

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. О.Н. ЛУЩИК

## ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТЫ НА ПОЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СОСТАВНОМ ВОЛНОВОДЕ

С помощью комбинации конечноэлементного и аналитического методов исследуется влияние частоты плоской симметричной волны Лэмба на характер напряженно-деформированного состояния в окрестности особых точек составного волновода с наклонной границей раздела материалов. Обнаружено резкое возрастание сингулярной составляющей при частотах, превышающих наименьшую критическую для первого по ходу волны материала. Причем такое поведение имеет место почти для всех возможных углов наклона границы.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается плоская задача о распространении стационарных волн, пропорциональных  $\exp(-i\omega t)$ , в бесконечном составном волноводе, имеющем наклонную границу соединения двух полуполос, выполненных из различных упругих материалов (фиг. 1, а).

Окрестность каждой из точек пересечения границы соединения с берегами волновода представляет собой биклин с суммарным углом раствора, равным  $\pi$ . Поле перемещений в такой окрестности имеет вид [1, 2]:

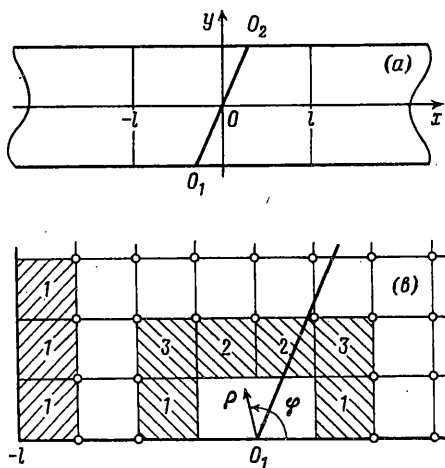
$$u = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \rho^{\lambda_m} \Phi_m(\varphi) \quad (1.1)$$

где  $\rho, \varphi$  – локальные полярные координаты с центром в особой точке, а  $\lambda_m (\operatorname{Re} \lambda_m > 0)$  – корни некоторого характеристического уравнения, пронумерованные в порядке возрастания реальных частей. Более подробную информацию о поведении корней, а также об изменениях в (1.1) в случае их кратности, можно найти в [2–4].

Аналитические выражения для вектор-функций  $\Phi_m(\varphi)$  в задачах статики хорошо известны [1, 2]. Что касается динамики, то в последнее время появились работы, посвященные исследованию собственных волновых полей в однородном клине [5, 6]. Однако для составного клина эта проблема не рассматривалась, поэтому в дальнейшем в качестве выражений для  $\Phi_m(\varphi)$  будем использовать статический вариант, считая, что при небольших частотах он дает приемлемую точность. Именно так поступают обычно, решая динамические задачи для тел с трещинами [7, 8].

Таким образом, напряженно-деформированное состояние в окрестности особой точки рассматриваемого волновода будем считать полностью определенным после вычисления достаточного количества коэффициентов  $C_m$ , ведущая роль среди которых принадлежит, очевидно,  $C_1$ . Его аналог в асимптотическом разложении типа (1.1) для трещины в однородном материале с точностью до нормирующего множителя идентифицируется с коэффициентом интенсивности напряжений (КИН), который является одной из основных характеристик в механике разрушения.

Однако, трудности в определении КИН начинают возникать уже тогда, когда традиционные подходы механики разрушения для однородной среды пытаются применять к процессу трещинообразования на границе раздела различных материалов, т.е. когда показатель сингулярности становится комплексным. Некоторые авторы [9]



Фиг. 1

даже считают, что в этом случае следует отказаться от такой характеристики как КИН, заменив ее другой, например, скоростью освобождения энергии.

Еще больше проблем возникает, когда особая точка является не вершиной трещины, а вершиной произвольного биклина. Поскольку общепринятого правила для определения параметра, аналогичного КИН, здесь нет, ограничимся исследованием влияния частоты  $\omega$  на ненормированный коэффициент при главном сингулярном члене. При этом основное внимание будем обращать не на численное значение  $C_1$ , а на его поведение в зависимости от  $\omega$ . Несмотря на то, что никакой физической интерпретацией коэффициент  $C_1$  в рассматриваемой задаче не обладает [9], его доминирующая роль при формировании поля напряжений в непосредственной близости от особой точки не вызывает сомнения. Поэтому те диапазоны частот, при которых происходит его резкое возрастание (если таковые имеются), можно отнести к зонам риска с точки зрения механики разрушения. Их определение и составляет основную цель предлагаемой работы.

2. **Метод решения.** Для нахождения  $C_m$  используем метод конечных элементов (МКЭ) с применением специальных элементов, сингулярных и буферных, построенных на основе асимптотики (1.1). Обычно такие элементы имеют форму сектора или его части [10]. Это упрощает необходимую аналитическую подготовку, однако добавляет сложности при построении сетки. Поэтому в случае, когда рассчитываемая область геометрически проста и позволяет использовать прямоугольные сетки, целесообразнее не вводить криволинейные специальные элементы, а придать им также форму прямоугольников.

Как и в [11], на конечные элементы разобьем только часть полосы, содержащую границу раздела материалов: на фиг. 1, *a* – это прямоугольник  $V$  с координатами  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Вне его волновое поле представим в виде линейной комбинации однородных решений, коэффициенты при которых будем рассматривать как часть глобального вектора неизвестных в МКЭ (подробнее см. в [11]).

На фиг. 1, *b* показано размещение разнотипных конечных элементов в окрестности нижней особой точки  $O_1$ . Непосредственно к ней примыкают сингулярные элементы, за ними следуют буферные (они заштрихованы и имеют несколько разновидностей – 1, 2, 3) и, наконец, стандартные. В качестве последних здесь и в дальнейшем используются билинейные прямоугольные элементы, узлы которых обозначены точками. Кроме того, на фиг. 1, *a, b* указаны две координатные системы: локальная полярная  $(\rho, \varphi)$  и основная – декартова  $(x, y)$ .

Аппроксимацию перемещений в сингулярных элементах будем строить аналогично [10], с той только разницей, что к усеченной до  $M$  слагаемых асимптотике (1.1) добавим еще члены, соответствующие тривиальным корням характеристического уравнения  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$  [1], поскольку рассматриваемая особая точка не закреплена. В результате матрицы жесткости и масс будут иметь размер  $(M + 3) \times (M + 3)$  и потребуют численного интегрирования по  $\varphi$ .

Назначение буферных элементов – обеспечить непрерывность волнового поля во всей полосе. Поэтому, как видно на фиг. 1, *b*, они размещаются не только между сингулярными и стандартными элементами, но и вдоль вертикальной границы  $x = \pm 1$  области  $V$ , имея один и тот же принцип построения для однотипных вариантов.

Среди буферных элементов есть элементы с двумя и тремя узлами. В первом случае перемещения аппроксимируются линейной по одной из декартовых координат поверхностью, натянутой на конечноэлементные  $U^k$  и аналитические  $U^a$  восполнения на противоположных сторонах элемента (стороны  $x = x_1$  и  $x = x_2$  для элементов типа 1 и стороны  $y = y_1$  и  $y = y_2$  для элементов типа 2 на фиг. 1, b):

$$u = pU^a + qU^k$$

где линейные функции  $p$  и  $q$  для элементов типа 1 имеют вид

$$p = (x - x_1) / (x_2 - x_1), \quad q = (x_2 - x) / (x_2 - x_1) \quad (2.1)$$

или наоборот, а для элементов типа 2:

$$p = (y - y_1) / (y_2 - y_1), \quad q = (y_2 - y) / (y_2 - y_1)$$

или наоборот. Вектор-функции  $U^a$  и  $U^k$  зависят от противоположной координаты, по которой в дальнейшем потребуются численные интегрирование. Число неизвестных в случае двухузлового буферного элемента будет на четыре больше, чем у функции  $U^a$ .

Когда буферный элемент имеет три узла (тип 3 на фиг. 1, b), его поле перемещений, как и в стандартных элементах, оказывается линейным и по  $x$  и по  $y$ . Поэтому все необходимые для построения матриц жесткости и масс интегралы берутся аналитически. Однако, в отличие от стандартного случая аппроксимация зависит не от 8, а от  $(M + 9)$  параметров, поскольку в той вершине, где нет узла в обычном для МКЭ смысле, перемещения определяются по формулам сингулярного элемента.

Определяющие матрицы перемещений  $N$  и деформаций  $B$  буферных элементов будем строить в декартовой системе координат на основе аналогичных матриц стандартного прямоугольного элемента с четырьмя узлами, стороны которого параллельны координатным осям:  $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $y_1 \leq y \leq y_2$ . Для компактности матрицы последнего запишем в блочном виде

$$N = [N_1 N_2 N_3 N_4], \quad B = [B_1 B_2 B_3 B_4] \quad (2.2)$$

где подматрицы  $N_i$  ( $2 \times 2$ ) и  $B_i$  ( $3 \times 2$ ) относятся к  $i$ -й вершине элемента ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) (подробную их запись можно найти, например, в [12]).

Формирование внешнего вида определяющих матриц  $N$  и  $B$  для буферных элементов с двумя узлами продемонстрируем на примере линейного по  $x$  элемента, у которого во второй и третьей вершинах, соответственно с координатами  $(x_2, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , нет узлов. Матрицу перемещений такого элемента можно представить как набор трех подматриц:

$$N = [N^a N_1 N_4] \quad (2.3)$$

две последние из которых считаем известными (2.2), а первая  $N^a$ , имеющая размер  $2 \times (M + 3)$ , несет всю информацию о соседнем сингулярном элементе с вершиной в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{bmatrix} p(x)f_{x1}(y) & \dots & p(x)f_{xM}(y) & p(x) & 0 & -p(x)(y - y_0) \\ p(x)f_{y1}(y) & \dots & p(x)f_{yM}(y) & 0 & p(x) & p(x)(x_2 - x_0) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Построенная на основе (2.3)–(2.4) матрица деформаций запишется как

$$B = [B^a B_1 B_4]$$

где  $B_1$  и  $B_4$  совпадают с аналогичными подматрицами в (2.2), а  $B^a$ , размера  $3 \times (M + 3)$ , состоит из следующих компонент:

$$\begin{bmatrix} f_{x1}/h & \dots & f_{xM}/h & 0 & 0 & 0 \\ p(x)(f_{y1})'_y & \dots & p(x)(f_{yM})'_y & 0 & 0 & 0 \\ p(x)(f_{x1})'_y + f_{y1}/h & \dots & p(x)(f_{xM})'_y + f_{yM}/h & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Здесь и выше  $f_{xm}$  и  $f_{ym}$  – декартовы составляющие вектор-функции  $\rho^{\lambda_m} \Phi_m(\varphi)$  из (1.1), вычисленные при  $x = x_2$ ,  $a(f_{xm})'_y$  и  $(f_{ym})'_y$  – их производные по  $y$ . Линейная функция  $p(x)$  имеет вид дроби (2.1),  $h$  – ее знаменатель. Аналогично строятся матрицы перемещений и деформаций остальных типов буферных элементов с двумя узлами, только в случае приграничных элементов последних трех колонок в матрицах (2.4), (2.5) не потребуются, а  $f_{xm}$  и  $f_{ym}$  будут декартовыми составляющими однородных решений для полосы при  $x = \pm l$  [11].

Определяющие матрицы буферного элемента с тремя узлами можно представить как набор четырех блоков, три последних из которых, относящиеся к имеющимся в таком элементе узлам, совпадают с соответствующими блоками  $N_j$  и  $B_j$  из (2.2), а первые  $N^a$  и  $B^a$  связаны с отсутствующими блоками  $N_j$  и  $B_j$  ( $j \neq i$ ) через матрицу констант  $K$ :

$$N^a = N_j K, \quad B^a = B_j K$$

Матрица  $K$  имеет размер  $2 \times (M + 3)$  и совпадает с матрицей перемещений соседнего сингулярного элемента, вычисленной в  $j$ -й вершине и записанной в декартовой системе координат.

Следует отметить еще одну особенность используемой конечноэлементной сетки. Как видно на фиг. 1,  $b$ , среди стандартных и буферных элементов встречаются биматериальные. Это такие элементы, через которые проходит граница раздела материалов, а в точках ее пересечения со сторонами элемента, в отличие от традиционных сеток, нет узлов. Поскольку по условиям поставленной задачи предполагается жесткое соединение полуполос, поле перемещений внутри биматериального элемента можно строить по правилам стандартного элемента, а при вычислении матрицы жесткости, куда входят характеристики материала, суммировать интегралы по каждой из составляющих биматериальный элемент однородных частей. В результате получим обычную для МКЭ картину аппроксимации: поле перемещений кусочно-непрерывно во всей рассчитываемой области, а поле напряжений имеет разрывы на границах элементов и вдоль линии раздела материалов.

Проведенный численный эксперимент показал, что при достаточно густых сетках – а именно их предполагается использовать для исследования волновых полей – расхождение по сравнению с традиционным вариантом столь невелико, что на коэффициентах асимптотики (1.1) почти не сказывается (менее 0,1%). В то же время, применение биматериальных элементов значительно упрощает построение сетки, особенно когда требуется проводить расчеты для различных положений границы раздела материалов.

Все необходимые для МК параметры – размер области  $V$ , разбиваемой на конечные элементы, количество учитываемых вне этой области неоднородных волн (однородные волны учитываются все), шаг сетки и т.п. – подбирались численно. Подробнее об этом, а также о проблемах, связанных с вариационным принципом для  $V$  и с не совсем эрмитовым характером окончательной матрицы линейной алгебраической системы, сказано в [11].

Что касается сингулярных элементов, то их линейный размер, из-за использования статической, а не динамической асимптотики, пришлось ограничить шагом сетки, что не позволило, в отличие от [10], существенно сократить число узловых неизвестных. Кроме того, встал вопрос о количестве учитываемых слагаемых в разложении (1.1): достаточно ли оставить только главный сингулярный член, или требуются допол-

нительные слагаемые, в том числе с  $\text{Re}(\lambda_m) > 1$ , которые бы обеспечили приемлемую точность по напряжениям на некотором удалении от особой точки? Считая, что на расстоянии в 3–4 шага равномерная сетка без сингулярных элементов верно отражает поведение напряжений и сравняя с ними напряжения, полученные при различных вариантах аппроксимации в сингулярных элементах, пришли к заключению, что для используемого шага сетки (примерно  $1/8$  минимальной длины волны) следует учитывать корни  $\lambda_m$ , попавшие в полосу  $0 < \text{Re}(\lambda_m) < 2$ . Таких корней для рассматриваемых углов наклона границы  $0 < \varphi_0 \leq 0,5\pi$  оказалось не больше четырех, причем среди них могут быть и комплексные [2, 3].

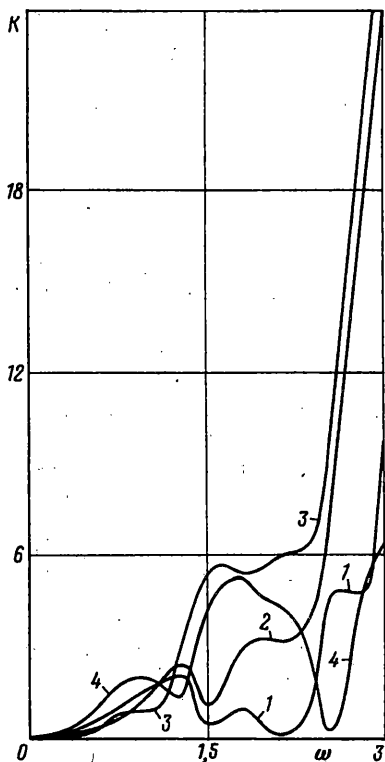
**3. Численные результаты.** Рассмотрим волновод, состоящий из двух условных материалов, модули жесткости которых относятся друг к другу как  $1/20$ , плотности – как  $1/5$ , а коэффициенты Пуассона одинаковы и равны  $0,3$ . Пусть слева, из  $x = -\infty$  идет плоская симметричная волна Лэмба единичной амплитуды. Будем считать, что ее частота может изменяться от  $0$  до  $3$ . В этом частотном интервале жесткий материал имеет по одному симметричному и антисимметричному толщинным резонансам ( $\omega'_{c1} = 2,94$ ,  $\omega'_{a1} = 1,57$ ), мягкий – два симметричных и три антисимметричных резонанса ( $\omega''_{c1} = 1,47$ ,  $\omega''_{c2} = 1,57$ ,  $\omega''_{a1} = 0,78$ ,  $\omega''_{a2} = 2,36$ ,  $\omega''_{a3} = 2,94$ ). Кроме того, у каждого материала имеется по одной критической частоте, дающей кратные корни соответствующего дисперсионного уравнения ( $\omega'_{k1} = 2,72$ ,  $\omega''_{k1} = 1,36$ ).

Наклон границы раздела между материалами, образующими волновод, будем менять от  $\pi/2$  (вертикальная граница) до  $\pi/10$  с шагом  $\pi/20$ . Когда падающая волна идет со стороны жесткого материала, верхняя точка  $O_2$  пересечения границы раздела с берегами волновода всегда будет сингулярной ( $0,63 < \text{Re}\lambda_1 < 0,92$ ), а нижняя  $O_1$  – только для  $\varphi_0 < 0,31\pi$  ( $0,75 < \text{Re}\lambda_1 < 1,0$ ). Поэтому при таком направлении движения исходной волны ограничимся исследованием влияния частоты  $\omega$  на коэффициент  $C_1$ , относящийся к верхней особой точке, точнее на его модуль, который обозначим  $K$ .

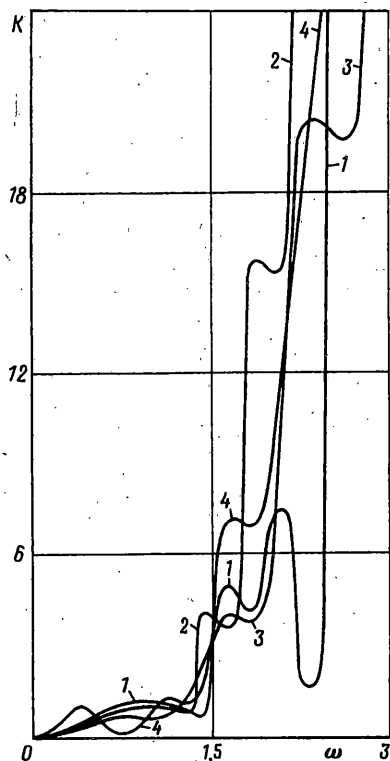
Сравнение численных результатов показало, что рассматриваемые углы наклона  $\varphi_0$  можно условно разбить на четыре группы: ( $\pi/2$ ), ( $9\pi/20 - 7\pi/20$ ), ( $3\pi/10 - \pi/4$ ), ( $\pi/5 - \pi/10$ ), в каждой из которых графики  $K(\omega)$  ведут себя более-менее однотипно. Поэтому на фиг. 2 показана зависимость  $K$  от  $\omega$  только для четырех углов  $\varphi_0$ :  $\pi/2$ ,  $7\pi/20$ ,  $\pi/4$ ,  $3\pi/20$  (соответственно кривые 1, 2, 3, 4).

Когда граница раздела вертикальная ( $\pi/2$ ) или имеет небольшой наклон ( $7\pi/20$ ), почти для всего рассмотренного диапазона частот (приблизительно  $\omega < 2,5$ ) значения  $K$  относительно невелики, хотя и довольно изменчивы в зависимости от  $\omega$ . В этом частотном интервале от границы отражается только одна симметричная однородная волна и не более двух антисимметричных:  $N^- \leq 1c + 2a$ . С ростом частоты (в данном случае это приводит к увеличению количества симметричных отраженных волн) поведение меняется:  $K$  начинает стремительно расти. Т.е. частоты, при которых  $N^- \geq 1c + 2a$ , следует, по-видимому, отнести к зоне повышенного риска для рассматриваемой сингулярной точки в составном волноводе.

Когда наклон границы близок к  $45^\circ$  (кривая 3 на фиг. 2), диапазон частот, приводящих к очень большим  $K$ , остается тем же самым  $\omega > 2,5$ . Однако для меньших частот наблюдается некоторое изменение в поведении  $K$ : выделяются два участка его относительной стабильности, и хотя во втором из них значения  $K$  несколько выше, чем были при аналогичных частотах для  $\varphi_0 > 3\pi/10$ , но по сравнению с зоной риска их можно считать неопасными. Переход с одного стабильного участка на другой происходит на частотах  $1,25 < \omega < 1,5$ , т.е. именно тогда, когда начинает возрастать количество прошедших через границу однородных волн:  $N^+ \geq 1c + 2a$ . В этом частотном диапазоне для менее наклонной границы (кривые 1, 2 на фиг. 2) имел



Фиг. 2



Фиг. 3

место локальный минимум графиков  $K(\omega)$ . Таким образом, частоты, близкие к первым критическим для обоих материалов  $\omega'_{k1}$  и  $\omega''_{k1}$  ( $\omega'_{k1} > \omega''_{k1}$ ), являются небезынтересными в отношении поведения сингулярных напряжений, особенно та из них, которая относится к первому по ходу исходной волны материалу.

Несколько особняком стоит случай очень большого наклона границы (кривая 4 на фиг. 2). Несмотря на то, что изменение поведения графика  $K(\omega)$  вблизи  $\omega'_{k1}$  и  $\omega''_{k1}$  здесь особенно ярко выражено, значения  $K$  при  $\omega > 2,5$  увеличиваются значительно в меньшей степени, чем это было в предыдущих случаях.

Когда соотношение жесткостей материалов, составляющих волновод, меняется, т.е. падающая волна идет из мягкого материала в жесткий, то, как и следовало ожидать, стремительный рост значений  $K$  начинается раньше, приблизительно при  $\omega > 1,25$  (теперь  $K$  — это модуль коэффициента  $C_1$  для нижней сингулярной точки). На фиг. 3 приведено изменение  $K(\omega)$  для четырех углов наклона границы  $\pi/2, 7\pi/20, \pi/4, 3\pi/20$  (соответственно кривые 1, 2, 3, 4). В отличие от ранее рассмотренного случая увеличение  $K$  в зоне риска происходит немонотонно. В частности, при вертикальной границе (кривая 1 на фиг. 3) в окрестности  $\omega'_{k1}$  наблюдается резкое уменьшение коэффициента, с последующим возрастанием.

Что касается небольших частот ( $\omega < 1,25$ ), то чем сильнее наклон границы, тем ниже проходит график, уменьшаясь по направлению к  $\omega = 0$ . И только в случае  $\varphi_0 = 3\pi/20$  (кривая 4 на фиг. 3) наблюдается некоторое повышение значений  $K$ , что, кстати, имело место и при противоположном движении исходной волны (кривая 4 на фиг. 2).

Таким образом, роль сингулярной составляющей напряжений в окрестности особых точек неоднородного волновода с косою границей раздела сред резко возрастает, когда частота возбуждаемой в одной из составляющих его полуполос

симметричной волны Лэмба превосходит первую критическую для этой полуполосы. Влияние угла наклона границы очень незначительно: чем он больше, тем как правило, несколько раньше начинается этот процесс. Исключение составляет только случай очень пологой границы ( $\varphi_0 < \pi/6$ ), когда исходная волна идет со стороны более жесткого материала.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С.178–186.
2. Bogy D.B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1971. V. 38. № 2. P. 87–96.
3. Луцик О.Н. О поведении корней уравнения, определяющего особенность напряженного состояния в окрестности вершины составного клина // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С. 82–92.
4. Dempsey J.P., Sinclair G.B. On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge // J. Elasticity, 1979. V. 9. № 4. P. 373–391.
5. Будаев Б.В. Собственные функции свободного упругого клина // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Ленинград. 1989. № 29. С. 36–40.
6. Толинов Х.Б. Динамическая задача теории упругости для угловых областей с однородными граничными условиями // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 120–126.
7. Zhang C. Dynamic stress intensity factors for periodically spaced collinear antiplane shear cracks between dissimilar media // Theoret. Appl. Fract. Mech. 1991. V. 15. № 5. P. 219–227.
8. Tan C.L., Gao Y.L. Axisymmetric boundary integral equation analysis of interface cracks between dissimilar materials // Computat. Mech. 1991. V. 7. № 5–6. P. 381–396.
9. Toya M. Fracture mechanics of interfaces // JSME. Internat. J. Ser. I. 1990. V. 33. № 4. P. 413–424.
10. Луцик О.Н. Модификация метода конечных элементов для областей с особыми точками // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 87–93.
11. Луцик О.Н., Устинов Ю.А. Распространение волн в неоднородной полосе с наклонной границей раздела сред // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. Нижний Новгород. 1995. Вып. 2. С. 133–140.
12. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов // М.: Мир, 1979. 392 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию  
14.XII.1994