МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1996

УДК 531.53

 О.В. ХОЛОСТОВА

О ДВИЖЕНИИ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ РЕЗОНАНСЕ В ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Исследуется движение близкой к интегрируемой периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы в резонансном случае, когда частота внешнего периодического возмущения близка к частоте собственных малых колебаний невозмущенной системы в окрестности ее устойчивого положения равновесия. Получено строгое решение задачи о существовании и устойчивости периодических движений с периодом, равным периоду возмущающего воздействия. Дан подробный анализ модельной задачи, описывающей нелинейные резонансные колебания возмущенной системы. В качестве примера рассмотрена задача о движении маятника, когда его точка подвеса совершает вынужденные горизонтальные колебания малой амплитуды.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение математического маятника, точка подвеса которого совершает горизонтальные гармонические колебания малой амплитуды. Пусть l – длина маятника, a и Ω – амплитуда и частота колебаний его точки подвеса. Уравнение движения маятника имеет вид

$$q'' + \omega_0^2 \sin q = \varepsilon \sin\eta \cos q \tag{1.1}$$

где q – угол отклонения маятника от вертикали, $\varepsilon = a/l \ll 1$, $\omega_0^2 = g/(\Omega^2 l)$, штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\eta = \Omega t$.

Уравнение (1.1) можно заменить системой двух канонических уравнений

$$dq/d\eta = \partial H/\partial p, \quad dp/d\eta = -\partial H/\partial q \tag{1.2}$$

с гамильтонианом H, имеющим вид

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad H_0 = \frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos q, \quad H_1 = -\sin\eta \sin q \tag{1.3}$$

Уравнения (1.2) при $\varepsilon = 0$ имеют решение $q = 0, p = 0$, соответствующее устойчивому положению равновесия маятника.

Пусть в возмущенной системе ($\varepsilon \neq 0$) имеет место резонанс в вынужденных колебаниях: частота ω_0 собственных малых колебаний маятника близка к единице. Нестрогое исследование задачи о колебаниях маятника в этом резонансном случае содержится в [1, 2].

При помощи нескольких канонических замен переменных приведем гамильтониан (1.3) к форме, характерной для рассматриваемой задачи о нелинейных резонансных колебаниях в окрестности устойчивого равновесия невозмущенной системы.

В окрестности решения $q = 0, p = 0$ гамильтониан (1.3) представляет в виде ряда по степеням q и p, причем

$$H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 q^2) - \frac{1}{24}\omega_0^2 q^4 + \ldots, \quad H_1 = -\sin\eta q + \frac{1}{6}\sin\eta q^3 + \ldots$$

где многоточия обозначают совокупности членов выше четвертой степени по q и p.

Полагая $q = \varepsilon^{1/3} q^* / \sqrt{\omega_0}$, $p = \varepsilon^{1/3} \sqrt{\omega_0}\, p^*$, запишем новый гамильтониан H^* в виде

$$H^* = \frac{1}{2}\omega_0 (q^{*2} + p^{*2}) - \frac{1}{24}\varepsilon^{2/3} q^{*4} - \frac{\varepsilon^{2/3}\sin\eta}{\sqrt{\omega_0}} q^* + O(\varepsilon^{4/3})$$

Канонические замены переменных $q^*, p^* \to x, y$ и $x, y \to \varphi, r$, задаваемые равенствами

$$q^* = x + \frac{\varepsilon^{2/3}}{192\omega_0}(5x^3 + 9xy^2) + O(\varepsilon^{4/3})$$

$$p^* = y - \frac{\varepsilon^{2/3}}{64\omega_0}(5x^2 y + y^3) + O(\varepsilon^{4/3})$$

$$x = \sqrt{2r}\sin\varphi, \quad y = \sqrt{2r}\cos\varphi$$

преобразуют гамильтониан к следующему виду

$$H = \omega_0 r - \frac{1}{16}\varepsilon^{2/3} r^2 - \frac{\varepsilon^{2/3}\sqrt{r}}{\sqrt{2\omega_0}}[\cos(\varphi - \eta) - \cos(\varphi + \eta)] + O(\varepsilon^{4/3})$$

Положим $\omega_0 = 1 + \varepsilon^{2/3}\nu$. Каноническое преобразование $\varphi, r \to \psi, R$ по формулам

$$r = R - \frac{1}{4}\varepsilon^{2/3}\sqrt{2R}\cos(\psi + \eta) + O(\varepsilon^{4/3}), \quad \varphi = \psi + \frac{\sqrt{2}\varepsilon^{2/3}}{8\sqrt{R}}\sin(\psi + \eta) + O(\varepsilon^{4/3})$$

исключает из гамильтониана слагаемое, содержащее гармонику $\cos(\varphi + \eta)$.

И, наконец, замена переменных $\psi, R \to \theta, \rho$ вида $\psi = \eta - \theta$, $R = 4\sqrt[3]{2}\rho$ и введение нового времени $\tau = \sqrt[3]{2} / 4\varepsilon^{2/3}\eta$ преобразует гамильтониан H к следующей окончательной форме

$$H = H^{(0)} + O(\varepsilon^{2/3}) \tag{1.4}$$

$$H^{(0)} = -\mu\rho + \rho^2 + \sqrt{\rho}\cos\theta \tag{1.5}$$

Через μ в (1.5) обозначена величина $4 / \sqrt[3]{2}\nu$.

Соответствующие гамильтониану (1.4) уравнения движения имеют вид

$$d\theta / d\tau = \partial H / \partial\rho, \quad d\rho / d\tau = -\partial H / \partial\theta \tag{1.6}$$

К рассмотрению системы (1.6) с гамильтонианом (1.4) приводит исследование широкого класса задач о движении близких к интегрируемым гамильтоновых систем с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях, когда частота внешнего периодического возмущения близка к частоте собственных малых колебаний невозмущенной системы в окрестности ее устойчивого положения равновесия. Получение гамильтониана (1.4) для таких систем аналогично приведенной выше процедуре в случае рассматриваемой здесь задачи о движении маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса.

Если в уравнениях (1.6) отбросить члены порядка $\varepsilon^{2/3}$ и выше, то получим укороченную (модельную) систему

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\mu + 2\rho + \frac{\cos\theta}{2\sqrt{\rho}}, \quad \frac{d\rho}{d\tau} = \sqrt{\rho}\sin\theta \tag{1.7}$$

которой отвечает функция Гамильтона $H = H^{(0)}$. Система с таким гамильтонианом давно известна в небесной механике, различные аспекты динамики этой системы рассматривались в [3–9] в связи с исследованием движения малых планет при резонансе 2 : 1. П. 2 данной статьи содержит подробное аналитическое описание движения модельной системы (1.7).

В п. 3 изложено строгое решение задачи о существовании, числе и устойчивости по Ляпунову периодических движений близкой к интегрируемой гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях. Применение полученных результатов к задаче о колебаниях маятника позволяет сделать строгие выводы о его 2π-периодических движениях при резонансе $\omega_0 \approx 1$.

Отметим, что задача о существовании периодических движений гамильтоновой системы с n степенями свободы при резонансе в вынужденных колебаниях изучена ранее в [10]. Там же получены условия устойчивости периодических движений, но только в линейном приближении.

2. Исследование модельной системы. *2.1.* Положения равновесия системы (1.7) определяются из соотношений $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 2\sqrt{\rho}(\mu - 2\rho)$, откуда следует, что $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, а равновесные значения переменной ρ являются корнями уравнения

$$f(\rho) \equiv \rho^3 - \mu\rho^2 + \tfrac{1}{4}\mu^2\rho - \tfrac{1}{16} = 0 \qquad (2.1)$$

При $\mu < \tfrac{3}{2}$ уравнение (2.1) имеет один положительный вещественный корень

$$\rho_0 = -\frac{\mu}{3}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3} + \frac{\mu}{3}, \quad \operatorname{ch}\varphi = \frac{27 - 4\mu^3}{4|\mu|^3} \qquad (2.2)$$

а при $\mu \geqslant \tfrac{3}{2}$ – три положительных вещественных корня

$$\rho_1 = -\frac{\mu}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{\mu}{3}, \quad \rho_2 = -\frac{\mu}{3}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{\mu}{3} \qquad (2.3)$$

$$\rho_3 = -\frac{\mu}{3}\cos\left(\frac{\mu}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\mu}{3}, \quad \cos\varphi = \frac{4\mu^3 - 27}{4\mu^3}$$

причем при $\mu = \tfrac{3}{2}$ один из корней двойной: $\rho_1 = \rho_2 = \tfrac{1}{4}$, $\rho_3 = 1$.

Решениям $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ отвечает равновесное значение угла $\theta = 0$, а для решений $\rho = \rho_0$ и $\rho = \rho_3$ имеем $\theta = \pi$.

Укажем, что для корней уравнения $f(\rho) = 0$ имеют место соотношения

$$\rho_0 > \max\left(\frac{\mu}{6}, \frac{\mu}{2}\right), \quad \rho_1 \leqslant \frac{\mu}{6} \leqslant \rho_2 < \frac{\mu}{2} < \rho_3 \qquad (2.4)$$

где величины $\mu/6$ и $\mu/2$ – точки экстремума функции $f(\rho)$, а знаки равенства в (2.4) относятся только к случаю $\mu = \tfrac{3}{2}$.

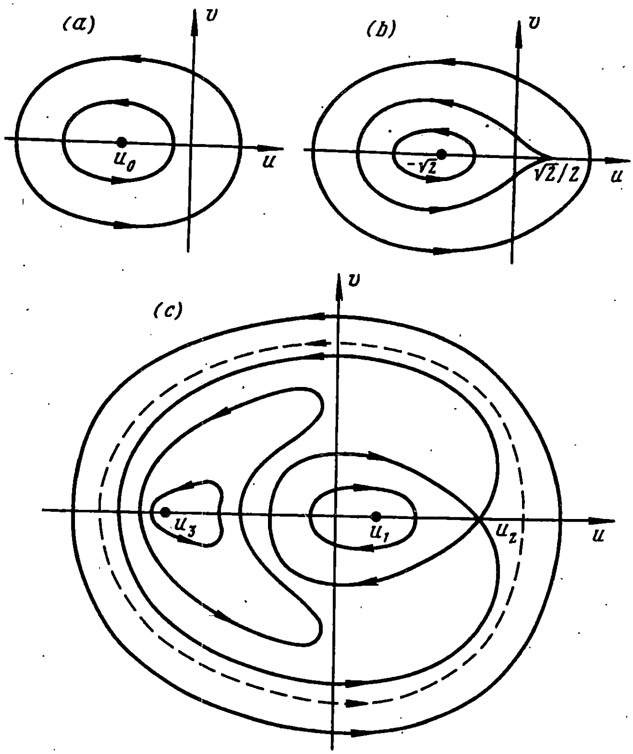
Пусть $\theta = \theta_*$, $\rho = \rho_*$ – одно из положений равновесия системы (1.7). Полагая $\theta = \theta_* + x$, $\rho = \rho_* + y$, запишем гамильтониан (1.5) в виде

$$H^{(0)} = H_2^{(0)} + \ldots, \quad H_2^{(0)} = \rho_*(2\rho_* - \mu)x^2 + \frac{6\rho_* - \mu}{4\rho_*}y^2 \qquad (2.5)$$

где многоточие обозначает совокупность членов выше второй степени по x и y.

Из (2.5) следует, что при выполнении условия

$$(2\rho_* - \mu)\ (6\rho_* - \mu) > 0 \qquad (2.6)$$



Фиг. 1

функция $H^{(0)}$ является знакоопределенной, а так как соотношение $H^{(0)} = h = \text{const}$ есть интеграл системы (1.7), то соответствующее положение равновесия устойчиво на основании теоремы Ляпунова об устойчивости. При выполнении неравенства (2.6) с противоположным знаком функция $H^{(0)}$ знакопеременна, характеристическое уравнение соответствующей линеаризованной системы уравнений возмущенного движения имеет положительный вещественный корень, и положение равновесия неустойчиво на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Отсюда, учитывая соотношения (2.4), получаем, что в случае единственного положения равновесия ($\rho = \rho_0$, $\theta = \pi$) системы (1.7) оно устойчиво по Ляпунову. Если же существует три положения равновесия, то равновесие, соответствующее среднему значению ρ ($\rho = \rho_2$, $\theta = 0$), неустойчиво, а равновесия, отвечающие меньшему и большему значению ρ ($\rho = \rho_i$, $\theta = 0$ и $\rho = \rho_3$, $\theta = \pi$), устойчивы по Ляпунову.

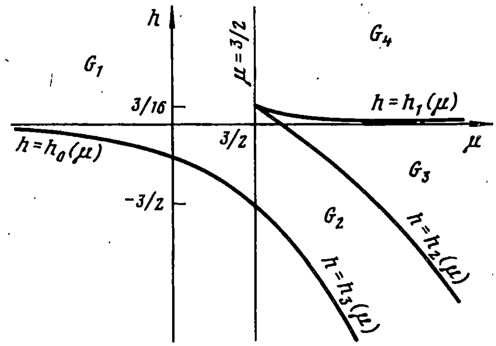
2.2. Фазовые портреты системы (1.7). Исследуем качественный характер поведения системы (1.7). Фазовые портреты системы для случаев $\mu < 3/2$, $\mu = 3/2$ и $\mu > 3/2$ изображены в плоскости переменных $u = \sqrt{2\rho}\cos\theta$, $v = \sqrt{2\rho}\sin\theta$ на фиг. 1, *а*; 1, *б* и 1, *в* соответственно.

Устойчивым положениям равновесия системы (1.7) соответствуют на фиг. 1 особые точки типа «центр», неустойчивому равновесию при $\mu > 3/2$ отвечает седловая точка. Неустойчивая сложная особая точка, соответствующая кратному корню уравнения (2.1) при $\mu = 3/2$, является вырожденным седло-узлом [11].

Положениям равновесия $\rho = \rho_i(\mu)$ (см. формулы (2.2), (2.3)), $\theta = \theta_i$ отвечают константы энергии

$$h_i(\mu) = -\mu\rho_i + \rho_i^2 + \sqrt{\rho_i}\cos\theta_i \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

Кривые $h = h_i(\mu)$ и прямая $\mu = 3/2$, разбивающие плоскость параметров (μ, h) на подобласти с различным характером движения системы (1.7), изображены на фиг. 2. Кривые $h = h_0(\mu)$ и $h = h_1(\mu)$ асимптотически приближаются к оси $O\mu$ соответственно при $\mu \to -\infty$ и $\mu \to +\infty$. При $\mu = 3/2$ кривая $h = h_0(\mu)$ непрерывно переходит в кривую $h = h_3(\mu)$, а при $\mu > 3/2$ имеет место соотношение $h_3(\mu) < h_2(\mu) < h_1(\mu)$.



Фиг. 2

При $h < h_0(\mu)$ и $h < h_3(\mu)$ движение невозможно.

При $\mu < 3/2$ точкам кривой $h = h_0(\mu)$ на фиг. 2 отвечает устойчивое положение равновесия $\rho = \rho_0$, $\theta = \pi$, точкам области G_1 ($h > h_0(\mu)$) – колебания около этого положения равновесия (на фиг. 1а это соответственно особая точка (u_0, 0) и охватывающие ее замкнутые кривые).

На прямой $\mu = 3/2$ (фиг. 2) значению $h = -3/2$ отвечает устойчивое положение равновесия $\rho_3 = 1$, $\theta = \pi$ (точка $(-\sqrt{2},\ 0)$ на фиг. 1, *б*), интервалу $-3/2 < h < 3/16$ – колебания вблизи этого равновесия (замкнутые кривые, охватывающие особую точку $(-\sqrt{2},\ 0)$ на фиг. 1, *б*); значению $h = 3/16$ отвечает неустойчивое положение равновесия $\rho_{1,2} = 1/4$, $\theta = 0$ и асимптотическое движение системы (1.7) (точка $(\sqrt{2}/2,\ 0)$ и сепаратриса на фиг. 1, *б*); при $h > 3/16$ имеем колебания системы, соответствующие на фиг. 1, *б* замкнутым кривым, охватывающим сепаратрису.

При $\mu > 3/2$ минимальный уровень энергии $h = h_3(\mu)$ отвечает положению равновесия $\rho = \rho_3$, $\theta = \pi$ (точка (u_3, 0) на фиг. 1, *в*). Области G_2 при $h_3(\mu) < h < h_2(\mu)$ (фиг. 2) отвечают колебания системы около этого положения равновесия (замкнутые кривые, охватывающие точку (u_3, 0) на фиг. 1, *в*). Точкам кривой $h = h_2(\mu)$ соответствуют неустойчивое положение равновесия $\rho = \rho_2$, $\theta = 0$ и два асимптотических движения (седловая точка (u_2, 0) и внутренняя и внешняя петли сепаратрисы на фиг. 1, *в*). В области G_3 при $h_2(\mu) < h < h_1(\mu)$ каждому значению параметров μ и h отвечают два различных колебания системы (1.7): колебание вблизи устойчивого положения равновесия $\rho = \rho_1$, $\theta = 0$ (замкнутая кривая, охватывающая точку (u_1,0)) и колебание, которому на фиг. 1, *в* соответствует замкнутая кривая, охватывающая сепаратрису. Уровню энергии $h = h_1(\mu)$ отвечает устойчивое положение равновесия $\rho = \rho_1$, $\theta = 0$ (точка (u_1, 0) на фиг. 1, *в*) и одно из колебаний – пунктирная кривая на фиг. 1, *в*. В области $G_4(h > h_1(\mu))$ каждому значению параметров μ и h соответствует одно колебание системы (1.7) (замкнутые кривые на фиг. 1, *в*, охватывающие пунктирную кривую).

2.3. Интегрирование системы (1.7). Используя интеграл энергии системы (1.7) $-\mu\rho + \rho^2 + \sqrt{\rho}\cos\theta = h$, исключим θ из второго уравнения системы:

$$d\rho / d\tau = \pm\sqrt{\varphi(\rho)}, \quad \varphi(\rho) = \rho - (\rho^2 - \mu\rho - h)^2 \tag{2.7}$$

откуда получим

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{\varphi(\rho)}} = \pm(\tau + \tau_0) \tag{2.8}$$

В (2.7) (2.8) верхний знак соответствует движению в верхней, а нижний знак – в нижней полуплоскостях фазовой плоскости, τ_0 – произвольная постоянная.

В областях G_1, G_2, G_4 фиг. 2 (где каждому значению μ и h отвечает одно колебание системы) многочлен $\varphi(\rho)$ имеет два положительных вещественных корня и пару комплексно сопряженных корней. Обозначим через a_1 и a_2 ($a_1 < a_2$) вещественные и через a_3 и a_4 – комплексные корни, тогда из (2.8), используя [12], получим

$$\rho = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2}\,\frac{(n' + n'')\operatorname{cn}(s,\ k_1) - (n' - n'')}{(n' - n'')\operatorname{cn}(s,\ k_1) - (n' + n'')} \tag{2.9}$$

$$s = \sqrt{m'm''}(\tau + \tau_0), \quad k_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m'^2 + m''^2}{2m'm''}\right)$$

$$n' = \sqrt{a_{31}a_{41}}, \quad n'' = \sqrt{a_{32}a_{42}}, \quad m' = \sqrt{a_{31}a_{42}}, \quad m'' = \sqrt{a_{41}a_{32}}, \quad a_{ij} = a_i - a_j$$

Движение (2.9) является периодическим колебанием с частотой

$$\omega_1 = \pi\sqrt{m'm''} / (2K(k_1))$$

где $K(k_1)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

В области G_3 (где каждому значению μ и h соответствуют два колебания системы) многочлен $\varphi(\rho)$ имеет четыре положительных вещественных корня $\rho = a_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$): $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Для колебания в окрестности положения равновесия $\rho = \rho_1$ имеем $a_1 < \rho < a_2$, и из (2.8) получим [13]:

$$\rho = \frac{a_1(a_4 - a_2) + a_4(a_2 - a_1)\operatorname{sn}^2(s,\ k_2)}{a_4 - a_2 + (a_2 - a_1)\operatorname{sn}^2(s,\ k_2)} \tag{2.10}$$

а для колебания, охватывающего асимптотические движения, имеем $a_3 < \rho < a_4$ и

$$\rho = \frac{a_3(a_4 - a_2) - a_2(a_4 - a_3)\operatorname{sn}^2(s,\ k_2)}{a_4 - a_2 - (a_4 - a_3)\operatorname{sn}^2(s,\ k_2)}) \tag{2.11}$$

В (2.10) и (2.11) $s = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_{42}a_{31}}(\tau + \tau_0)$, $k_2 = \sqrt{(a_{43}a_{21}) / (a_{42}a_{31})}$, а частота обоих колебаний одинакова и равна

$$\omega_2 = \pi\sqrt{a_{42}a_{31}} / (8K(k_2))$$

На кривой $h = h_1(\mu)$ (фиг. 2) корни $\rho = a_i$ многочлена $\varphi(\rho)$ вещественны и положительны, причем $a_1 = a_2 < a_3 < a_4$ и кратный корень равен равновесному значению $\rho = \rho_1$ системы (1.7). Интегрирование (2.8) осуществляется в элементарных функциях [13]; пунктирной кривой на фиг. 1, *в* отвечает колебание

$$\rho = \frac{(a_3 - \rho_1)a_4 \operatorname{tg}^2(s/2) + (a_4 - \rho_1)a_3}{(a_3 - \rho_1)\operatorname{tg}^2(s/2) + (a_4 - \rho_1)}, \quad s = \sqrt{(a_3 - \rho_1)\ (a_4 - \rho_1)}(\tau + \tau_0)$$

На кривой $h = h_2(\mu)$ для корней многочлена $\varphi(\rho)$ имеем $0 < a_1 < a_2 = a_3 < a_4$, причем кратный корень совпадает с неустойчивым равновесным значеним $\rho = \rho_2$ системы (1.7). Движениям по внутренней ($a_1 \le \rho \le \rho_2$) и внешней ($\rho_2 \le \rho \le a_4$) петлям сепаратрисы отвечает следующая неявная зависимость $\rho = \rho(\tau)$, полученная из (2.8) [13]:

$$\ln^2 \frac{\sqrt{(\rho_2 - a_1)\ (a_4 - \rho)} + \sqrt{(a_4 - \rho_2)\ (\rho - a_1)}}{\sqrt{|\rho - \rho_2|}} = \frac{1}{4}(\rho_2 - a_1)\ (a_4 - \rho_2)\ (\tau + \tau_0)^2$$

В случае $\mu = 3/2$ (фиг. 1, *б*) колебания системы описываются соотношениями (2.9); для асимптотического движения $(h = 3/16)$ корни многочлена $\varphi(\rho)$ таковы: $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$, $a_4 = 9/4$, и из (2.8) получим

$$\rho = \frac{9+(\tau+\tau_0)^2}{4[1+(\tau+\tau_0)^2]}$$

3. О периодических движениях полной системы. Рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости периодических движений полной системы уравнений (1.6) с гамильтонианом (1.4), рождающихся из положений равновесия укороченной (модельной) системы уравнений (1.7) с гамильтонианом (1.5).

Систему (1.6) в окрестности положения равновесия $\rho = \rho_*$, $\theta = \theta_*$ модельной системы можно рассматривать как квазилинейную систему с возмущениями порядка $\varepsilon^{2/3}$, имеющими по τ период $T \sim \varepsilon^{2/3}$. Корни характеристического уравнения системы с гамильтонианом $H_2^{(0)}$ при достаточно малых ε не могут быть равны $iN2\pi/T$, где N – целое число. Следовательно, имеет место нерезонансный случай теории Пуанкаре в задаче о периодических решениях квазилинейных систем. Поэтому [14] из каждого положения равновесия модельной системы (1.7) рождается единственное, T-периодическое по τ, аналитическое по $\varepsilon^{2/3}$ решение полной системы (1.6). В исходной близкой к интегрируемой гамильтоновой системе с одной степенью свободы ему соответствует решение, аналитическое по $\varepsilon^{1/3}$, периодическое по времени, с периодом, равным периоду внешнего возмущающего воздействия.

Неустойчивое положение равновесия системы (1.7) переходит в неустойчивое периодическое решение системы (1.6), что следует из непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линейных уравнений возмущенного движения.

Вопрос об устойчивости периодических движений, рождающихся из устойчивых равновесий системы (1.7), можно решить, проведя нормализацию гамильтониана (1.4) в окрестности этих периодических движений.

Нормализуем предварительно гамильтониан (2.5) модельной системы в окрестности положения устойчивого равновесия до членов четвертой степени включительно. Формы $H_3^{(0)}$ и $H_4^{(0)}$ членов третьей и четвертой степеней по x и y гамильтониана (2.5) имеют вид

$$H_3^{(0)} = \frac{\mu - 2\rho_*}{2}\left(-x^2 y + \frac{y^3}{4\rho_*^2}\right)$$

$$H_4^{(0)} = \frac{\rho_*(\mu - 2\rho_*)}{4}\left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^2 y^2}{2\rho_*^2} - \frac{5y^4}{16\rho_*^4}\right)$$

Сделаем сначала замену переменных

$$x = \left(\frac{6\rho_* - \mu}{4\rho_*^2(2\rho_* - \mu)}\right)^{1/4} x^*, \quad y = \left(\frac{4\rho_*^2(2\rho_* - \mu)}{6\rho_* - \mu}\right)^{1/4} y^*$$

приводящую форму $H_2^{(0)}$ к виду

$$H_2^* = 1/2\,\omega(x^{*2} + y^{*2}) \quad (\omega^2 = (6\rho_* - \mu)\ (2\rho_* - \mu))$$

а затем, путем преобразования типа преобразования Биркгофа, уничтожим в гамильтониане члены третьей степени и упростим члены четвертой степени.

Не приводя, в силу громоздкости, явный вид указанной замены переменных и опуская выкладки, запишем нормализованный гамильтониан $H^{(0)}$ в следующем виде (возвращаемся к исходным обозначениям x, y):

$$H^{(0)} = \tfrac{1}{2}\omega(x^2+y^2) + \tfrac{1}{4}c(x^2+y^2)^2 + \ldots \qquad (4.1)$$

$$c = \frac{24\rho_*^3 - 48\rho_*^2\mu + 22\rho_*\mu^2 - 3\mu^3}{4\rho_*(6\rho_* - \mu)^2} \quad \text{при} \quad \rho_* = \rho_1 \qquad (4.2)$$

или

$$c = \frac{\mu^2 - 6\rho_*^2}{(6\rho_* - \mu)^2} \quad \text{при} \quad \rho_* = \rho_0 \quad \text{и} \quad \rho_* = \rho_3 \qquad (4.3)$$

Анализ выражений (4.2), (4.3) при учете соотношений (2.4) показывает, что для равновесных решений $\rho_* = \rho_0$, $\rho_* = \rho_1$ и $\rho_* = \rho_3$ коэффициент $c \neq 0$ для всех значений μ, при которых существуют эти решения, кроме единственного значения $\mu = \mu^* = -\left[\tfrac{3}{4}(5\sqrt{6} - 12)\right]^{1/3}$ для решения $\rho_* = \rho_0$, при котором $c = 0$. Это частное значение μ исключим из рассмотрения.

Перейдем теперь к нормализации гамильтониана (1.4) полной системы. Очевидно, что при $k = 1, 2, 3, 4$ равенство $k\omega = N2\pi/T$ невозможно (т.е. отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно), если ε достаточно мало. Поэтому в результате нормализации в гамильтониане уничтожаются члены третьей степени, а члены второй и четвертой степеней будут иметь структуру, аналогичную (4.1):

$$H = \tfrac{1}{2}(\omega + O(\varepsilon^{2/3}))\ (x^2+y^2) + \tfrac{1}{4}(c + O(\varepsilon^{2/3}))\ (x^2+y^2)^2 + \ldots$$

При достаточно малых ε коэффициент при $(x^2 + y^2)^2$ отличен от нуля, поэтому, на основании теоремы Арнольда – Мозера [15], периодические решения полной системы (1.6), рождющиеся из устойчивых положений равновесия модельной системы (1.7), также устойчивы по Ляпунову.

Возвращаясь к задаче о движении математического маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса, заметим, что исследуемым выше периодическим движениям системы (1.6) соответствуют 2π-периодические по η, аналитические по $\varepsilon^{1/3}$ колебания маятника. Явный вид этих колебаний может быть получен путем проведения последовательности обратных замен переменных (см. п. 1). При $\mu < \tfrac{3}{2}$ имеем

$$q_0(\eta) = -2^{5/3}\varepsilon^{1/3}\sqrt{\rho_0}\sin\eta + O(\varepsilon^{2/3}) \qquad (4.4)$$

а при $\mu \geqslant \tfrac{3}{2}$ колебания задаются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} q_1(\eta) &= 2^{5/3}\varepsilon^{1/3}\sqrt{\rho_1}\sin\eta + O(\varepsilon^{2/3}) \\ q_2(\eta) &= 2^{5/3}\varepsilon^{1/3}\sqrt{\rho_2}\sin\eta + O(\varepsilon^{2/3}) \\ q_3(\eta) &= -2^{5/3}\varepsilon^{1/3}\sqrt{\rho_3}\sin\eta + O(\varepsilon^{2/3}) \end{aligned} \qquad (4.5)$$

В (4.4), (4.5) ρ_0 и ρ_1, ρ_2, ρ_3 – корни уравнения (2.1) соответственно при $\mu < \tfrac{3}{2}$ и $\mu \geqslant \tfrac{3}{2}$.

Выводы об устойчивости периодических движений системы (1.6) переносятся на 2π – периодические движения маятника (4.4), (4.5): движение $q = q_0(\eta)$ (при $\mu < 3/2$) устойчиво по Ляпунову, а из трех движений маятника при $\mu \geqslant 3/2$ движение $q = q_2(\eta)$ неустойчиво, а $q = q_1(\eta)$ и $q = q_3(\eta)$ – устойчивость по Ляпунову.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16257) и Международного научного фонда (MFG 000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jeffreys H.* The simple pendulum under periodic disturbance // Quart. J. Mech. and Appl. Math.1959. V.12. Pt. 1. P. 124–128.
2. *Struble R.A.* On the simple pendulum under periodic disturbance // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1962. V. 15. Pt. 2. P. 245–251.
3. *Poincaré H.* Sur les planètes du type d'Hecuble // Bull. astronom. 1902. T. 19. № 8. P. 289–310.
4. *Schubart J.* Special cases of the restricted problem of three bodies // The theory of orbits in the solar system and in stellar systems: IAU Symp. № 25 (Ed. G. Contopoulos). London and New York: Acad. Press, 1966. P. 187–193.
5. *Message P.* On-nearly-commensurable periods in the restricted problem of three bodies // The theory of orbits in the solar system and in stellar systems: IAU Symp. № 25 (Ed. G. Contopoulos). London and New York: Acad Press, 1966. P.197–222.
6. *Нейштадт А.И.* Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 621–632.
7. *Henrard J., Lemaitre A.* A Mechanism of Formation for the Kirkwood Gaps // Icarus. 1983. V. 55. № 3. P. 482–494.
8. *Henrard J., Lemaitre A.* A second fundamental model for resonance // Celest. Mech. 1983. V. 30. P. 197–218.
9. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
10. *Маркеев А.П., Чеховская Т.Н.* О резонансных периодических решениях гамильтоновых систем, рождающихся из положения равновесия // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 27–33.
11. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
12. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 236 с.
13. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
14. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
15. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.I.1995