**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1996**

УДК 531.53

© 1996 г. **В.Ф. ЖУРАВЛЕВ**

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНОГО МАЯТНИКА

Рассматривается конкретный пример применения современных методов нелинейной механики, который может иметь некоторый методический интерес.

Рассматривается механическая система, изображенная на фигуре, и состоящая из равноплечего, уравновешенного относительно точки подвеса коромысла и двух, прекрепленных на его концах маятников одинаковой длины и одинаковой массы.

Эта система представляет собой консервативную систему с тремя степенями свободы. В соответствии с теоремой Пуанкаре о несуществовании первого интеграла у этой системы в случае общего положения никаких первых интегралов кроме интеграла энергии нет.

Для аналитического исследования задачи будем пользоваться методом осреднения. Составим полные уравнения движения рассматриваемой системы. Ее лагранжиан имеет вид

$$L = \tfrac{1}{2}\{(J+2ml^2)\dot\alpha^2 + ml^2(\dot\varphi^2+\dot\psi^2) + 2ml^2\dot\alpha[\dot\varphi\sin(\alpha-\varphi) - \dot\psi\sin(\alpha-\psi)]\} +$$
$$+mgl(\cos\varphi+\cos\psi)$$

Здесь буквой J обозначен момент инерции коромысла относительно точки подвеса. Уравнения Лагранжа получаются такими

$$(J+2ml^2)\ddot\alpha + ml^2[\ddot\varphi\sin(\alpha-\varphi) - \ddot\psi\sin(\alpha-\psi) + ml^2[-\dot\varphi^2\cos(\alpha-\varphi) + \dot\psi^2\cos(\alpha-\psi)] = 0$$

$$ml^2[\ddot\varphi + \ddot\alpha\sin(\alpha-\varphi) + \dot\alpha^2\cos(\alpha-\varphi)] + mgl\sin\varphi = 0$$

$$ml^2[\ddot\psi - \ddot\alpha\sin(\alpha-\psi) - \dot\alpha^2\cos(\alpha-\psi)] + mgl\sin\psi = 0$$

Введем обозначение $ml^2(J+2ml^2)^{-1} = k$ и будем считать, что масштаб измерения времени таков, что $gl^{-1} = 1$. Тогда эти уравнения перепишутся в виде

$$\ddot\alpha = k[-\ddot\varphi\sin(\alpha-\varphi) + \ddot\psi\sin(\alpha-\psi) + \dot\varphi^2\cos(\alpha-\varphi) - \dot\psi^2\cos(\alpha-\psi)]$$

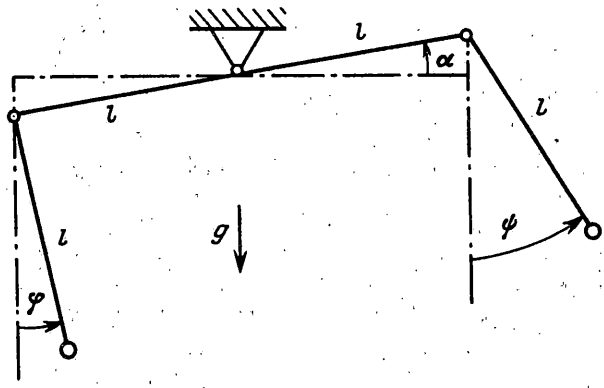
$$\ddot\varphi + \sin\varphi = -\ddot\alpha\sin(\alpha-\varphi) - \dot\alpha^2\cos(\alpha-\varphi)$$

$$\ddot\psi + \sin\psi = \ddot\alpha\sin(\alpha-\psi) + \dot\alpha^2\cos(\alpha-\psi)$$

Будем считать малым масштаб измерения переменных α, φ и ψ. Иными словами, в написанных уравнениях осуществим замену переменных $\alpha = \varepsilon\alpha'$, $\varphi = \sqrt{\varepsilon}\varphi'$, $\psi = \sqrt{\varepsilon}\psi'$, где ε – малый параметр.

После отбрасывания малых высшего порядка уравнения приобретают вид (штрихи над буквами опускаем):

$$\ddot\alpha = k(\ddot\varphi\varphi - \ddot\psi\psi + \dot\varphi^2 - \dot\psi^2)$$



$$\ddot{\varphi}+\varphi=\frac{\varepsilon}{6}\varphi^3+\varepsilon\ddot{\alpha}\varphi,\quad \ddot{\psi}+\psi=\frac{\varepsilon}{6}\psi^3-\varepsilon\ddot{\alpha}\psi$$

Или, в разрешенной относительно старших производных форме

$$\ddot{\alpha}=k(-\varphi^2+\psi^2+\dot{\varphi}^2-\dot{\psi}^2)+\varepsilon\ldots$$

$$\ddot{\varphi}+\varphi=\frac{\varepsilon}{6}\varphi^3+k\varepsilon(-\varphi^2+\psi^2+\dot{\varphi}^2-\dot{\psi}^2)\varphi+\ldots$$

$$\ddot{\psi}+\psi=\frac{\varepsilon}{6}\psi^3+k\varepsilon(\varphi^2-\psi^2-\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2)\psi+\ldots$$

Заметим, что уравнения для φ и ψ отделились и могут рассматриваться самостоятельно:

$$\ddot{\varphi}+\varphi=k\varepsilon(a\varphi^2+\psi^2+\dot{\varphi}^2-\dot{\psi}^2)\varphi$$

$$\ddot{\psi}+\psi=k\varepsilon(\varphi^2+a\psi^2-\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2)\psi \qquad (1)$$

$$a=(1/6-k)/k$$

Уравнения (1) будем решать методом осреднения в рамках лагранжева формализма. Т.е. осредняться будут не сами уравнения (1), а их функция Лагранжа. Для построения функции Лагранжа системы (1) будем исходить из функции Лагранжа полной системы, в которой выполним примененное выше преобразование масштабов и отбросим более высокие порядки чем ε^2:

$$L=\frac{1}{2}[J_0\varepsilon^2\dot{\alpha}^2+ml^2\varepsilon(\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2)-2ml^2\varepsilon^2\dot{\alpha}(\dot{\varphi}\varphi-\dot{\psi}\psi)]-\frac{\varepsilon mgl}{2}(\varphi^2+\psi^2)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2 mgl}{24}(\varphi^4+\psi^4)\quad (J_0=J+2ml^2)$$

Заметим, что α является циклической координатой. Поэтому функция Лагранжа системы (1) будет представлять собой функцию Рауса с проигнорированной координатой α.

Соответствующий обобщенный импульс имеет вид

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}=J_0\varepsilon^2\dot{\alpha}-ml^2\varepsilon(\dot{\varphi}\varphi-\dot{\psi}\psi)$$

а редуцированная функция Лагранжа может быть записана в форме

$$\tilde{L} = L - p\dot{\alpha} = \frac{ml^2\varepsilon}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) - \frac{(ml^2\varepsilon)^2}{2J_0}(\dot{\varphi}\varphi - \dot{\psi}\psi)^2 - \frac{\varepsilon mgl}{2}(\varphi^2 + \psi^2) +$$

$$+\frac{\varepsilon^2 mgl}{24}(\varphi^4 + \psi^4) - \frac{p^2}{2J_0\varepsilon^2} - \frac{ml^2 p}{J_0}(\dot{\varphi}\varphi - \dot{\psi}\psi)$$

Последние два члена представляют собой полную производную по времени и в силу калибровочной инвариантности могут быть отброшены. После деления на общий множитель и отбрасывания указанных членов искомую функцию запишем в виде

$$\tilde{L} = \tfrac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 - \varphi^2 - \psi^2) - \varepsilon L^* \tag{2}$$

где возмущенная часть лагранжиана имеет вид

$$L^* = \tfrac{1}{2}k(\dot{\varphi}\varphi - \dot{\psi}\psi)^2 - \tfrac{1}{24}(\varphi^4 + \psi^4)$$

Заметим, что уравнения Лагранжа, определяемые лагранжианом (2), имеют вид

$$\ddot{\varphi} + \varphi = (\tfrac{1}{6})\varepsilon\varphi^3 + \varepsilon k(\dot{\varphi}^2 - \dot{\psi}^2 + \varphi\ddot{\varphi} - \psi\ddot{\psi})\varphi$$

$$\ddot{\psi} + \psi = (\tfrac{1}{6})\varepsilon\psi^3 - \varepsilon k(\dot{\varphi}^2 - \dot{\psi}^2 + \varphi\ddot{\varphi} - \psi\ddot{\psi})\psi$$

Эти уравнения отличаются от (1) членами второго порядка малости по ε, так как $\ddot{\varphi} = -\varphi + O(\varepsilon)$ и $\ddot{\psi} = -\psi + O(\varepsilon)$

Выполним в системе (1) замену фазовых переменных $(\varphi, \dot{\varphi}, \psi, \dot{\psi}) \to (q_1, q_2, p_1, p_2)$ по формулам

$$\begin{aligned} &\varphi = q_1\cos t + p_1\sin t, \quad \dot{\varphi} = -q_1\sin t + p_1\cos t, \\ &\psi = q_2\cos t + p_2\sin t, \quad \dot{\psi} = -q_2\sin t + p_2\cos t. \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения движения в медленных переменных (q_1, q_2, p_1, p_2) в первом приближении метода осреднения будут иметь гамильтонову форму:

$$\dot{q}_1 = \varepsilon\frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{q}_2 = \varepsilon\frac{\partial H}{\partial p_2}$$

$$\dot{p}_1 = -\varepsilon\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \dot{p}_2 = -\varepsilon\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

где функция Гамильтона H получается осреднением возмущенной функции Лагранжа L^* по явно входящему времени вдоль траекторий (3):

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L^*(\varphi, \ \psi, \ \dot{\varphi}, \ \dot{\psi})dt$$

Вычисление приводит к следующему выражению

$$H = (\tfrac{1}{16})k[(p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 + q_2^2)^2 + 4(q_1p_1 - q_2p_2)^2] - \tfrac{1}{64}[(q_1^2 + p_1^2)^2 + (q_2^2 + p_2^2)^2]$$

Написанное выражение содержит существенно различные по своему физическому смыслу части:

$$H_1 = (\tfrac{1}{16})k[(p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 + q_2^2)^2 + 4(q_1p_1 - q_2p_2)^2] \tag{4}$$

$$H_2 = -(1/16)[(q_1^2 + p_1^2)^2 + (q_1^2 + p_2^2)^2] \tag{5}$$

Гамильтониан H_1 определяет связанную систему двух линейных маятников, в которой нелинейность определяется лишь связью этих двух маятников посредством коромысла.

Гамильтониан H_2 определяет собственную нелинейность маятников в случае неподвижного коромысла.

Рассмотрим вначале поведение системы без учета собственной нелинейности маятников, т.е. полагая, что она описывается гамильтонианом H_1.

Можно проверить, что функция

$$G = q_1 q_2 + p_1 p_2 \tag{6}$$

является первым интегралом системы с гамильтонианом H_1, поскольку скобка Пуассона $\{H_1, G\}$ равна нулю.

Также первым интегралом будет и функция

$$E = 1/2[(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2) \tag{7}$$

В силу автономности гамильтониана H_1 и он будет первым интегралом, однако эти три интеграла оказываются функционально связанными: $4H_1 + G = E^2$.

Пересечение поверхностей (6) и (7) в фазовом пространстве является компактным, хотя и неодносвязным, поэтому по теореме Лиувилля каждая компонента связности представляет собой инвариантный тор.

По теореме Лиувилля гамильтонова система четвертого порядка, имеющая два первых интеграла в инволюции, сводится к квадратурам. Для этого достаточно (4) и (6) разрешить относительно p_1, p_2 и приравнять их производным от производящей функции по q_1 и q_2 откуда и найти производящую функцию.

Для упрощения выкладок можно воспользоваться другим приемом. Первый интеграл (6) можно рассматривать как функцию Гамильтона системы, фазовый поток которой порождает группу симметрий системы с гамильтонианом H_1. Переход к каноническим координатам группы симметрий приводит к понижению порядка на две единицы. Для вычисления канонических координат можно воспользоваться теоремой Лиувилля, но уже не для пары (4)–(6), а для (6)–(7), что, очевидно, значительно проще. Из (6) и (7) находим

$$2p_1 p_2 = 2(G - q_1 q_2), \quad p_1^2 + p_2^2 = 2E - q_1^2 - q_2^2$$

Откуда следует, что

$$p_1 + p_2 = \sqrt{2(E+G) - (q_1 + q_2)^2}$$

$$p_1 - p_2 = \sqrt{2(E-G) - (q_1 - q_2)^2}$$

и вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1/2(\sqrt{2(E+G) - (q_1 + q_2)^2} + \sqrt{2(E-G) - (q_1 - q_2)^2}) \\ p_2 &= 1/2(\sqrt{2(E+G) - (q_1 + q_2)^2} - \sqrt{2(E-G) - (q_1 - q_2)^2}) \end{aligned} \tag{8}$$

Производящую функцию искомого канонического преобразования будем искать в виде $S(q_1, q_2, y_1, y_2)$, используя условие

$$p_1 = 2\partial S/\partial q_1, \quad p_2 = 2\partial S/\partial q_2, \tag{9}$$

т.е. валентность преобразования равна 1/2 (это делается с целью избежать в дальнейшем появления дробных коэффициентов).

Поскольку $\partial p_1/\partial q_2 = \partial p_2/\partial q_1$ (основной принципиальный момент в теореме Лиувилля), то из (8) и (9) имеем

$$S = \frac{1}{4}(q_1+q_2)\int_0^1 \sqrt{2(E+G)-(q_1+q_2)^2\tau^2}\,d\tau + \frac{1}{4}(q_1-q_2)\int_0^1 \sqrt{2(E-G)-(q_1-q_2)^2\tau^2}\,d\tau \quad (10)$$

В качестве новых импульсов y_1 и y_2 выберем $2y_1 = E$, $2y_2 = G$. Тогда новые обобщенные координаты x_1 и x_2 найдутся из условия $x_1 = \partial S/\partial y_1$, $x_2 = \partial S/\partial y_2$.

Дифференцируя (10), получаем

$$x_1 = \frac{1}{2}(q_1+q_2)\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{4(y_1+y_2)-(q_1+q_2)^2\tau^2}} + \frac{1}{2}(q_1-q_2)\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{4(y_1-y_2)-(q_1-q_2)^2\tau^2}}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(q_1+q_2)\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{4(y_1+y_2)-(q_1+q_2)^2\tau^2}} - \frac{1}{2}(q_1-q_2)\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{4(y_1-y_2)-(q_1-q_2)^2\tau^2}}$$

Или же после интегрирования

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[\arcsin\frac{q_1+q_2}{\sqrt{4(y_1+y_2)}} + \arcsin\frac{q_1-q_2}{\sqrt{4(y_1-y_2)}}\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[\arcsin\frac{q_1+q_2}{\sqrt{4(y_1+y_2)}} - \arcsin\frac{q_1-q_2}{\sqrt{4(y_1-y_2)}}\right]$$

Откуда находятся старые координаты q_1, q_2, через новые

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{y_1+y_2}\,\sin(x_1+x_2) + \sqrt{y_1-y_2}\,\sin(x_1-x_2) \\ q_2 &= \sqrt{y_1+y_2}\,\sin(x_1+x_2) - \sqrt{y_1-y_2}\,\sin(x_1-x_2) \end{aligned} \quad (11)$$

После подстановки (11) в (8) находим выражение для старых импульсов:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{y_1+y_2}\,\cos(x_1+x_2) + \sqrt{y_1-y_2}\,\cos(x_1-x_2) \\ p_2 &= \sqrt{y_1+y_2}\,\cos(x_1+x_2) - \sqrt{y_1-y_2}\,\cos(x_1-x_2) \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) определяют каноническую замену переменных $(q_1, q_2, p_1, p_2) \to (x_1, x_2, y_1, y_2)$ валентности 1/2, представляющую собой переход к каноническим координатам группы порождаемой гамильтонианом $G = q_1, q_2 + p_1, p_2$.

По теореме Ли в этих координатах система с гамильтонианом H_1 должна понизиться в порядке.

Подставляя в (4) преобразования (11) и (12) получим $H_1 = (y_1^2 - y_2^2)k$.

Поскольку валентность равна 1/2, то гамильтониан преобразованной системы есть

$$\tilde{H}_1 = \tfrac{1}{2} H_1 = (\tfrac{1}{2})k(y_1^2 - y_2^2) \quad (13)$$

а сами уравнения в новых переменных имеют вид

$$\dot{x}_1 = \varepsilon k y_1,\ \dot{x}_2 = -\varepsilon k y_2,\ \dot{y}_1 = 0,\ \dot{y}_2 = 0$$

Эта система легко интегрируется и совместно с заменой (11) и (12) позволяет выписать общее решение нелинейной гамильтоновой системы с гамильтонианом H_1 (см. (4)).

Приведем этот результат в окончательном виде. Система с гамильтонианом H_1 может быть записана в форме

$$\dot{q}_1 = (\tfrac{1}{4})\varepsilon k[(p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 + q_2^2)p_1 + 2(q_1p_1 - q_2p_2)q_1]$$

$$\dot{q}_2 = -(1/4)\varepsilon k[(p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 + q_2^2)p_2 + 2(q_1p_1 - q_2p_2)q_2]$$

$$\dot{p}_1 = (1/4)\varepsilon k[(p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 + q_2^2)q_1 - 2(q_1p_1 - q_2p_2)p_1] \qquad (14)$$

$$\dot{p}_1 = -(1/4)\varepsilon k[(p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 + q_2^2)q_2 - 2(q_1p_1 - q_2p_2)p_2]$$

Ее общее решение имеет вид

$$q_1 = C_1 \sin(\varepsilon k C_2^2 t + C_3) + C_2 \sin(\varepsilon k C_1^2 t + C_4)$$

$$q_2 = C_1 \sin(\varepsilon k C_2^2 t + C_3) - C_2 \sin(\varepsilon k C_1^2 t + C_4) \qquad (15)$$

$$p_1 = C_1 \cos(\varepsilon k C_2^2 t + C_3) + C_2 \cos(\varepsilon k C_1^2 t + C_4)$$

$$p_2 = C_1 \cos(\varepsilon k C_2^2 t + C_3) - C_2 \cos(\varepsilon k C_1^2 t + C_4)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные интегрирования.

Решение (15) содержит два нелинейных эффекта: эффект зависимости частоты от амплитуды и эффект перекачки колебаний от одного маятника к другому.

Рассмотрим решение системы (1) (в которой при $H = H_1$ следует взять $a = -1$) при следующих начальных условиях: $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = v$, $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$. Здесь v – начальное возмущение скорости левого маятника.

В соответствии с заменой (3) это определяет начальные условия для осредненной системы (14): $q_1(0) = 0$, $p_1(0) = v$, $q_2(0) = 0$, $p_2(0) = 0$, что позволяет определить в (15) постоянные $C_1 = C_2 = {}^1/_2 v$, $C_3 = C_4 = 0$.

Решение с этими начальными условиями таково

$$q_1 = v \sin(1/4)\varepsilon k v^2 t, \quad p_1 = v \cos(1/4)\varepsilon k v^2 t, \quad q_2 = 0, \quad p_2 = 0$$

Оно показывает, что в первом приближении метода осреднения система (1) имеет решение

$$\varphi = v \sin(1 + (1/4)\varepsilon k v^2 t), \quad \psi = 0$$

Правый маятник неподвижен, левый колеблется с постоянной амплитудой и с зависящей от нее частотой. Как видно, если маятник линеен при неподвижном коромысле (т.е. $a = -1$), то учет колебаний коромысла приводит к зависимости частоты колебаний от амплитуды и в этом случае.

Введем малое возмущение в рассматриваемое движение. Возьмем начальные условия в виде $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = v$, $\psi(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = \Delta$.

Это соответствует начальным условиям $q_1(0) = 0$, $p_1(0) = v$, $q_2(0) = 0$, $p_2(0) = \Delta$. Если для простоты считать $\Delta \sim \varepsilon$, то решение с этими начальными условиями получается таким

$$\varphi = v \cos\frac{\varepsilon k \Delta}{2} vt \ \sin\left(1 + \frac{\varepsilon k v^2}{4}\right)t$$

т.е. амплитуда колебаний медленно изменяется с периодом $T = 2\pi/\varepsilon k v \Delta$.

Рассмотрим теперь задачу в полном объеме, т.е. учитывая весь гамильтониан H по формуле $H = H_1 + H_2$. В этом случае группа порождаемая гамильтонианом $G = q_1q_2 + p_1p_2$ не является группой симметрий системы, поскольку $\{H_2, G\} \neq 0$.

Однако, у системы по-прежнему имеется два первых интеграла H и E, находящиеся в инволюции и по теореме Лиувилля она сводится к квадратурам.

Попробуем и в этом случае избежать громоздких выкладок, воспользовавшись той же заменой (11)–(12), но уже для полной системы. Подставляя (11) и (12) в (5), получаем

$$H_2 = -\tfrac{1}{8}\left[y_1^2 + (y_1^2 - y_2^2)\cos^2 2x_2\right]$$

Преобразованный гамильтониан полной системы с учетом валентности преобразования имеет вид

$$\tilde{H} = \tfrac{1}{2}(H_1 + H_2) = (\tfrac{1}{2})k(y_1^2 - y_2^2) - \tfrac{1}{16}[y_1^2 + (y_1^2 - y_2^2)\cos^2 2x_2]$$

Ему соответствуют следующие уравнения:

$$\dot{x}_1 = ky_1 - \tfrac{1}{8}(y_1 + y_1\cos^2 2x_2),\ \ \dot{x}_2 = -ky_2 + \tfrac{1}{8}y_2\cos^2 2x_2$$
$$\dot{y}_1 = 0,\ \ \dot{y}_2 = -\tfrac{1}{16}(y_1^2 - y_2^2)\sin 4x_2 \tag{16}$$

Уравнения для переменных x_2, y_2 отделились:

$$\dot{x}_2 = -\tfrac{1}{16}y_2(16k - 1 - \cos 4x_2),\ \ y_2 = -\tfrac{1}{16}(y_1^2 - y_2^2)\sin 4x_2 \tag{17}$$

Эти уравнения интегрируются разделением переменных:

$$\frac{dx_2}{dy_2} = \frac{y_2(16k - 1 - \cos 4x_2)}{(y_1^2 - y_2^2)\sin 4x_2},\ \ \int\frac{\sin 4x_2 dx_2}{16k - 1 - \cos 4x_2} = \int\frac{y_2 dy_2}{y_1^2 - y_2^2}$$

Откуда получаем, что

$$\ln(16k - 1 - \cos 4x_2)^{1/2} = -\ln(y_1^2 - y_2^2) + \ln C$$

Тогда будем иметь

$$y_1^2 - y_2^2 = C\Big/\sqrt{16k - 1 - \cos 4x_2}$$

Подставляя найденное отсюда y_2 в (17), находим $x_2(t)$ и $y_2(t)$, после чего подстановка их в (16) приводит к определению $x_1(t)$ и $y_1(t)$.

Москва

Поступила в редакцию
18.XI.1994