

УДК 539.374

© 1996 г. Д.Б. БАЛАШОВ, Н.В. ЗВОЛИНСКИЙ

## ОБ ОБТЕКАНИИ КОНУСА ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

Показано, что автомодельное решение квазистатической задачи об обтекании безграничного конуса потоком жесткопластической среды Мизеса – Шлейхера сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Найдено условие, при котором существует решение с непрерывным полем скорости. Предложен способ определения динамического предела текучести грунта, основанный на предположении о возможности описания напряженного состояния в окрестности конического индентора с помощью построенного решения задачи об обтекании конуса.

Задача об обтекании конуса жесткопластической средой Мизеса изучалась в [1, 2] в случае разрывного поля скорости. В [1] построено некоторое поле напряжений, приближенно описывающее точное решение задачи о внедрении безграничного конуса в полупространство, в [2] исследовано неавтомодельное решение при граничных условиях специального вида.

Известны различные методики определения предела текучести грунта по результатам пенетрационных испытаний [3–6]. В [3, 4] предел текучести находился, как отношение силы сопротивления к площади боковой поверхности индентора, а также другим способом – из условия равенства работы касательных напряжений изменению кинетической энергии ударника. Вследствие пренебрежения работой нормальных напряжений, последний способ применим только для конусов малого угла раствора, внедрение которых по инерции не устойчиво, а поэтому трудно реализуемо в эксперименте. В отличие от [3], в [5] произведен учет вклада в изменение кинетической энергии ударника работы гидродинамической силы сопротивления. Однако, для реализации этого метода необходимо проведение дополнительных экспериментов по определению коэффициента сопротивления. Погрешность метода [6], где величина предела текучести определялась измерением касательного усилия на поверхности индентора с помощью пьезоэлектрического датчика, сильно зависит от точности и настройки аппаратуры.

В отличие от существующих, предлагаемый способ основан на точном решении модельной задачи и рассчитан на определение предела текучести по результатам единичного эксперимента.

**1. Постановка задачи.** Бесконечный круговой недеформируемый конус с углом полураствора  $\gamma$  обтекается потоком жесткопластической несжимаемой среды. Рассматривается квазистатический режим обтекания. На бесконечности среда находится в жестком состоянии и движется с постоянной скоростью  $U_0$ , направленной вдоль оси конуса.

Уравнение поверхности текучести Мизеса – Шлейхера и закона пластического течения имеют вид (индексом  $d$  отмечается девиатор тензора;  $\sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций):

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \sigma_{ij}^d = k^2(P), \quad e_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^d, \quad \lambda \geq 0 \quad (1.1)$$

$$P = -\frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad k' = dk(P) / dP \geq 0$$

На поверхности конуса заданы условия непроницаемости и закон трения в виде ( $\sigma_\tau$ ,  $v_n$  – значения касательного напряжения и нормальной компоненты скорости соответственно):

$$v_n = 0, \quad |\sigma_\tau| = k(P) = a_0 = \text{const} > 0 \quad (1.2)$$

Предполагается, что решение задачи состоит из пластической и жесткой областей,

разделенных заранее неизвестной границей на которой выполнено условие непрерывности вектора скорости

$$[v] = 0 \quad (1.3)$$

Требуется определить поля напряжений и скорости в пластической области, а также положение границы раздела жесткой и пластической областей.

**2. Построение решения в пластической зоне.** Решение задачи будем рассматривать в сферической системе координат  $r, \alpha, \theta$  с центром в вершине конуса и осью  $\theta$ , совпадающей с осью конуса.

Напряжения и скорости нормируем соответственно на величины  $a_0$  и  $U_0$ . В дальнейшем будем пользоваться этими безразмерными переменными.

Задача автомодельна. Действительно, ее решение определяется из системы уравнений, в которую входят уравнения равновесия, закона пластического течения и поверхности текучести (1.1), а также соотношения выражающие скорости деформаций через компоненты вектора скорости. В эту систему уравнений и записанные в безразмерных переменных ее граничные условия (1.2), (1.3) входят только безразмерные величины, следовательно решение зависит только от координаты  $\theta$ . Напряжения и скорости постоянны на конусах  $\theta = \text{const}$ , а граница раздела жесткой и пластической областей – конус  $\theta = \gamma_1$ .

В силу автомодельности упомянутая выше система уравнений и ее граничные условия (1.2), (1.3) принимают вид (точкой обозначается производная по  $\theta$ ):

$$\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta} \text{ctg} \theta = 0, \quad \dot{\sigma}_\theta + 3\sigma_{r\theta} + 2\sigma_\theta^d \text{ctg} \theta = 0, \quad (\sigma_\theta^d)^2 + \sigma_{r\theta}^2 = k^2(P)$$

$$\sigma_r^d = \sigma_{r\alpha} = \sigma_{\theta\alpha} = 0, \quad v_\theta + v_\theta \text{ctg} \theta + 2v_r = 0, \quad (v_r - v_\theta)\sigma_\theta^d = 2\sigma_{r\theta}(v_\theta + v_r) \quad (2.1)$$

$$-\sigma_{r\theta}(\gamma) = k(P(\gamma)) = a_0, \quad v_\theta(\gamma) = 0, \quad v_r(\gamma_1) = \cos \gamma_1, \quad v_\theta(\gamma_1) = -\sin \gamma_1 \quad (2.2)$$

Покажем, что определение поля напряжений в пластической области сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Проинтегрировав первое уравнение, получим

$$\sigma_{r\theta} = -\sin \gamma / \sin \theta \quad (2.3)$$

Умножим второе уравнение системы (2.1) на положительную величину  $k'(P)$  и вычтем из него продифференцированное по  $\theta$  третье уравнение. В результате второе уравнение (2.1) примет вид

$$\dot{\sigma}_\theta^d = \frac{\sigma_{r\theta}^2 \text{ctg} \theta + k k_P' (3\sigma_{r\theta} + 2\sigma_\theta^d \text{ctg} \theta)}{\sigma_\theta^d - k k_P'} \quad (2.4)$$

Подставив предпоследнее соотношение в уравнение поверхности текучести, выразим давление  $P$ , как функцию величины  $\sigma_\theta^d$ , угла  $\theta$  и параметра начальных данных  $\gamma: P = P(\sigma_\theta^d, \theta; \gamma)$ . С учетом этой зависимости и выражения для величины  $\sigma_{r\theta}$  последнее уравнение отделяется от остальных уравнений системы (2.1) и принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка  $\dot{\sigma}_\theta^d = F(\theta; \gamma)$ . Это уравнение вместе с начальным условием  $\sigma_\theta^d(\gamma) = 0$ , вытекающим из третьего уравнения (2.1) и первого условия (2.2), определяет зависимость  $\sigma_\theta^d = \sigma_\theta^d(\theta; \gamma)$ . В дальнейшем считаем эту зависимость известной.

Определим теперь поле скоростей в пластической зоне и покажем, что выполнение последних трех условий (2.2) однозначно определяет угол  $\gamma_1$ . Предпоследнее уравнение системы (2.1) выполняется тождественно, если ввести функцию  $\phi$ , таким образом,

чтобы выполнялись равенства  $v_\theta = 2\varphi / \sin \theta$ ,  $v_r = -\dot{\varphi} / \sin \theta$ . Подставив эти соотношения в последнее уравнение (2.1) получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(\ddot{\varphi} - \dot{\varphi} \operatorname{ctg} \theta + 2\varphi) \sigma_\theta^d = 2\sigma_{r\theta} (2\varphi \operatorname{ctg} \theta - \dot{\varphi})$$

В силу последних трех условий (2.2) и определения функции  $\varphi$  она должна удовлетворять условиям

$$\varphi(\gamma) = 0, \quad \varphi(\gamma_1) = -\frac{1}{2} \sin^2 \gamma_1, \quad \dot{\varphi}(\gamma_1) = -\cos \gamma_1 \sin \gamma_1$$

Сформулированная таким образом краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка содержит три условия, но не является переопределенной, так как величина  $\gamma_1$  заранее неизвестна и находится в процессе решения. Покажем как это сделать.

Выполнив необходимое интегрирование получим

$$\varphi(\theta) = \sin^2 \theta \int_\gamma^\theta \frac{\psi(\lambda)}{\sin^2 \lambda} d\lambda, \quad \psi(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{A}{\sin \lambda} \exp \left( -2 \int_\gamma^\lambda \frac{\sigma_{r\theta}(t; \gamma)}{\sigma_\theta^d(t; \gamma)} dt \right)$$

Теперь можно заметить, что первое краевое условие  $\varphi(\gamma) = 0$  удовлетворено, а второе удовлетворяется подбором константы  $A$ :

$$A^{-1} = \int_\gamma^{\gamma_1} \frac{1}{\sin^3 \lambda} \exp \left( -2 \int_\gamma^\lambda \frac{\sigma_{r\theta}(t; \gamma)}{\sigma_\theta^d(t; \gamma)} dt \right) d\lambda$$

Из предпоследнего соотношения с учетом второго краевого условия получим

$$\dot{\varphi}(\gamma_1) = \psi(\gamma_1) - \sin \gamma_1 \cos \gamma_1$$

Отсюда видно, что третье краевое условие эквивалентно равенству  $\psi(\gamma_1) = 0$ . Согласно определению функции  $\psi(\lambda)$  это равенство равносильно условию

$$\int_\gamma^{\gamma_1} \frac{\sigma_{r\theta}(t; \gamma)}{\sigma_\theta^d(t; \gamma)} dt = +\infty$$

выполняющемуся только в том случае, если выполнены условия

$$\sigma_\theta^d(\gamma_1) = 0, \quad \sigma_\theta^d(\gamma_1 - \varepsilon) < 0 \quad (2.5)$$

Действительно, из этих условий и соотношений (2.3), (2.4) вытекает равенство

$$\lim_{\theta \rightarrow \gamma_1} \frac{(\theta - \gamma_1) \sigma_\theta^d(\theta; \gamma)}{\sigma_{r\theta}(\theta; \gamma)} = \text{const} < 0$$

которое по признаку сравнения обеспечивает расходимость рассматриваемого интеграла.

Условие (2.5) и решение уравнения (2.4)  $\sigma_\theta^d = \sigma_\theta^d(\theta; \gamma)$  определяют уравнение

$$\sigma_\theta^d(\gamma_1; \gamma) = 0 \quad (2.6)$$

из которого определяется угол  $\gamma_1$ .

Решение в пластической области построено. Определение поля напряжений сведено к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, а определение поля скоростей – к вычислению интегралов, зависящих от решения этого уравнения.

**3. Условие существования решения.** Данное условие, очевидно, сводится к исследованию существования решения  $\gamma_1 \in ]\gamma, \pi[$  последнего уравнения. Покажем, что такое

решение существует, если выполнено неравенство  $(d\sigma_\theta^d/d\theta)_{\theta=\gamma} < 0$ . Рассмотрим

функцию  $\Gamma(\theta; \gamma) = -(1 - \sin^2 \gamma / \sin^2 \theta)^{1/2}$ . Если показать, что справедлива оценка  $|\Gamma(\theta; \gamma)| > |\sigma_\theta^d(\theta; \gamma)|$ , то в силу очевидных равенств  $\Gamma(\gamma; \gamma) = \Gamma(\pi - \gamma; \gamma) = 0$  и непрерывности решения обыкновенного дифференциального уравнения (2.3)  $\sigma_\theta^d(\theta; \gamma)$  утверждение будет доказано. Действительно, внутри области  $G$ , ограниченной кривой  $\Gamma(\theta; \gamma) = 0$  и осью  $\sigma_\theta^d = 0$  нет особых точек и устойчивых предельных циклов обыкновенного дифференциального уравнения (2.3), следовательно любая входящая в область  $G$  фазовая траектория (возможность локального продолжения траектории в область  $G$  обеспечивается соотношениями  $(d\sigma_\theta^d/d\theta)_{\theta=\gamma} = \text{const} < 0$ ,  $(d\Gamma/d\theta)_{\theta=\gamma} = -\infty$  обязательно выходит из  $G$ , пересекая ее границу. Если справедливо предположение об оценке решения, то пересечение границы области  $G$  по кривой  $\Gamma(\theta; \gamma) = 0$  произойти не может, следовательно пересечение происходит с осью  $\sigma_\theta^d = 0$  в некоторой точке  $\theta = \gamma_1$ , что в силу (2.6) гарантирует существование решения. Покажем, что данная оценка имеет силу. В силу уравнения поверхности текучести и соотношения (2.3) справедливо равенство  $\Gamma^2(\theta; \gamma) - (\sigma_\theta^d(\theta; \gamma))^2 = 1 - k^2(P) > 0$ . Производная правой части этого равенства, равная  $-2kk'_P(P)\dot{P}$  — положительная величина. Действительно, в силу (1.1)  $k'_P(P) > 0$ . Значение  $\dot{P}$  определим из уравнения поверхности текучести и уравнения (2.4):

$$\dot{P} = \frac{\sigma_{r\theta}^2 \text{ctg} \theta + 3\sigma_{r\theta}\sigma_\theta^d + k^2(P) \text{ctg} \theta}{\sigma_\theta^d - kk'_P}$$

Правая часть этого соотношения — отрицательная величина, так как  $\sigma_{r\theta} < 0$  (согласно (2.3)) и  $\sigma_\theta^d(\gamma + \epsilon) < 0$  (согласно предположению  $(d\sigma_\theta^d/d\theta)_{\theta=\gamma} < 0$ ).

Таким образом,  $\Gamma(\theta; \gamma)$  — функция межорирующая решение уравнения (2.4)  $\sigma_\theta^d(\theta; \gamma)$ . Существование решения доказано. С помощью уравнения (2.4) и граничных условий (2.2) неравенство  $(d\sigma_\theta^d/d\theta)_{\theta=\gamma} < 0$  можно представить в виде

$$\gamma < \gamma^*, \quad \gamma^* = \arctan(3k'_P(P(\gamma))), \quad P(\gamma) = k^{-1}(1) \quad (3.1)$$

Это неравенство определяет условие, при котором существует решение рассматриваемой задачи. Если оно не выполнено, то решения, вообще говоря, не существует. Заметим, что аналогичная ситуация (отсутствие автомодельного решения при достаточно большом угле раствора конуса) имеет место в газовой динамике в задаче о сверхзвуковом симметричном обтекании конуса [7].

**4. Применение решения для определения предела текучести.** Предлагается процедура определения значения предела текучести грунта по результатам единичного эксперимента по внедрению по инерции в грунт стержня с коническим наконечником. В ходе эксперимента производится измерение силы сопротивления движению наконечника. Предлагаемая процедура основана на предположении о допустимости моделирования процесса проникания конического индентора решением рассмотренной выше задачи. При помощи решения этой задачи предел текучести определяется обратным методом, т.е. заранее неизвестные материальные постоянные модели среды подбираются таким образом, чтобы соответствующее им решение удовлетворяло некоторым экспериментально обоснованным предположениям о характере процесса

проникания. Покажем, сначала, что модель пластической среды (1.1) и граничные условия (1.2), (1.3) правильно отражают качественные особенности рассматриваемого процесса.

Основное предположение, используемое в большинстве методик [3, 4, 5, 6] определения предела текучести грунта по результатам динамических испытаний, впервые было высказано в [8] и состоит в том, что эта величина равна значению касательных напряжений на поверхности внедряемого в грунт индентора. Считаем это предположение справедливым. В рассматриваемом случае оно принимает вид второго из граничных условий (1.2).

Проведенное по результатам экспериментов [3, 4] изучение фотографий процесса проникания конического наконечника в пластилин обнаруживает отсутствие ярко выраженной границы раздела между покоящейся и движущейся зонами, что указывает на отсутствие поверхности по которой происходит проскальзывание материала, т.е. локализация деформаций. Следовательно, можно высказать предположение о непрерывном изменении скоростей движения при переходе частиц из не возмущенной области в возмущенную. Поэтому, при моделировании процесса проникания будем пользоваться граничным условием (1.3).

Заметим также, что пластические свойства среды преобладают над вязкими для скоростей внедрения из интервала от 2 м/с до 100 м/с. Действительно, согласно [4], значения предела текучести и силы сопротивления с ростом скорости движения возрастают, причем при скоростях, больших 2 м/с темп их роста заметно снижается, а значения соответственно приближаются к некоторым предельным значениям. Следовательно, зависимостью процесса нагружения от величины скорости деформации в некотором диапазоне скоростей движения можно пренебречь. Поэтому для моделирования проникания будем использовать соотношения жесткоидеальнопластической среды (1.1), не зависящие от скоростей деформаций.

Согласно [9], моделирующая поведение мягкого грунта (глина, суглинки, песок) функция  $k(P)$  при увеличении величины давления  $P$  приближается к предельному значению  $\tau_s$ . Для описания такого поведения будем пользоваться зависимостью

$$k(P) = \tau_0 + \frac{aP}{1 + aP / (\tau_s - \tau_0)}$$

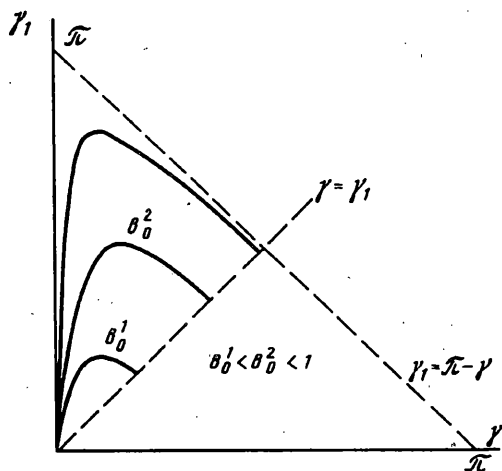
$a = \text{const} > 0$ ,  $0 < \tau_0 < \tau_s$ ,  $\tau_0 = \text{const}$ , которая применяется в инженерных расчетах [10].

Процесс движения среды для скоростей индентора близких к величине 2 м/с можно считать квазистатическим. Действительно, отношение  $\rho v^2 / \tau_s = 0,02$  при значениях скорости проникания, предела текучести (при температуре  $T = 23^\circ\text{C}$ ) и плотности равных  $v = 2$  м/с,  $\tau_s = 3,2$  Кг/см<sup>2</sup>,  $\rho = 1,52$  г/см<sup>3</sup>. Следовательно инерционными членами в уравнении движения можно пренебречь. Режим движения с постоянной скоростью обеспечивается выбором проникающего достаточно большой массы без изменения геометрии конического наконечника и начальной скорости метания, т.е. соответствующим подбором стержня, жестко скрепленного с индентором.

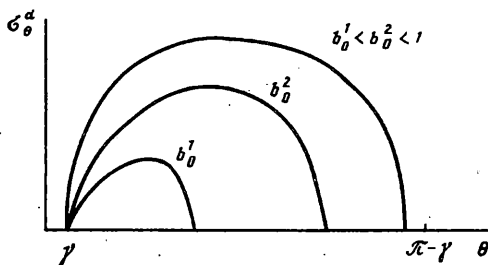
Приведенные выше рассуждения не являются строгим доказательством возможности описания проникания конуса в грунт рассматриваемой моделью, однако, как показано выше, уравнения модели отражают основные качественные особенности процесса проникания. Проведем теперь анализ решения задачи об обтекании конуса при функции  $k(P)$  определенного выше вида. Затем покажем, как с помощью этого решения определяется величина  $\tau_s$  по измеренному экспериментально значению силы сопротивления.

Напряжения и функцию  $k(P)$  удобно нормировать на величину  $\tau_s$ . Тогда согласно равенству (2.3) и определению функции  $k(P)$  имеем

$$k(P) = l_0 + \frac{aP}{1 + aP / (1 - l_0)}, \quad \sigma_{r\theta} = -b_0 \sin(\gamma) / \sin(\theta)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$kk'_p = a\Phi(1-\Phi)^2(1-l_0)^{-2}, \quad \Phi(\sigma_\theta^d, \theta; b_0, \gamma) = \left( (\sigma_\theta^d)^2 + \frac{b_0^2 \sin^2 \gamma}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

$$l_0 = \tau_0 / \tau_s, \quad b_0 = a_0 / \tau_s, \quad l_0 < b_0 < 1$$

Учитывая эти равенства, получим  $\dot{\sigma}_\theta^d = F(\sigma_\theta^d, \theta; b_0, \gamma, l_0, a)$ ; вид функции  $F$  определяется правой частью уравнения (2.4),  $\gamma, b_0$  – параметры начальных данных,  $l_0, a$  – материалы постоянные. Согласно условию (3.1) и первому уравнению (4.1), решение этого уравнения существует при углах  $\gamma$  меньших  $\gamma^* = \arctan[(1-l_0)^2 a^{-1}(1-b_0)^{-2}]$ . При фиксированных значениях  $l_0$  и  $a$  качественный

вид зависимостей  $\gamma_1 = \gamma_1(\gamma; \gamma, b_0, l_0, a)$  и  $\sigma_\theta^d(\theta; \gamma, b_0, l_0, a)$  определяемых соответственно уравнениями (2.6) и (2.4) представлен на фиг. 1 в виде однопараметрических (с параметром  $b_0$ ) семейств плоских кривых. При  $b_0 \rightarrow 1$  значение  $\gamma_1$  возрастает и приближается к величине  $\pi - \gamma$ , а функция  $\sigma_\theta^d(\theta; \gamma, b_0, l_0, a)$  стремится к функции  $\Gamma(\theta; \gamma) = -(1 - \sin^2 \gamma / \sin^2 \theta)^{1/2}$ .

**5. Процедура оценки предела текучести.** Предполагаются известными значения силы сопротивления движению конического наконечника  $F_r$ , угол  $\gamma$  и диаметр основания конического наконечника  $d$ . Требуется определить величину предела текучести  $\tau_s$ . Сформулируем сначала некоторые предположения, накладывающие ограничения на класс возможных решений модельной задачи.

В соответствии с результатами [4], величина  $b_0$  предполагается близкой к единице. Величину угла  $\gamma_1$  предположим равной  $\pi/2 + \gamma/2$ . Это предположение, означающее, что поверхность раздела жесткой и пластической зон делит пополам угол между направлением движения и поверхностью индентора, справедливо для конусов не слишком малого угла раствора ( $\gamma \geq \pi/12$ ). Оно было сформировано в ходе экспериментов [11] (угол  $\gamma_1$  определялся множеством точек, в которых кривизна линий тока была наибольшей) и получило теоретическое обоснование в [2] (из условия минимальности скачка касательной составляющей скорости на границе жесткой и пластической зон). Предположим также, что давление в невозмущенной

части среды, отнесенное к величине  $\tau_s$ , пренебрежимо мало. Таким образом, считаются выполненными условия

$$b_0 \approx 1, \quad \gamma_1 = \pi/2 + \gamma/2, \quad P(\gamma_1) = 0 \quad (5.1)$$

Значение предела текучести  $\tau_s$  определим из условия равенства силы сопротивления  $F$ , отнесенной к площади боковой поверхности, сумме проекций на ось конуса нормального и касательного напряжений

$$\tau_s = \frac{4F_r}{\pi d^2 (b_0 \operatorname{ctg} \gamma + P(\gamma))} \quad (5.2)$$

где в силу соотношений (4.1) величина  $P(\gamma)$  равна

$$P(\gamma) = \frac{(1-l_0)(b_0-l_0)}{a(1-b_0)}$$

Входящие в правую часть предпоследнего соотношения величины  $b_0$ ,  $l_0$ ,  $a$  заранее неизвестны. Покажем, что условие (2.5) и предположения (5.1) определяют некоторые соотношения между этими величинами с помощью которых величина  $\tau_s$  определяется однозначно.

Из уравнения поверхности текучести и соотношений (4.1) находим значение величины  $l_0 = b_0 \sin \gamma / \cos \gamma/2$ . С учетом этого равенства уравнение (2.6) можно представить в виде

$$\sigma_0^d = (\pi/2 + \gamma/2, \gamma, b_0, l_0(b_0, \gamma), a) = 0$$

Разрешив это уравнение относительно  $a$ , подставим найденную зависимость  $a = a(b_0, \gamma)$  в соотношение (5.2). В результате предел текучести  $\tau_s$  будет выражен в виде произведения известной величины  $4F_r/(\pi d^2)$  и функции, зависящей от значений угла  $\gamma$  и параметра  $b_0$ , которое в силу условия (5.1) близок к единице. Численный расчет значений этой функции при различных значениях параметра  $b_0$  показывает, что при  $0,99 < b_0 < 1$  значения функции различаются не более чем на 3%, поэтому для оценки величины  $\tau_s$  можно считать  $b_0 = 0,99$ . Таким образом, предел текучести определен.

В результате расчета по изложенной выше схеме при значениях  $d = 1,05$  см,  $\gamma = 15^\circ$  и измеренному в [3] (при температуре пластилина  $23^\circ\text{C}$ ) значению силы сопротивления  $F_r = 22$  Кг определено значение предела текучести  $3,56$  Кг/см<sup>2</sup>, которое близко к найденному в [4] значению  $3,2$  Кг/см<sup>2</sup>.

Авторы благодарят И.В. Симонова за обсуждение и советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-1653) и Международного научного фонда (MN 1000).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян А.Г. Внедрение жесткого конуса в пластически ортотропное полупространство // ПМТФ. 1991. № 5. С. 159–163.
2. Durban D., Fleck N.A. Singular plastic fields in steady penetration of a rigid cone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. V. 59. No. 4. P. 706–710.
3. Бивин Ю.К., Викторов В.В., Степанов Л.П. Исследование движения твердого тела в глинистой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 159–165.
4. Бивин Ю.К., Викторов В.В., Коваленко Б.Я. Определение динамических характеристик грунтов методом пенетрации. Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 105–110.
5. Бухарев Ю.Н., Корыблев А.Е., Хаймович М.И. Экспериментальное определение касательных напряжений на поверхности ударника при динамическом внедрении в грунт. М., 1992. 6 с. Препр. ВНИИ эксперим. физики. N23-92.

6. *Коханенко И.К., Маклаков С.Ф., Прищеп В.А.* Определения предела прочности грунта на сдвиг при динамическом нагружении. Изв. АН СССР. МТТ. 1990, № 4. С. 182–184.
7. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
8. *Григорян С.С.* Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 846–849.
9. *Замышляев Б.В., Евтерев Л.С.* Модели динамического деформирования и разрушения грунтовых сред. М.: Наука, 1990. 212 с.
10. *Гердюков Н.Н., Иошлев А.Г., Новиков С.А., Чернов А.В.* Исследование физикомеханических характеристик песчаного грунта при динамическом нагружении. М., 1992. 21 с. Препр. ВНИИ эксперим. физики. N12-92.
11. *Johnson W., Mellor P.B.* Engineering plasticity. L.: Nostrand Reinhold Co., 1975. 646 p.

Москва

Поступила в редакцию  
28. III. 1995