МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1996

УДК 539.214; 539.374

© 1996 г. В.Д. КЛЮШНИКОВ

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИИ УПРОЧНЕНИЯ

Для решения краевых и начальных задач пластичности в неизотермических процессах требуется дополнить определяющее соотношение уравнениями термодинамики, замыкающими эти задачи в отношении тепловых параметров – произвести термодинамическое дополнение.

Общего правила решения этой проблемы нет. Обычно указанное дополнение достигается слабо мотивированным по определяющему соотношению заданием каких-либо термодинамических параметров, таких как свободная энергия [1], внутренняя диссипация [2], производство энтропии [3], потенциал Гиббса [4].

Однако, хотя результат в общем случае, по-видимому, неоднозначен, связь дополнения с видом определяющего соотношения должна быть достаточно жесткой. Ниже излагаются требования на форму термодинамических параметров, вытекающих из известного условия непрерывности изменения функции упрочнения в пластичности (см., например, [5]) и приводятся примеры термодинамического дополнения различных теорий пластичности, как регулярных, так и сингулярных.

1. Основные соотношения. В дальнейшем в качестве независимых параметров будем, как и в большинстве известных моделей пластичности, использовать девиатор напряжений S_{ij} и абсолютную температуру T. При таком выборе термодинамическое дополнение естественно строить на основе потенциала Гиббса χ. Уравнение термодинамического баланса и неравенство диссипации при таком подходе имеют вид [4]:

$$Э_{ij}\dot{S}_{ij} + \rho(\dot{\chi} + s\dot{T} + q^*) = 0, \quad q^* \geqslant 0 \tag{1.1}$$

Здесь на основе принципа суперпозиции отброшена относящаяся к упругости часть уравнения баланса так, что $Э_{ij}$, χ, s – пластические части соответствующих параметров: девиатора деформации, потенциала Гиббса и энтропии, соответственно. Точка означает полную производную по времени. В отброшенной упругой части скорость некомпенсированного тепла q^* равна нулю и действуют законы термоупругости.

Соотношения (1.1) имеют место для активного процесса нагружения, который определяется наравенством [4]:

$$K^0 = \dot{S}_{ij}\partial\varphi / \partial S_{ij} + \dot{T}\partial\varphi / \partial T > 0 \tag{1.2}$$

где φ – функция упрочнения, уравнением $\varphi = 0$ определяющая текущую поверхность нагружения в пространстве девиатора напряжений и температуры.

Функция φ зависит от интегральных параметров истории нагружения M, которые могут включать как скалярные, так и тензорные формы. Очевидно, что и параметр χ должен зависеть от этих параметров, так что

$$\chi = \chi(S_{ij}, T_{ij}, M, M_{ij}, \ldots) \tag{1.3}$$

Внося (1.3) в (1.1) получим

$$(\rho\partial\chi / \partial S_{ij} + Э_{ij})\dot{S}_{ij} + \rho(\partial Э / \partial T + s)\dot{T} + \rho\dot{M}\partial Э / \partial M + \rho\dot{M}_{ij}\partial Э / \partial M_{ij} + \ldots + \rho q^* = 0 \tag{1.4}$$

При нейтральном нагружении, когда по условию непрерывности [5] $K^0, \dot{M}, \dot{M}_{ij}, \ldots$ равны нулю из (1.4) и (1.2) следует

$$(\rho\partial\chi / \partial S_{ij} + Э_{ij}) S_{ij} + \rho(\partial Э / \partial T + s)\dot{T} = 0$$

$$\dot{S}_{ij}\partial\varphi / \partial S_{ij} + \dot{T}\partial\varphi / \partial \dot{T} = 0 \qquad (1.5)$$

Одновременное удовлетворение (1.5) возможно только при выполнении условий

$$Э_{ij} + \rho\partial\chi / \partial S_{ij} = -n\partial\varphi / \partial S_{ij}, \quad \rho(s + \partial Э / \partial T) = -n\partial\varphi / \partial T \qquad (1.6)$$

где n – некоторый скалярный множитель. Из второго равенства (1.6) следует

$$\rho s = -n\partial\varphi / \partial T - \rho\partial\chi / \partial T \qquad (1.7)$$

а из (1.4) на основании (1.6) и (1.2) получим

$$\rho q^* = nK^0 - \rho\dot{M}\partial\chi / \partial M - \rho\dot{M}_{ij}\partial\chi / \partial M_{ij} - \ldots \qquad (1.8)$$

Как видно, прямое использование функции упрочнения приводит к раздельным формулам для s и q^*, что оказалось неразрешимой задачей в попытке термодинамического дополнения в [4].

Рассмотрим класс пластических тел, термодинамическое дополнение которых можно выполнить заданием простейшей формы потенциала Гиббса[1]

$$\rho\chi = \tfrac{1}{2}(AS_{ij}S_{ij} - 2BS_{ij}Э_{ij} + CЭ_{ij}Э_{ij} + DM) \qquad (1.9)$$

где роль M_{ij} выполняет $Э_{ij}$, а коэффициенты A, B, C, D либо константы, либо функции T, и в дальнейшем входящие в соотношения двухвалентные тензоры будем считать векторами и будем у них отбрасывать тензорные индексы.

2. Теория изотропного упрочнения (ТИУ). Функция упрочнения для ТИУ в неизотермическом процессе [4] имеет вид

$$\varphi = P(r, T) - k, r = |S|, \quad \dot{k} = \sqrt{\dot{Э}\dot{Э}} \qquad (2.1)$$

и в активном процессе интегральный параметр $M = k$ в силу условия $\varphi = 0$ совпадает с функцией P, так что в формулах (1.7), (1.8) надо положить $M = P$. Определяющее соотношение ТИУ в силу принципа градиентальности [4] представляется в виде

$$\dot{Э} = \dot{P}S / r, \quad \dot{P} = \dot{r}\partial P / \partial r + \dot{T}\partial P / \partial T = K^0 \qquad (2.2)$$

Первое из соотношений (1.6) дает

$$AS - BЭ + Э + \tfrac{1}{2}D(\partial P / \partial r)(S / r) = -n(\partial P / \partial r)(S / r)$$

откуда в силу независимости S, $Э$ и r следует

$$A = 0, \quad B = 1, \quad D = -2n \qquad (2.3)$$

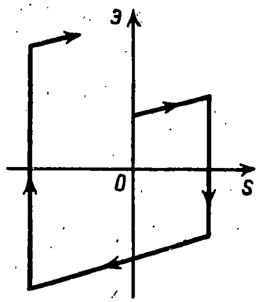
так что формула (1.7) принимает вид

$$\rho\chi = -SЭ + \tfrac{1}{2}CЭЭ - nP \qquad (2.4)$$

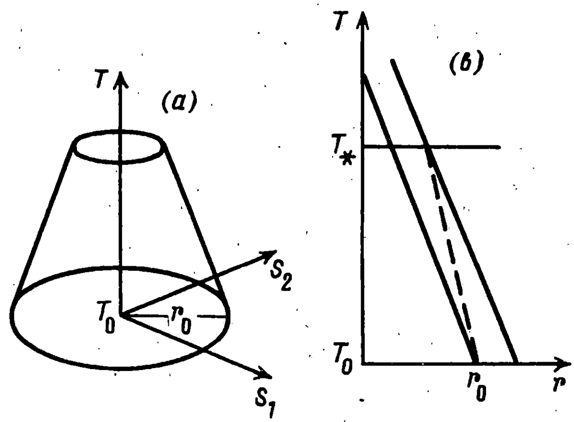
Внося это представление в формулу (1.8) с учетом (2.2) получим

$$\rho q^* = 2n\dot{P} + S\dot{Э} - CЭ\dot{Э} \qquad (2.5)$$

[1] Возможную аддитивную функцию от T будем считать отнесенной к отброшенной здесь упругой части χ.



Фиг. 1



Фиг. 2

По определению скорость некомпенсированного тепла неотрицательна, но даже при положительном коэффициенте $2n + r$ и положительном C найдется процесс, для которого формула (2.5) это условие нарушает. Пример такого процесса представлен на фиг. 1. Только при нулевом значении C гарантируется выполнение условия $q^* \geqslant 0$. Таким образом в дополнении к условиям (2.3) имеем

$$C = 0 \tag{2.6}$$

а выражение для q^* сокращается:

$$\rho q^* = (2n + r)\dot{P} \tag{2.7}$$

С учетом данных значений (2.3) и (2.6) формула (1.7) при задании (1.9), где надо положить $M = P$ для энтропии и производства энтропии будет иметь вид

$$\rho s = P\partial n / \partial T, \quad \rho\dot{s} = (P\partial n / \partial T)^{\cdot} \tag{2.8}$$

Таким образом, термодинамическое дополнение ТИУ осуществляется заданием функций P и n, первая из которых определяет форму поверхности нагружения. Действительно, из условия нейтрального нагружения $\dot{P} = 0$ следует, что меридиональная касательная этой поверхности определяется соотношением

$$dT/dr = -P_r/P_T \tag{2.9}$$

где обозначено $P_r = \partial P / \partial r$, $P_T = \partial P / \partial T$. При положительных, что естественно, P_r и P_T из (2.9) следует убывание радиуса поверхности нагружения с ростом T. Характер меридионального сечения в отношении кривизны определяется через вторую производную от T по r, которая, как нетрудно проверить, дается формулой

$$d^2T/dr^2 = -[P_{rr} - 2P_{rT}P_r/P_T + P_{TT}(P_R/P_T)^2]/P_T \tag{2.10}$$

Отметим, что вообще, кривизна вдоль рассматриваемого сечения не обязательно знакопостоянна.

Рассмотрим частный случай обобщенного линейного упрочнения. Если через r_0 и T_0 обозначить значения параметров r и T, отвечающих началу пластического деформирования, то в силу условия $P = k$ надо потребовать, чтобы функция $P(r_0, T_0) = 0$ и была безразмерной. Следовательно при линейном упрочнении должно быть

$$P = \alpha(r/r_0 - 1) + \beta(T/T_0 - 1) \tag{2.11}$$

где α, β – положительные безразмерные постоянные. В этом случае

$$dT/dr = -\alpha T_0/\beta r_0, \quad d^2T/dr^2 = 0 \tag{2.12}$$

и, следовательно, текущая поверхность нагружения – конус, сужающийся в направлении увеличения T (фиг. 2, *а*).

В случае линейного упрочнения естественно положить, что n тоже линейная функция размерности r:

$$2n = [\gamma(T/T_0 - 1) - 1 + \omega]r_0 \tag{2.13}$$

где введены новые безразмерные постоянные γ и ω, причем $\gamma = \beta/\alpha$. Внося (2.13) в формулы (2.7) и (2.8) получим

$$\rho q^* = r_0[\gamma(T/T_0 - 1) + (r/r_0 - 1) + \omega]\dot{P}$$

$$\rho s = (r_0/2T_0)\gamma P, \quad \rho\dot{s} = (r_0/2T_0)\gamma\dot{P} \tag{2.14}$$

Постоянные ω и γ оказываются связанными, в чем легко убедиться, если рассмотреть адиабатический процесс, для которого

$$\dot{s}T = q^* \tag{2.15}$$

и, следовательно, на основании (2.14):

$$\gamma T/2T_0 = (r/r_0 - 1) + \gamma(T/T_0 - 1) + \omega \tag{2.16}$$

откуда при $r = r_0$, $T = T_0$ следует $\omega = \gamma/2$ и уравнение адиабаты

$$(r/r_0 - 1) + \gamma(T/T_0 - 1)/2 = 0 \tag{2.17}$$

представленной на фиг. 2, *а* штриховой линией.

Как видно, при сделанных предположениях условие неотрицательности производства энтропии (см., например, [3]) выполняется. Что же касается скорости некомпенсированного тепла q^*, то полученная для нее формула (2.14), по-видимому, действует не во всем диапазоне переменных r и T. Дело в том, что принято считать, что ρq^* является частью так называемой мощности диссипации $S\dot{Э}$, которая здесь равна $r\dot{P}$. А это накладывает на q^*, вместе с неотрицательностью, ограничение

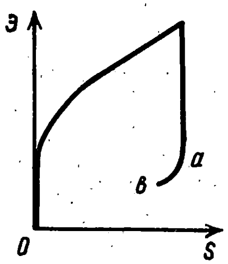
$$\rho q^* \leqslant r\dot{P} \tag{2.18}$$

которое на основании первой из формул (2.14) приводит к неравенству

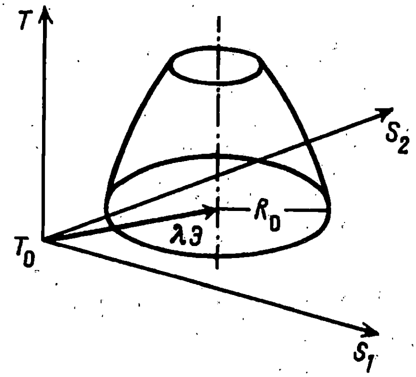
$$T/T_0 < {}^1/_2 + 1/\gamma \tag{2.19}$$

Если условие неотрицательности q^* совпадает с условием активности нагружения $P = \text{const}$, $\dot{P} \geqslant 0$, что соответствует самопараллельности перемещения от начала координат предельной прямой (наклонная прямая на фиг. 2, *в*), то условие (2.19) отсекает горизонтальной прямой $\gamma(T - T_0) = \text{const}$ часть активной области, т.е. области, лежащей справа от указанной предельной прямой. В зависимости от коэффициентов α и β, определяющих нагрузочные и тепловые свойства материала, уровень экстремальной температуры T_* может быть достаточно высоким, и заданием (2.13) можно охватить достаточную для практики область напряжений и температуры. Отметим, что условие $\rho q^* < S\dot{Э}$ не обязательно для других теорий пластичности. В некоторых из них $S\dot{Э}$ даже отрицательно, что наблюдается и в эксперименте (фиг. 3, отрезок *ab*).

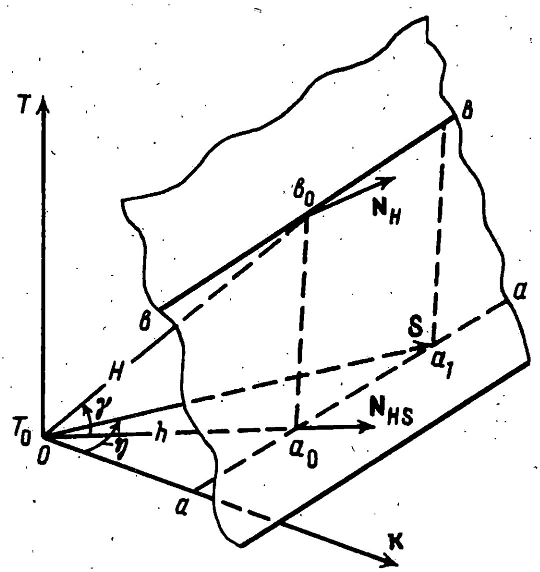
3. Теория трансляционного упрочнения (ТТУ). Функция упрочнения в (ТТУ) представляется формулой [6]:



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\varphi = \tfrac{1}{2}[(S - \lambda Э)(S - \lambda Э) - R^2] \tag{3.1}$$

Будем полагать, что $R = R(T)$, $\lambda = \mathrm{const}$, что отвечает случаю идеального эффекта Баушингера.

Принцип ортогональности [4] дает

$$\dot{Э}_{ij} = \Lambda^0 (S_{ij} - \lambda Э_{ij}) \tag{3.2}$$

а условие $\dot{\varphi} = 0$ приводит к уравнению

$$(S_{mm} - \lambda Э_{mm})(\dot{S}_{mn} - \lambda \dot{Э}_{mn}) - RR'\dot{T} = 0$$

Внося сюда (3.2) получим

$$\Lambda^0 = [((S_{mn} - \lambda Э_{mn})\dot{S}_{mn} - RR'\dot{T}] / \lambda R^2 \tag{3.3}$$

Очевидно, что ТТУ входит в класс теорий (1.9) при $D = 0$. Здесь

$$\partial\varphi / \partial S = (S - \lambda Э), \quad \partial\varphi / \partial T = -RR'$$

$$K^0 = (S - \lambda Э)\dot{S} - RR'\dot{T} \tag{3.4}$$

Последнее на основании (3.1) может быть приведено к виду

$$K^0 = (S - \lambda Э)\lambda\dot{Э} \tag{3.5}$$

Первое условие (1.6) в данном случае дает

$$(A + n)S + (1 - n\lambda - B)Э = 0$$

и в силу произвольности S и $Э$:

$$A = -n, \quad B = 1 - n\lambda \tag{3.6}$$

Для некомпенсированного тепла по (1.7) имеем

$$\rho q^* = nK^0 + (BS - CЭ)\dot{Э} \tag{3.7}$$

Простой вариант термодинамического дополнения для ТТУ следует из предположения

$$C = B\lambda \tag{3.8}$$

при котором

$$\rho q^* = nK^0 + B(S - \lambda Э)\dot{Э} = (n + B / \lambda)K^0 \tag{3.9}$$

и с учетом (3.6) будем иметь

$$\rho q^* = K^0 / \lambda \tag{3.10}$$

Отметим, что ТТУ допускаются процессы, где параметр $S\dot{Э} < 0$.

Энтропию на основании (1.7) можно представить в виде

$$\rho s = -n\partial\varphi / \partial T - \tfrac{1}{2}[(A'S - B'Э)S - (B'S - C'Э)Э] \tag{3.11}$$

Дифференцируя частным образом по T первое из (1.6) получим

$$A'S - B'Э = -\frac{\partial}{\partial T}(n\partial\varphi / \partial S)S \tag{3.12}$$

на основании чего для энтропии будем иметь

$$\rho s = -n\partial\varphi / \partial T + \frac{S}{2}\frac{\partial}{\partial T}(n\partial\varphi / \partial S) + \frac{Э}{2}(B'S - C'Э)$$

и с учетом (3.6) и (3.8):

$$\rho s = -n\partial\varphi / \partial T + \frac{S}{2}\frac{\partial}{T}(n\partial\varphi / \partial S) + \frac{B'Э}{2}(S - \lambda Э)Э =$$

$$= -n\frac{\partial\varphi}{\partial T} + \frac{S}{2}\frac{\partial n}{\partial T}\frac{\partial\varphi}{\partial S} - \frac{\lambda Э}{2}\frac{\partial n}{\partial T}\frac{\partial\varphi}{\partial S} = -n\frac{\partial\varphi}{\partial T} + \frac{1}{2}\frac{\partial n}{\partial T}(S - \lambda Э)\frac{\partial\varphi}{\partial S} =$$

$$= n\frac{\partial\varphi}{\partial T} + \frac{1}{2}\frac{\partial n}{\partial T}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right)^2 = nRR' + \frac{1}{2}n'R^2$$

т.е.

$$\rho s = (nR' + \tfrac{1}{2}n'R)R \tag{3.13}$$

Производство энтропии будет определяться формулой

$$\rho\dot{s} = n(R'^2 + RR'') + n'RR' + \tfrac{1}{2}n''R^2 \tag{3.14}$$

неотрицательность которой гарантируется надлежащим выбором функции n. Одновременно можно добиться того, что упругая область в ТТУ, представляющая в сечении $T = \text{const}$ круг, перемещающийся в плоскости, нормальный к оси T и в неизотермическом процессе, сжималась при увеличении T (фиг. 4).

4. Теория Сандерса. В основу этой теории, которая строится в пространстве напряжений [7] положено независимое действие плоскостей, перемещающихся самопараллельно от начала координат вектором **S**, представляющим девиатор напряжений, и создающим этим вклад в общую пластическую деформацию в виде вектора $\mathbf{Э}_h$. Предполагается, что $\mathbf{Э}_h$ направлен по нормали $\mathbf{N}_h$ к данной плоскости и определяет единичный девиатор пластической деформации

$$\mathbf{Э}_h = Q(h)\mathbf{N}_n, \quad h = \mathbf{SN}_n, \quad |\mathbf{N}_n| = 1 \tag{4.1}$$

где $Q(h)$ – универсальная функция, h – удаление данной плоскости от начала координат.

В изотермическом процессе вектор $\mathbf{Э}_h$ растет только в случае перемещения данной плоскости вектором **S** (активный процесс). Будем говорить, что в таком случае данная плоскость активна. В противном случае вектор $\mathbf{Э}_h$ остается неизменным, так же как и сама плоскость.

Общая пластическая деформация определяется как векторная сумма действий активных плоскостей. Так, в случае плоской пластической деформации, когда девиаторное пространство двумерно

$$\mathbf{Э} = \int Q[h(\eta)]\mathbf{N}_h(\eta)d\eta \tag{4.2}$$

где угол η отсчитывается от некоторого фиксированного луча в девиаторной плоскости.

Ограничиваясь в дальнейшем этим случаем пластической деформации (или моделью двухмерного материала [6]), модернизируя теорию на неизотермической процесс.

Теперь необходимо допустить, что единичная пластическая деформация возникает и от действия температуры, т.е. в расширенном пространстве $\mathbf{S}, T$ производящая плоскость наклонна по отношению к оси T на постоянный угол γ, определяемый конкретными свойствами материала, и отстоит от начала координат на расстояние H. На фиг. 5 прямая bb – сечение H-плоскости плоскостью $T = T_1$ – содержит точку b_0 наименее удаленную от начала координат, т.е. на расстояние H. Прямая aa – проекция прямой bb на девиаторную плоскость.

Вектор $\mathbf{N}_{HS}$ – проекция вектора $\mathbf{N}_H$ на девиаторную плоскость, **k** – некоторое фиксированное направление в девиаторной плоскости, η – угол между векторами **k** и $\mathbf{N}_{HS}$.

Отметим теперь, что следуя тому виду ортогональности вектора скорости пластической деформации к поверхности нагружения в неизотермическом случае, который был получен в [4], и в следствие которого указанный вектор принадлежит девиаторному пространству, в рассматриваемом случае единичный вектор $\mathbf{Э}_H$ пластической деформации должен определяться не вектором $\mathbf{N}_H$ H-плоскости, а вектором $\mathbf{N}_{HS}$ – проекции $\mathbf{N}_H$ на девиаторную плоскость, так что

$$\mathbf{Э}_H = Q(H)\mathbf{N}_{HS} \tag{4.3}$$

Не нарушая общности можно считать вектор $\mathbf{N}_{HS}$ единичным и тогда из рассмотрения треугольников oa_0b_0 и oa_0a_1, исключая случай $\gamma = 0$, найдем

$$H = h/\cos\gamma = \beta(T - T_0)/\sin\gamma, \quad h = \mathbf{SN}_{HS} = oa_0 \tag{4.4}$$

где h – проекция H на девиаторную плоскость, β – размерная константа (фиг. 5). Как видно из (4.4) H можно представить в виде

$$2H = h/\cos\gamma + \beta(T - T_0)/\sin\gamma \tag{4.5}$$

а функцию нагружения определить соотношением

$$\varphi = Q(H) - |Э_H|, \quad H \geqslant H_0 \tag{4.6}$$

где H_0 – начальное состояние H-плоскости. Выражение для K^0 в данном случае будет

$$K^0 = Q'(H)(\dot{\mathbf{S}}\partial H / \partial \mathbf{S} + \dot{T}\partial H / \partial T) = \tfrac{1}{2} Q'(H)(\dot{h} / \cos\gamma + \beta\dot{T} / \sin\gamma) \tag{4.7}$$

Нетрудно заметить, что рассматриваемый случай похож на случай ТИУ, если в (1.9) положить $M = |Э_H| = Q(H)$. Действительно по первой из формул (1.6) использование приведенных выше соотношений будет допустимо в рамках (1.9), если

$$A = 0, \quad B = 1, \quad D = -2n(T) \tag{4.8}$$

так что представление (1.9) приводится к виду

$$\rho\chi = -\mathbf{S}Э_H + {}^1\!/_2 CЭ_H Э_H - nQ(H)$$

а формула (1.8) дает

$$\rho q^* = 2n\dot{Q} + \mathbf{S}\dot{Э}_H - CЭ_H\dot{Э}_H \tag{4.9}$$

что по виду совпадает с (2.5). Если теперь учесть, что в обобщенной теории Сандерса среди единичных H-плоскостей наряду с данной имеется и H-плоскость с повернутым на π вектором $\mathbf{N}_{HS}$, то при циклическом нагружении за счет последнего в (4.9) члена q^* может стать отрицательным. Таким образом, и в данном случае, как и в ТИУ, надо потребовать, чтобы выполнялось условие (2.6). Теперь с учетом (4.3), (4.4) для q^* будем иметь

$$\rho q_H^* = (2n + h)\dot{Q} \tag{4.10}$$

а для энтропии и ее производной на основании (1.7) и (4.8) получим

$$\rho s_H = n'Q, \quad \rho\dot{s} = n'\dot{Q} + n''Q\dot{T} \tag{4.11}$$

В дальнейшем рассмотрим частный случай, когда n-линейная функция температуры

$$2n = \nu(T - T_0), \quad \nu = \mathrm{const} \tag{4.12}$$

Тогда с учетом (4.5):

$$\rho q^* = \tfrac{1}{2}[h + \nu(T - T_0)]Q'(H)(\dot{h} / \cos\gamma + \beta\dot{T} / \sin\gamma)$$

Если теперь положить

$$\nu = \beta \operatorname{ctg}\gamma \tag{4.13}$$

то формулы для $q*$ и s примут вид

$$\rho q_H^* = 2\cos\gamma Q'(H) H\dot{H}, \quad \rho s_H = \beta / [2Q(H)] \operatorname{ctg}\gamma \tag{4.14}$$

Напомним, что случай $\gamma = 0$ является особым и должен рассматриваться отдельно или как предельный при одновременном стремлении γ и $T - T_0$ к нулю. На самом деле это случай изотермического процесса.

Используя для нахождения Э, $q*$, s и $\dot{s}$ принцип суммирования единичных элементов этих параметров для бесконечного числа H-плоскостей, получим

$$Э = \int_\eta Q(H)\mathbf{N}_{HS}d\eta, \quad \rho q^* = 2\cos\gamma \int_\eta Q'(H)H\dot{H}d\eta$$

$$\rho\dot{s} = \beta / (2\cos\gamma) \int_\eta Q(H)d\eta$$

Здесь интегрирование ведется по углу η, который составляет вектор $\mathbf{N}_{HS}$ с фиксированным в девиаторной плоскости направлением (фиг. 5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-17658).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клюшников В.Д.* Проблема определяющих соотношений и современная термомеханика // Изв. АН МТТ. 1995. № 1. С. 52–72.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.; Т. 2. 584 с.
3. *Гроот С.Р.* Термодинамика необратимых процессов. М.: ГИТТЛ, 1956. 280 с.
4. *Клюшников В.Д.* К вопросу о неизотермической пластичности // Изв. АН МТТ. 1995. № 1. С. 57–61.
5. *Handelman G.H., Lin C.C. and Prager W.* On the mechanical behavior of metals in the Strain-Hardening Range // Quart. Appl. Math. 1947. V. 4. P. 397–407.
6. *Клюшников В.Д.* Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1994. 189 с.
7. *Sanders J.L.* Plastic Stress-Strain Relations Based on Linear Loading Function // Proc. of the Second US Nat. Congr. of Appl. Mech. P. 455–460 (1954).

Москва

Поступила в редакцию
18.X.1995