix} 0 \\ C_{ks} \end{pmatrix} \eta^{(s)}(z - a_k) \right] + \begin{pmatrix} \phi'_0 \\ \psi'_0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

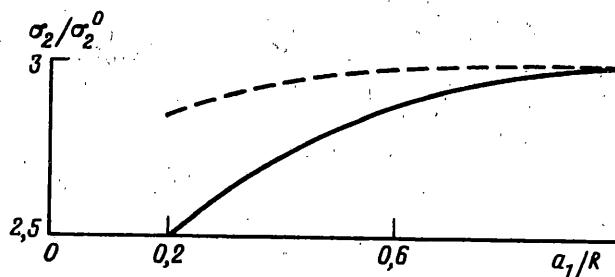
$$\zeta(z) = \frac{1}{z} \sum_m \sum_n \left(\frac{1}{z-P} + \frac{1}{P} + \frac{z}{P^2} \right), \quad \eta(z) = \frac{1}{z} \sum_m \sum_n \bar{P} \left(\frac{1}{z-P} + \frac{z^2}{P^3} + \frac{z}{P^2} \right).$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$P = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \dots)$$

Здесь a_k – координаты центра k -го волокна в отдельной ячейке; $\zeta^{(s)}(z)$ – s -я производная дзета-функции Вейерштрасса [9]; штрих над показателем суммы означает, что слагаемое $m = n = 0$ должно быть опущено, $\eta^{(s)}(z)$ – s -я производная функции $\eta(z)$, введенная ранее [1, 9, 11]. Постоянные C_{ks} и D_{ks} определяются краевыми условиями (1.22) и соотношениями усреднения (1.6). Для определения смещений непосредственно интегрируем (2.2):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_z \\ \Psi_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_0 \\ D_0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \left[\begin{pmatrix} C_{kl} \\ D_{kl} \end{pmatrix} \ln \sigma(z - a_k) - \begin{pmatrix} 0 \\ C_{kl} \end{pmatrix} \eta(z - a_k) \right] - \\ &- \sum_{k=1}^N \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \left[\begin{pmatrix} C_{ks} \\ D_{ks} \end{pmatrix} \zeta^{(s-2)}(z - a_k) - \begin{pmatrix} 0 \\ C_{ks} \end{pmatrix} \eta^{(s-1)}(z - a_k) \right] + \begin{pmatrix} \Phi_0(z) \\ \Psi_0(z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\sigma(z) = z \prod_{m,n} \left(1 - \frac{z}{P} \right) \exp \left(\frac{z}{P} + \frac{z^2}{2P^2} \right), \quad \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} C_{kl} \\ D_{kl} \end{pmatrix} = 0$$

В простой решетке, содержащей только одно включение $N = 1$ с началом координат в центре $a_k = 0$, двойные суммы в (2.2) и (2.3) заменяются одинарными. Функция Ω , характеризующая влияние градиентного состояния матрицы на первом масштабном уровне, строится для круговых волокон в локальной системе цилиндрических координат r, θ с началом в центре волокна

$$\Omega = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p K_p(rL^{-1}) e^{ip\theta} \quad (2.4)$$

где A_p – постоянные, $K_p(L^{-1}r)$ – функция Макдоальда [9]. В случае множества включений в одной ячейке решение строится путем наложения функций (2.4), теоремы сложения функций Макдоальда и ищется представление A_p в виде периодических функций параметров решетки. Примеры подобных построений приведены в работах автора [1]. Учитывая, что функции Макдоальда экспоненциально убывают при удалении от центра включения, при достаточном удалении волокон второго уровня друг от друга в общем решении можно ограничиться только локальными функциями (2.4), присоединенными к каждому центру включения. Погрешность подобного упрощения может быть оценена при заданном l и расстояний между центрами смежных волокон. Поле в отдельном волокне, состоящем из регулярно размещенных волокон, определяемое функциями $\varphi_a'(z)$ и $\psi_a'(z)$, получаем в виде степенных рядов z , а функцию Ω_a строим в виде

$$\Omega_a = \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p J_p(r/L_a) e^{ip\theta} \quad (2.5)$$

где $J_p(r/L_a)$ – модифицированная функция Бесселя [9]. Введенные постоянные удовлетворяются краевыми условиями совершенного контакта (1.22), а также условиями усреднения напряжений (1.6), преобразованными с учетом двойкой периодичности напряженного состояния (2.1) на втором масштабном уровне

$$\hat{\sigma}_{ik}\hat{\epsilon}_{ik} = \operatorname{Re} \frac{i}{4F} \left[-(\omega_2\hat{\epsilon} + \bar{\omega}_2\hat{e}) \int_0^{\omega_1} \sigma d\bar{z} + (\bar{\omega}_2\hat{\epsilon} + \omega_2\hat{e}) \int_0^{\omega_1} \bar{\Sigma} d\bar{z} + \right. \\ \left. + \omega_1(\hat{\epsilon} + \hat{e}) \int_0^{\omega_2} \sigma d\bar{z} - \omega_1(\hat{\epsilon} + \hat{e}) \int_0^{\omega_2} \bar{\Sigma} d\bar{z} \right] \quad (2.6)$$

$$e = \epsilon_{22} - \epsilon_{33} + 2i\epsilon_{23}$$

Обозначим приращение функции $\varphi(z)$ на периодах решетки $\Delta_j\varphi(z) = \varphi(z + \omega_j) - \varphi(z)$. Для сложных решеток приращения комплексных потенциалов будут [1]:

$$\begin{pmatrix} \Delta_j\varphi(z) \\ \Delta_j\Psi(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 \\ D_0 \end{pmatrix} \omega_j - \sum_{k=1}^N \left[\delta_j \begin{pmatrix} C_{k1}a_k + C_{k2} \\ D_{k1}a_k + D_{k2} \end{pmatrix} + \gamma_j \begin{pmatrix} 0 \\ C_{k1}a_k + C_{k2} \end{pmatrix} \right] + \\ + \bar{\omega}_j \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ C_{ks} \end{pmatrix} \zeta^{(s-1)}(z - a_k) + \begin{pmatrix} \Delta_j\Phi_0(z) \\ \Delta_j\Psi_0(z) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\delta_j = \Delta_j\zeta(z), \quad \Delta_j\eta(z) = \bar{\omega}_j\zeta(z) - \gamma_j z + \gamma_2(\bar{\omega}_j\delta_j - \omega_j\gamma_j)$$

Значения параметров для гексагональной структуры $\delta_1 = \pi(\omega_1 \sin \pi/3)^{-1}$, $\delta_2 = \delta_1 e^{-i\alpha_1}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$; для тетрагональной – $\delta_1 = \pi/\omega_1$, $\delta_2 = -i\delta_1$, $\gamma_2 = i\gamma_1$.

Вычисление интегралов (2.6) существенно упрощается при использовании приращений потенциалов (2.7). Приближенное вычисление интегралов с функцией Ω осуществляется путем замены контура интегрирования каноническими кривыми. Из соотношений (1.20), (2.2) и (2.4) вытекает, что напряженное состояние на втором уровне благодаря учету локального градиентного состояния вблизи границ контакта компонентов отличается от традиционных состояний в периодических структурах.

2. Задача о влиянии масштабных эффектов, определяемых степенью дисперсии элементов структуры на механические характеристики двухуровневых сред.

Цель исследования – определение изменения интегральных параметров двухуровневой среды при варьировании размеров компонентов на различных масштабных уровнях и постоянном их объемном содержании. Решение этой задачи строится на основе вышеприведенных аналитических соотношений. В общем случае двоякопериодической структуры среда обладает моноклинной симметрией [1], поэтому соотношения усреднения (1.6) при заданных усредненных напряжениях представим через интегральные механические характеристики двухуровневой среды

$$(1/\hat{E}_2 - \hat{v}_{21}^2/\hat{E}_1)\hat{\sigma}_{22}^2 + (1/\hat{E}_3 - \hat{v}_{31}^2/\hat{E}_1)\hat{\sigma}_{33}^2 + (1/\hat{G}_{23} - \hat{v}_{61}^2/\hat{E}_1)\hat{\sigma}_{23}^2 - 2(\hat{v}_{23}/\hat{E}_2 + \hat{v}_{21}\hat{v}_{31}/\hat{E}_1)\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{33} + 2(\hat{\mu}_{26}/\hat{G}_{23} + \hat{v}_{21}\hat{v}_{61}/\hat{E}_1)\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{33} + 2(\hat{\mu}_{36}/\hat{G}_{23} + \hat{v}_{31}\hat{v}_{61}/\hat{E}_1)\hat{\sigma}_{33}\hat{\sigma}_{23} = \operatorname{Re} \frac{i}{2F} \left(-\Delta_2 u \int_0^{\omega_1} \sigma d\bar{z} + \Delta_1 u \int_0^{\omega_2} \sigma d\bar{z} + \Delta_2 \bar{u} \int_0^{\omega_1} \bar{\sigma} d\bar{z} - \Delta_1 \bar{u} \int_0^{\omega_2} \bar{\sigma} d\bar{z} \right) - \operatorname{Re} \frac{2l^2}{F} \oint_{L_F} \left(\sigma \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} + \bar{\sigma} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) d\bar{z}$$

$$2\hat{G}_{23}\Delta_j u = \hat{\chi}\Delta_j \phi(z) - \Delta_j [z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}]$$

Используя (2.3) и (2.7), находим приращение перемещений в явном виде

$$2\hat{G}_{23}\Delta_j u = \omega_j (\hat{\chi}C_0 - \bar{C}_0) - \bar{\omega}_j \bar{D}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{\delta}_j (\bar{D}_{k1}\bar{a}_k + \bar{D}_{k2}) +$$

$$+ \bar{\gamma}_j (\bar{C}_{k1}a_k + \bar{C}_{k2}) - \bar{\alpha}\delta_j (C_{k1}a_k + C_{k2})] + \hat{\chi}\Delta_j \phi_0(z) + \omega_j \overline{\phi'_0(z)} + \Delta_j \overline{\psi_0(z)}$$

Простейшее напряженное состояние среды на втором масштабном уровне определяется соотношениями

$$\phi_0(z) = \sigma^\circ z / 4, \quad \psi_0(z) = \Sigma^\circ z / 2$$

где $\sigma^\circ, \Sigma^\circ$ – компоненты однородного внутреннего поля напряжений. Из соотношений (2.8) следует, что для определения полного комплекта интегральных упругих безградиентных характеристик двухуровневой среды необходимо решение задачи о продольном состоянии волокнистого материала. В этом случае соотношения (2.8) составляют основу решения поставленной задачи о влиянии отношений диаметров включений на первом и втором уровнях на интегральные механические характеристики двухуровневого материала.

3. В качестве числового примера исследуем изменение концентрации напряжений около контура кругового отверстия с радиусом a_1 в перфорированной малыми отверстиями пластинке при растяжении в случае учета градиентного состояния. Задача о концентрации напряжений около отверстия на основе моментной теории упругости рассматривалась неоднократно [3–6] и не получила законченного решения ввиду отсутствия связи между фундаментальными постоянными и строением реального материала. Для определенности полагаем, что малые отверстия образуют гексагональную решетку, объемное содержание пор в пластинке $\zeta = 0,65$. Постоянная первого градиентного состояния $l = 0,72 R$ в соответствии с данными на фиг. 1. Невозмущенное состояние $\phi_0(z) = \sigma_{22}^\circ z / 4, \quad \psi_0(z) = -\sigma_{22}^\circ z / 2$.

Удовлетворяя условиям (1.2) на свободном крае большого отверстия при $r = a_1$, получаем решение обобщенной задачи Кирша [5]:

$$\phi'(z) = -\sigma_{22}^\circ \beta a_1^2 z^{-2} / 2, \quad \Omega = 2\sigma_{22}^\circ (1 - \hat{v}) \beta (x\hat{G}_{23}K_2')^{-1} K_2(r/L) \sin 2\theta$$

$$\psi'(z) = \sigma_{22}^{\circ} a_1^2 z^{-2} / 2 - 3\sigma_{22}^{\circ} \beta a_1^4 [1 - 2(\hat{x} + 1)x^{-2}[1 + 2K_2(xK'_2)^{-1}]]z^{-4} / 2$$

$$\beta = \{1 + 2(\hat{x} + 1)x^{-2}[1 + 2K_2(xK'_2)^{-1}]\}^{-1}$$

$$x = a_1 / l, K_2 \equiv K_2(x)$$

Напряжения на контуре $z = a_1 e^{i\theta}$:

$$\hat{\sigma}_{22} = \psi'(z) + \overline{\psi'(z)} + 4(\hat{x} + 1)L^2 \sigma_{22}^{\circ} \beta (xK'_2)^{-1} (a_1^{-1} \partial / \partial r - a_1^{-2}) K_2(r / L) \cos 2\theta -$$

$$- \operatorname{Re}[2(\hat{x} + 1)L^2 \psi'''(z) + \bar{z}\psi''(z) + \psi'(z)]$$

достигают максимального значения при $\theta = \pi / 2$:

$$\hat{\sigma}_{22} = 3\sigma_{22}^{\circ} [1 + 2(\hat{x} + 1)K_1 / 3(2xK_2 + x^2 K_1)^{-1}] \times \\ \times [1 + 2(\hat{x} + 1)K_1 (2xK_2 + x^2 K_1)^{-1}]^{-1}$$

В предельном случае однородной среды, когда влияние градиентного состояния исчезает, $x \rightarrow \infty$, $\hat{\sigma}_{22} \rightarrow 3\hat{\sigma}_{22}^{\circ}$. Снижение концентрации напряжений $\hat{\sigma}_{22} / \hat{\sigma}_{22}^{\circ}$ на контуре кругового отверстия $r = a_1$ в зависимости от масштабного параметра a_1/R иллюстрируют кривые на фиг. 3. Сплошная кривая построена для случая, когда отверстие расположено в пористой среде ($G_a = 0$), штриховая – для среды, армированной абсолютно жесткими ($G_a = \infty$) волокнами. Хотя влияние градиентного состояния на величину напряжений повышается при $a/R \rightarrow 1$, для этого случая необходим учет отброшенных членов в разложении (1.2). Приведенные кривые являются при заданном коэффициенте Пуассона матрицы границами области изменения коэффициентов концентрации напряжений около кругового отверстия при растяжении для различных волокнистых материалов.

Из расчетов следует, что управление строением материалов только на одном масштабном уровне позволяет снизить на 20 процентов максимальные напряжения вблизи источников возмущения напряженного состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
2. Пальмов В.А. Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117–1120.
3. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. № 4. С. 115–128.
4. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 646–751.
5. Савин Г.Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1965. 162 с.
6. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
7. Белоносов С.М. Моментная теория упругости. Владивосток: Дальнаука, 1993. 148 с.
8. Ванин Г.А. Градиентная теория сдвига многоуровневых композитов // Изв. АН. МТГ. 1995. № 1. С. 120–127.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.Е. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.
10. Натанзон В.Я. О напряжениях в растягиваемой пластиинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке // Мат. сб. 1935. Т. 42. № 5. С. 616–636.
11. Григорюк Э.И., Фильшинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.III.1995