

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1996**

УДК 539.3

© 1996 г. Д. БАРДЗОКАС, М.Л. ФИЛЬШТИНСКИЙ

**ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО
ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТУННЕЛЬНЫМИ ПОЛОСТАМИ**

Рассматривается антиплоская нестационарная динамическая задача электроупругости для пьезокерамического полупространства (пространства), содержащего туннельные цилиндрические полости. В качестве нагрузки принимаются линейные источники (сдвиговое усилие, электрический заряд), действующие на границе полупространства. С привлечением интегрального преобразования Фурье по времени исходная граничная задача в трансформированной плоскости сводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений. Приводятся данные расчетов, иллюстрирующие перераспределение касательных напряжений на контуре эллиптического отверстия в процессе динамического нагружения.

Краевые задачи электроупругости о гармоническом и импульсном нагружении сред с трещинами или отверстиями исследовались в [1–5].

1. Рассмотрим отнесенную к декартовым прямоугольным координатам $x_1 x_2 x_3$ полу бесконечную пьезокерамическую среду $-\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 < \infty, -\infty < x_3 < \infty$, ослабленную криволинейными туннельными полостями Γ_m ($m = 1, 2, \dots, n$) с образующими, параллельными осями x_3 (фиг. 1). Пусть на линии $x_1 = x_{10}, x_2 = 0, -\infty < x_3 < \infty$ свободной границы полупространства действует произвольно изменяющееся со временем сдвиговое усилие $P(x_1, t) = p_0(t)\delta(x_1 - x_{10})$ или электрический заряд $Q(x_1, t) = q_0(t)\delta(x_1 - x_{10})$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, t – время.

Будем предполагать, что полупространство сопряжено с вакуумом, поверхности полостей Γ_m свободны от механической нагрузки и покрыты заземленными электродами, ось x_3 декартовой системы координат совпадает с направлением силовых линий электрического поля предварительной поляризации керамики, а контуры Γ_m не имеют общих точек и их кривизны удовлетворяют условию Гельдера [6].

В указанной постановке в области Ω , занятой телом, будут возбуждаться акусто-электрические поля, соответствующие антиплоской деформации. Исходные соотношения в квазистатическом приближении сводятся к двум дифференциальным уравнениям относительно перемещения u_3 и электрического потенциала φ [1]:

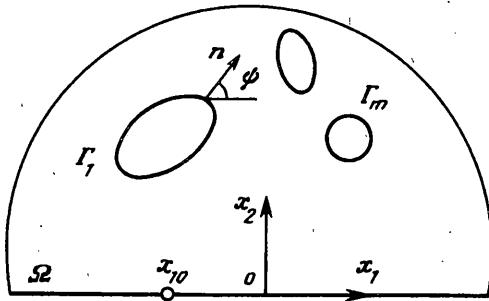
$$c_{44}^E \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 \varphi - \rho \ddot{u}_3 = 0, \quad e_{15} \nabla^2 u_3 - \varepsilon_{11}^\epsilon \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.1)$$

Здесь c_{44}^E – модуль сдвига, измеряемый при постоянном электрическом поле, e_{15} – пьезоэлектрическая постоянная, $\varepsilon_{11}^\epsilon$ – диэлектрическая проницаемость, определяемая при постоянной деформации, ρ – плотность материала. При $e_{15} = 0$ (пьезопассивания среды) система (1.1) распадается на два независимых уравнения.

Механические и электрические краевые условия на поверхностях Γ_m ($m = 1, 2, \dots, n$) представим в виде

$$\tau_{13} \cos \psi + \tau_{23} \sin \psi = 0, \quad \varphi = 0 \quad (E_s = 0) \quad (1.2)$$

где $\tau_{13} = \tau_{13}(x_1, x_2)$, $\tau_{23} = \tau_{23}(x_1, x_2)$ – напряжения продольного сдвига, E_s – касательная



Фиг. 1

компонента вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E} = (E_1, E_2)$, ψ – угол между нормалью к контуру полости и осью ox_1 .

Считая, что полупространство граничит с вакуумом, электрическое условие на его границе можно заменить приближенным равенством $D_2 = 0$ ($\mathbf{D} = (D_1, D_2)$ – вектор электрической индукции).

Выполняя интегральное преобразование Фурье по времени (при нулевых начальных условиях):

$$\{U_3(x_1, x_2, \omega), \Phi(x_1, x_2, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \{u_3(x_1, x_2, t), \phi(x_1, x_2, t)\} e^{i\omega t} dt \quad (1.3)$$

$$\{u_3(x_1, x_2, t), \phi(x_1, x_2, t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^\infty \{U_3(x_1, x_2, \omega), \Phi(x_1, x_2, \omega)\} e^{-i\omega t} d\omega$$

рассмотрим сперва ситуацию, когда в однородном пьезокерамическом пространстве (без полостей) действуют линейные источники обоих типов. В этом случае из уравнений (1.1) (с соответствующими правыми частями) при учете (1.3) получим

$$c_{44}^E \nabla^2 U_3^0 + e_{15} \nabla^2 \Phi_0 + \rho \omega^2 U_3^0 = -P_0(\omega) \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}) \quad (1.4)$$

$$e_{15} \nabla^2 U_3^0 - \varepsilon_{11}^E \nabla^2 \Phi_0 = Q_0(\omega) \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})$$

Здесь $P_0(\omega)$ и $Q_0(\omega)$ – спектральные функции сдвигового усилия и электрического заряда, приложенных вдоль линии $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $-\infty < x_3 < \infty$ пространства. Из физических соображений ясно, что параметр ω имеет смысл круговой частоты.

Решение системы (1.4) находится и определяется формулами

$$U_3^0 = \frac{i}{4c_{44}^E \varepsilon_{11}^E (1 + k_{15}^2)} (\varepsilon_{11}^E P_0(\omega) - e_{15} Q_0(\omega)) H_0^{(1)}(\gamma r) \quad (1.5)$$

$$\Phi_0 = \frac{i}{4\varepsilon_{11}^E (1 + k_{15}^2)} \left(\frac{e_{15} P_0(\omega)}{c_{44}^E} - k_{15}^2 Q_0(\omega) \right) H_0^{(1)}(\gamma r) - \frac{Q_0(\omega)}{2\pi\varepsilon_{11}^E} \ln r$$

$$\gamma = \omega / c, \quad c = [c_{44}^E (1 + k_{15}^2) / \rho]^{1/2}, \quad k_{15} = e_{15} / (\varepsilon_{11}^E c_{44}^E)^{1/2}$$

$$r = |z - z_0|, \quad z = x_1 + ix_2, \quad z_0 = x_{10} + ix_{20}$$

где k_{15} – коэффициент электромеханической связи, c – скорость волн сдвига в пьезокерамической среде, $H_j^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода порядка j .

Если источник сосредоточен на линии $x_1 = x_{10}$, $x_2 = 0$, $-\infty < x_3 < \infty$ границы свободного полупространства, то решение можно определить при помощи метода отражения. В предположении, что внешней средой является вакуум ($D_2 = 0$ при $x_2 = 0$), приходим к равенствам (1.5), в которых вместо r следует подставить $r^* = |z - x_{10}|$, а также удвоить величины $P_0(\omega)$ и $Q_0(\omega)$.

Следует отметить, что в случае стационарного волнового процесса в пьезокерамическом полупространстве с туннельными полостями соответствующая граничная задача, исходя из краевых условий (1.2), была сведена к системе двух сингулярных интегральных уравнений [2]. Применение интегрального преобразования (1.3) при

переходе в трансформированную плоскость дает возможность непосредственно использовать этот алгоритм. При этом оператор системы интегральных уравнений останется прежним, а ее правая часть в силу (1.5) и выше изложенного изменится. В результате будем иметь

$$p(\zeta_0) + \int_{\Gamma} p(\zeta) g_1(\zeta, \zeta_0) ds + \int_{\Gamma} f(\zeta) g_2(\zeta, \zeta_0) ds = N_1(\zeta_0) \quad (1.6)$$

$$-f(\zeta_0) + \int_{\Gamma} f(\zeta) g_3(\zeta, \zeta_0) ds + \int_{\Gamma} p(\zeta) g_4(\zeta, \zeta_0) ds = N_2(\zeta_0)$$

$$g_1(\zeta, \zeta_0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0} - \frac{i\gamma}{2} [H_1(\gamma r_0) \cos(\psi_0 - \alpha_0) -$$

$$-AH_1^{(1)}(\gamma r_{10}) \cos(\psi_0 - \alpha_{10})], \quad G(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{\pi} e^{i\psi_0} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{A}{\bar{\zeta} - \zeta_0} \right)$$

$$g_2(\zeta, \zeta_0) = \frac{ie_{15}}{2c_{44}^E(1+k_{15}^2)} \operatorname{Im} G(\zeta, \zeta_0), \quad g_3(\zeta, \zeta_0) = \operatorname{Re} G(\zeta, \zeta_0)$$

$$g_4(\zeta, \zeta_0) = \frac{k_{15}^2 c_{44}^E}{e_{15}} \left\{ \frac{2}{\pi i} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0} + \gamma [H_1(\gamma r_0) \sin(\psi_0 - \alpha_0) - AH_1^{(1)}(\gamma r_{10}) \sin(\psi_0 - \alpha_{10})] \right\}$$

$$N_1(\zeta_0) = \frac{1-A}{8c_{44}^E(1+k_{15}^2)} \cos(\psi_0 - \alpha_0^*) [\gamma P_0(\omega) H_1^{(1)}(\gamma r_0^*) -$$

$$-\frac{e_{15}}{3\varepsilon_{11}} Q_0(\omega) (\gamma H_1^{(1)}(\gamma r_0^*) + \frac{2i}{\pi r_0^*}), \quad N_2(\zeta_0) = \frac{1-A}{4\varepsilon_{11}} \sin(\psi_0 - \alpha_0^*) \times$$

$$\times \left[\frac{i\gamma e_{15}}{c_{44}^E(1+k_{15}^2)} H_1^{(1)}(\gamma r_0^*) - Q_0(\omega) \left(\frac{i\gamma k_{15}^2}{1+k_{15}^2} H_1^{(1)}(\gamma r_0^*) - \frac{2}{\pi r_0^*} \right) \right]$$

$$H_1(x) = 2i / (\pi x) + H_1^{(1)}(x), \quad r_0 = |\zeta - \zeta_0|, \quad r_{10} = |\bar{\zeta} - \zeta_0|$$

$$r_0^* = |\zeta - x_{10}|, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta - \zeta_0), \quad \alpha_{10} = \arg(\bar{\zeta} - \zeta_0), \quad \alpha_0^* = \arg(\zeta - x_{10})$$

$$\Psi_0 = \Psi(\zeta_0), \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2, \quad \xi_0 = \xi_{10} + i\xi_{20}, \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma = \cup \Gamma_m$$

Здесь ядра $g_2(\zeta, \zeta_0)$ и $g_4(\zeta, \zeta_0)$ – сингулярные (типа Коши), ds – элемент дуги контура Γ . Случай $A = -1$ соответствует свободному от сил, граничащему с вакуумом полупространству, случай $A = 0$ – неограниченному пространству.

Заметим, что для пьезопассивной среды система (1.6) представляет собой два несвязанных уравнения относительно функций $p(\zeta)$ и $f(\zeta)$ соответственно.

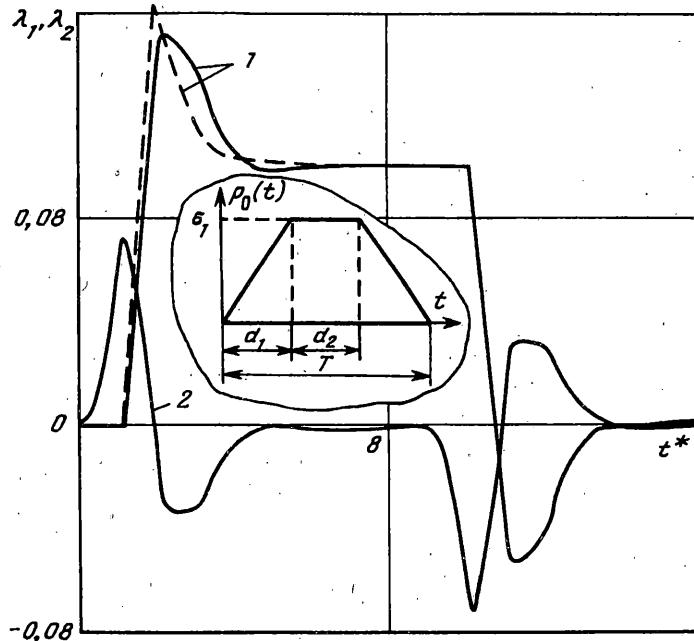
2. Для анализа динамической напряженности полупространства с туннельными полостями вычислим сдвиговое напряжение $\tau_s = \tau_{23} \cos \psi_0 - \tau_{23} \sin \psi_0$ в точке $\zeta_0 \in \Gamma$. Уравнения состояния пьезокерамики, поляризованной в направлении x_3 , имеют вид

$$\tau_{13} = c_{44}^E \partial_1 u_3 + e_{15} \partial_1 \varphi, \quad \tau_{23} = c_{44}^E \partial_2 u_3 + \varepsilon_{15} \partial_2 \varphi \quad (2.1)$$

$$D_1 = e_{15} \partial_1 u_3 - \varepsilon_{11} \partial_1 \varphi, \quad D_2 = e_{15} \partial_2 u_3 - \varepsilon_{11} \partial_2 \varphi$$

где дифференциальный оператор $\partial_k = \partial / \partial x_k$ ($k = 1, 2$). Принимая во внимание (1.2) и (2.1), получим выражение для трансформанты напряжения $T_s = F(\tau_s)$:

$$T_s(\zeta_0, t) = i c_{44}^E \left(e^{i\psi_0} \frac{\partial U_3}{\partial \zeta_0} - e^{-i\psi_0} \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial \bar{\zeta}_0} \right), \quad U_3 = U_3^0 + U_3^* \quad (2.2)$$



Фиг. 2

$$\partial / \partial \zeta_0 = \frac{1}{2}(\partial / \partial \xi_{10} - i\partial / \partial \xi_{20}), \quad \partial / \partial \bar{\zeta}_0 = \frac{1}{2}(\partial / \partial \xi_{10} + i\partial / \partial \xi_{20})$$

Здесь величина U_3 представляет собой суммарное волновое поле перемещения, обусловленное действием источника (излучаемая волна U_3^0) и наличием в теле концентраторов напряжений Γ_m (рассеянная волна U_3^*); под производными $\partial U_3 / \partial \zeta_0, \partial U_3 / \partial \bar{\zeta}_0$ понимаются их предельные значения при $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$ из области Ω .

В трансформантах Фурье выражение (2.2) представим в форме, более удобной для вычислений. При этом будем исходить из интегрального представления для рассеянной волны [2]:

$$U_3^*(x_1, x_2, \omega) = \int_{\Gamma} p(\zeta) (H_0^{(1)}(\gamma|\zeta - z|) - AH_0^{(1)}(\gamma|\bar{\zeta} - z|)) ds \quad (2.3)$$

Находя предельные значения функций $\partial U_3 / \partial \zeta_0, \partial U_3 / \partial \bar{\zeta}_0$ при учете (2.3), (1.5) и подставляя их в (2.2), получим

$$T_s(\zeta_0, \omega) = T_s^0 - \frac{e_{15}}{k_{15}^2} \int_{\Gamma} p(\zeta) g_4(\zeta, \zeta_0) ds \quad (2.4)$$

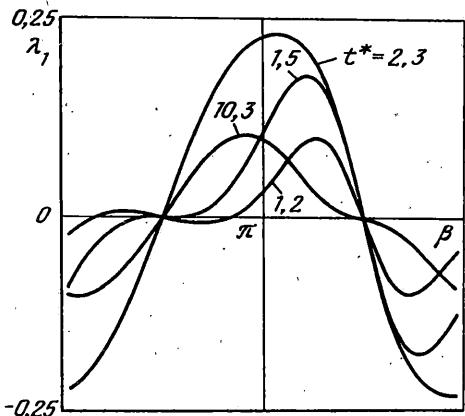
$$T_s^0 = \frac{i\gamma(1-A)}{4e_{11}^*(1+k_{15}^2)} (e_{11}^* P_0(\omega) - e_{15} Q_0(\omega)) \sin(\psi_0 - \alpha_0^*) H_1^{(1)}(\gamma r_0^*)$$

Фигурирующая в (2.4) функция $g_4(\zeta, \zeta_0)$ определена в (1.6).

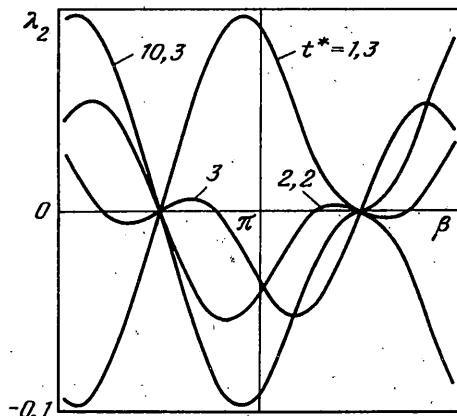
Переход к оригиналам искомых величин осуществляется согласно (1.3). Имеем

$$\tau_s(\zeta_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^\infty T_s(\zeta_0, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.5)$$

3. В качестве примера рассмотрим пространство и полупространство (керамика



Фиг. 3



Фиг. 4

PZT-4 [7]), ослабленные туннельной полостью эллиптического поперечного сечения с параметрическими уравнениями

$$\xi_1 = R_1 \cos \beta, \quad \xi_2 = R_2 \sin \beta + h \quad (0 \leq \beta \leq 2\pi) \quad (3.1)$$

и подверженное действию импульсной нагрузки трапециевидной формы (фиг. 2). Соответствующие спектральные функции данного импульса имеют вид

$$S_v(\omega) = \frac{\sigma_v}{\omega^2 \sqrt{2\pi}} [d_1^{-1} (e^{i\mu_1} - 1) - \mu_2 (e^{i\omega T} - e^{i\mu_3})] \quad (3.2)$$

$$S_1(\omega) = P_0(\omega), \quad S_2(\omega) = Q_0(\omega), \quad \mu_1 = \omega d_1$$

$$\mu_2 = (T - d_1 - d_2)^{-1}, \quad \mu_3 = \omega(d_1 + d_2)$$

Ниже целесообразно ввести безразмерные временные параметры (c – скорость волн в пьезокерамике) $t^* = cth^{-1}$, $d_1^* = cd_1 h^{-1}$, $T^* = cTh^{-1}$.

Функции $p(\zeta)$ и $f(\zeta)$ вычислялись из системы (1.6) при учете (3.1), (3.2) по схеме метода механических квадратур [8]. Полубесконечный интервал интегрирования в формуле (2.5) заменялся конечным $[0, \omega^*]$; при этом величина ω^* определялась путем численного анализа из соображений достижения минимальной погрешности. Количество узлов интерполяции на контуре отверстия принималось $N = 21, 31$ и 41 ; дальнейшее увеличение N не приводило к существенному уточнению результатов.

На фиг. 2 для случая пространства представлено изменение величин $\lambda_v = \tau_s R / \Lambda_v$ ($v = 1, 2$) в точке контура $\beta = \pi$ как функции t^* при действии сдвигового усилия (кривая 1) или электрического заряда (кривая 2). Кривые отвечают значениям параметров $A = 0$, $T^* = 10$, $d_1^* = 1$, $d_2^* = 8$, $\sigma_1^* = c\sigma_1 h^{-1} = 1$ Н/(с·м), $\sigma_2^* = c\sigma_2 h^{-1} = 1$ Кл/(с·м), $R_2/R_1 = 3/4$, $h/R_1 = 3$. Величина $\Lambda = \sigma_1$, если $p_0(t) \neq 0$, $q_0(t) = 0$ и $\Lambda = \sigma_2 c_{22}^E / e_{15}$, если $p_0(t) = 0$, $q_0(t) \neq 0$; $R = (R_1 + R_2)/2$, $R_1 = 0,4$ м. Координаты источников принимали равными $x_{10} = x_{20} = 0$. Штриховой линией в окрестности пикового значения t^* отмечено поведение $\lambda_1(t^*)$ при $k_{15} = 0$ (пьезопассивная среда).

Результаты расчета величин λ_v на контуре кругового отверстия в полупространстве для различных значений времени t^* при действии сдвигового усилия и заряда показаны на фиг. 3 и 4 соответственно. Кривые построены для тех же параметров, что и выше, кроме $A = -1$, $h/R_1 = 4$, $R = 0,1$ м.

Как следует из фиг. 2, вследствие инерционного эффекта величина $\lambda_1(t^*)$ может

превысить свое статическое значение $\lambda_1^0 \approx 0,1$ примерно на 50%. Влияние связанности механических и электрических полей проявляется в наличии волны Гуляева – Блюстейна на поверхности полости в пьезокерамической среде [1].

Отметим, что развиваемый здесь подход к анализу нестационарных динамических электроупругих полей в среде с полостями оказывается эффективным и может быть обобщен на ситуацию, когда в среде имеется несколько полостей различной конфигурации.

Авторы благодарят профессора В.З. Партона за обсуждение результатов и высказанные при этом полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука. 1988. 472 с.
2. Фильшинский М.Л. Гармонические колебания пьезоэлектрического полупространства с туннельными полостями (деформация продольного сдвига) // Акуст. ж. 1991. Т. 37. Вып. 4. С. 777–781.
3. Партон В.З., Фильшинский М.Л. Стационарный волновой процесс в пьезоэлектрическом слое и полуслое, ослабленных туннельными разрезами (антиплоская деформация) // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 510–518.
4. Парトン В.З., Фильшинский М.Л. Динамическая задача электроупругости для слоя и полуслоя с туннельными полостями // Изв. АН МГГ. 1993. № 5. С. 82–88.
5. Фильшинский М.Л. Динамическое нагружение пьезокерамического полупространства с трещиной // Акуст. ж. 1993. Т. 39. Вып. 5. С. 921–928.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
7. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. Т. 1. С. 204–326.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984. 344 с.

Греция, Сумы

Поступила в редакцию
28.X.1994