МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1996

УДК 539.214;539.374

© 1996 г. М.А. АРТЁМОВ, Д.Д. ИВЛЕВ

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ

Рассматривается случай плоской задачи. Предполагается, что предельное условие зависит только от направления главных напряжений.

1. Предельное условие в случае плоской задачи запишем в виде

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0 \tag{1.1}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} – компоненты напряжений. Полагая

$$\sigma_x = \sigma + \Sigma\cos 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma - \Sigma\cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \Sigma\sin 2\varphi \tag{1.2}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \Sigma = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}\,\mathrm{tg}\,2\varphi = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y) \tag{1.3}$$

Здесь σ – первый инвариант тензора напряжений, Σ – второй инвариант девиатора напряжений, φ – угол, определяющий направление главного напряжения в ортогональной системе координат.

Используя (1.2), условие (1.1) можно переписать в виде

$$f(\sigma, \Sigma, \varphi) = 0 \tag{1.4}$$

Различные виды зависимости исследовались в [1–3], ниже рассматривается случай, когда условие (1.4) не зависит от σ, Σ, тогда

$$f(\varphi) = 0, \quad \varphi - \mathrm{const} \tag{1.5}$$

Условие (1.5) согласно (1.3) перепишем в виде

$$k(\sigma_x - \sigma_y) - 2\tau_{xy} = 0, \quad k - \mathrm{const} \tag{1.6}$$

Используя функцию напряжений

$$\sigma_x = \partial^2 U / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 U / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 U / \partial x \partial y \tag{1.7}$$

из (1.7), (1.6) найдем

$$k\left(\frac{\partial U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) принадлежит к гиперболическому типу, характеристики которого

$$(\partial y / \partial x)_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 + k^2}) / k \tag{1.9}$$

Из (1.9) и (1.6) найдем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \mathrm{tg}\varphi, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -\mathrm{ctg}\varphi, \quad \varphi = \mathrm{const} \tag{1.10}$$

Согласно (1.9), (1.10) характеристики прямолинейные и взаимно ортогональные. Общее решение уравнения (1.8) может быть представлено в виде

$$U = U_1(x + y\,\mathrm{tg}\varphi) + U_2(x - y\,\mathrm{ctg}\varphi) \tag{1.11}$$

Из (1.6) согласно ассоциированному закону получим для компонент скоростей деформаций

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y = k\lambda, \quad \varepsilon_{xy} = -\lambda, \quad \varepsilon_x - \varepsilon_y + 2k\varepsilon_{xy} = 0, \; \lambda \geq 0 \tag{1.12}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{1.13}$$

где u, v – компоненты скорости перемещений.

Из (1.12), (1.13) получим систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad 2\frac{\partial u}{\partial x} + k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.14}$$

Полагая

$$u = \partial W / \partial y, \quad v = -\partial W / \partial x \tag{1.15}$$

из (1.15), (1.14) найдем

$$k\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.16}$$

Уравнения (1.16) и (1.8) совпадают между собой, решение можно записать в виде

$$W = W_1(x + y\,\mathrm{tg}\varphi) + W_2(x - y\,\mathrm{ctg}\varphi) \tag{1.17}$$

Согласно (1.11), (1.7), (1.17), (1.15) выражения для компонент напряжений и скоростей перемещений могут быть записаны

$$\begin{gathered}
\sigma_x = f_1(\xi)\,\mathrm{tg}^2\varphi + f_2(\eta)\,\mathrm{ctg}^2\varphi \\
\sigma_y = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad \tau_{xy} = -f_1(\xi)\,\mathrm{tg}\varphi + f_2(\eta)\,\mathrm{ctg}\varphi \\
u = g_1(\xi)\,\mathrm{tg}\varphi - g_2(\eta)\,\mathrm{ctg}\varphi \\
v = g_1(\xi) + g_2(\eta), \quad \xi = x + y\,\mathrm{tg}\varphi, \quad \eta = x - y\,\mathrm{ctg}\varphi
\end{gathered} \tag{1.18}$$

В девиаторной плоскости условие предельного состояния (1.6) интерпретируется прямой AB (фиг. 1), направление первой главной компоненты девиатора скоростей деформации показано ортогональной прямой CD, окружность соответствует условию $\Sigma = \mathrm{const}$.

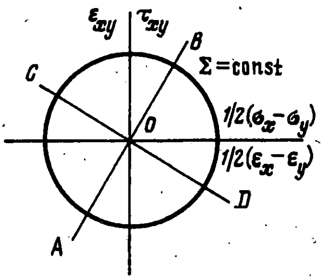
2. Предположим, что на границе полуплоскости заданы напряжения и скорости перемещений

$$\sigma_y = p(x), \quad \tau_{xy} = q(x), \quad u = u_1(x), \quad v = v_1(x) \quad \text{при } y = 0 \tag{2.1}$$

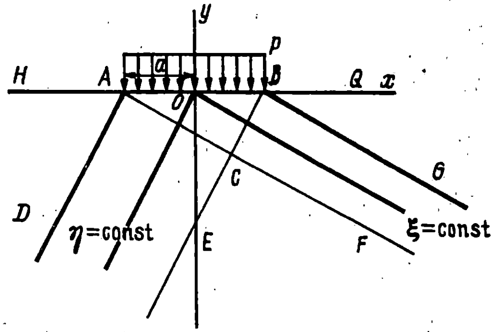
Согласно (2.1), (1.18):

$$\sigma_x = \frac{\sin 2\varphi}{2}[p(\xi)\,\mathrm{tg}\varphi + p(\eta)\,\mathrm{ctg}\varphi - q(\xi)\,\mathrm{tg}^2\varphi + q(\eta)\,\mathrm{ctg}^2\varphi]$$

$$\sigma_y = \frac{\sin 2\varphi}{2}[p(\xi)\,\mathrm{ctg}\varphi + p(\eta)\,\mathrm{tg}\varphi - q(\xi) + q(\eta)]$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\tau_{xy} = \frac{\sin 2\varphi}{2}[-p(\xi)+p(\eta)+q(\xi)\mathrm{tg}\varphi+q(\eta)\mathrm{ctg}\varphi] \tag{2.2}$$

$$u = \frac{\sin 2\varphi}{2}[u_1(\xi)\mathrm{tg}\varphi + u_1(\eta)\mathrm{ctg}\varphi + v_1(\xi) - v_1(\eta)]$$

$$v = \frac{\sin 2\varphi}{2}[u_1(\xi) - u_1(\eta) + v_1\,\mathrm{ctg}\varphi + v_1(\eta)\mathrm{tg}\varphi]$$

В качестве примера рассмотрим распределение постоянного давления на отрезке (фиг. 2):

$$\sigma_y = p - \mathrm{const},\ |x| \leqslant a,\ \ \sigma_y = 0,\ |x| > a,\ \ \tau_{xy} = 0 \ \text{ при } y = 0. \tag{2.3}$$

Согласно (2.3), (2.1), (2.2) получим в треугольной области ABC: $\sigma_x = \sigma_y = p$, $\tau_{x,y} = 0$ в полосе DACE: $\sigma_x = p\cos^2,\varphi$, $\sigma_y = p\sin^2\varphi$, $\tau_{xy} = {}^1/_2 p\sin^2\varphi$, в полосе $GBCF$: $\sigma_x = p\sin^2\varphi$, $\sigma_y = p\cos^2\varphi$, $\tau_{xy} = -{}^1/_2 p\sin 2\varphi$, в треугольных зонах HAD, ECE, GBQ все компоненты напряжения равны нулю: $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

Аналогично [4] для уравнений

$$\partial\sigma_x / \partial x + \partial\tau_{xy} / \partial y = 0,\ \ \partial\tau_{xy} / \partial x + \partial\sigma / \partial y = 0$$

$$k(\sigma_x - \sigma_y) - 2\tau_{xy} = 0 \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0,\ \ \varepsilon_x - \varepsilon_y + 2k\varepsilon_{xy} = 0$$

могут быть определены полиноминальные решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ код проекта 013-16520.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
2. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности.М.: Наука, 1966. 231 с.
3. *Саркисян М.С.* К теории плоской деформации пластически анизотропных тел // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1136–1139.
4. *Тимошенко С.П.* Теория упругости. Л., М.: Гостехиздат, 1934. 451 с.

Воронеж, Чебоксары

Поступила в редакцию
10.XII. 1993