

УДК 939.3

© 1996 г. Л.Г. СМИРНОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА СО СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

Эллипсоидальную полость с малым отношением каких-либо двух осей эллипсоида, занимающего полость, можно использовать как модель трещины в пространственном случае [1]. В линейно геометрической постановке предполагается, что граница трещины в процессе деформирования неизменна, что оправдано для высокомодульных материалов при относительно невысоких нагрузках. Для низко модульных материалов закон Гука имеет место и для достаточно больших деформаций, что требует учета изменения формы границы в процессе деформирования с удовлетворением краевых условий на изменяющейся в процессе деформирования границе, т.е. в геометрически нелинейной постановке. Аналогичная задача для плоского случая рассматривалась в [2]. Здесь исследуется влияние геометрической нелинейности при растяжении пространства с эллипсоидальной полостью на характер напряженно-деформированного состояния при условии, что пластическое течение не имеет места.

Будем считать, что полость сфероидальна, растягивающее усилие q_z направлено вдоль оси симметрии полости z , а растягивающее усилие q_r вдоль радиуса сфероидальной полости. Докажем сначала, что эллиптическая форма меридионального сечения полости сохраняется при растяжении вдоль оси z и радиуса r эллиптическую форму. Будем рассматривать в дальнейшем полость, являющуюся сплюснутым сфероидом, моделирующим при малом отношении его осей b_0/a_0 сфероидальную пространственную трещину. Доказательство в случае вытянутого сфероида совершенно аналогично случаю сплюснутого сфероида.

Решение задачи о растяжении пространства со сфероидальной полостью в перемещениях записывается следующим образом [1]:

$$u_r = 2(1 - 2\nu)(\lambda + \kappa / (1 + s_0^2))r\omega_1(s) + \kappa r D_2 / (s(1 + s^2)^2 D_1) \quad (1)$$

$$w = 2(1 - 2\nu)(\lambda + \kappa / s_0^2)z\omega_3(s) + \kappa z D_2 / (s^3(1 + s^2)D_1) \quad (2)$$

$$\omega_1(s) = (\text{arctg} s - s / (1 + s^2)) / 2$$

$$\omega_3(s) = 1/s - \text{arctg} s \quad (3)$$

$$D_1 = r^2 / (1 + s^2)^2 + z^2 / s^4$$

$$D_2 = r^2 / ((1 + s_0^2)(1 + s^2)) + z^2 / (s_0^2 s^2)$$

Здесь u_r и w — перемещения вдоль радиуса r и оси z соответственно, ν — коэффициент Пуассона материала. Параметр s меняется в пределах от s_0 до $+\infty$; s_0 соответствует границе полости и определяется из уравнения $b_0/a_0 = s_0 / (1 + s_0^2)^{1/2}$, где a_0 и b_0 — длины полуосей сфероидальной полости вдоль осей r и z .

Постоянные λ , κ находятся из уравнений [1]:

$$\frac{1}{4} q_r / G = \lambda(1 - 2\nu)(\omega_1 + \omega_2) - \kappa[\omega_1 / (1 + s_0^2) + \nu\omega_3 / s_0^2 + (2\nu s_0^2 - 4s_0^2 - 1) / (2s_0^3(1 + s_0^2)^2)] \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} q_z / G = 2\lambda(1-2\nu)\omega_1 + 2\kappa[\omega_1((1-\nu)/s_0^2 - \nu/(1+s_0^2)) + 1/(2s_0(1+s_0^2)^2)] \quad (5)$$

где G – модуль сдвига.

Из формул (1)–(2) следует, что на границе полости, т.е. при $s = s_0$, имеют место равенства

$$u_r = Ar, w = Bz \quad (6)$$

$$A = 2(1-2\nu)(\lambda + \kappa/(1+s_0^2))\omega_1(s_0) + \kappa/(s_0(1+s_0^2)^2) \quad (7)$$

$$B = 2(1-2\nu)(\lambda + \kappa/s_0^2)\omega_3(s_0) + \kappa/(s_0^2(1+s_0^2))$$

Поскольку уравнение эллипса в параметрическом виде записывается, как $r = a_0 \cos t$, $z = b \sin t$, то уравнение границы меридионального сечения полости после деформирования с учетом (6), (7) имеет вид

$$r = a_0(1+A) \cos t, z = b_0(1+B) \sin t$$

Отсюда следует, что эллиптическая форма меридионального сечения полости сохраняется. В дальнейшем будем предполагать, что бесконечно малое изменение нагрузки на бесконечности вызывает бесконечно малое изменение деформаций и перемещений в окрестности эллипсоидальной полости, т.е. будем считать, что формулы линейной теории упругости для перемещений и напряжений имеют место лишь при замене q_i на dq_i . Произведем замену q_i на dq_i , а λ, κ на $d\lambda, d\kappa$ соответственно, из уравнений (4), (5) получим выражение для $d\lambda$, и $d\kappa$ в случае растяжения пространства со сфероидальной полостью вдоль оси z ($dq_r = 0$):

$$d\lambda = f_1(s)dp, d\kappa = f_2(s)dp \quad (8)$$

$$f_1(s) = f_0(s)/D, f_2(s) = 1/D$$

$$f_0(s) = f_3(s)/((1-2\nu)(\omega_2(s) + \omega_3(s)))$$

$$f_3(s) = \omega_1(s)/(1+s^2) + \nu\omega_3(s)/s^2 + (2\nu s^2 - 4s^2 - 1)/(2s^3(1+s^2)^2) \quad (9)$$

$$D = 2(1-2\nu)\omega_2(s)f_0(s) + C$$

$$C = 2[\omega_1(s)((1-\nu)/s^2 - \nu/(1+s^2)) + 1/(2s(1+s^2)^2)]$$

$$dp = dq_z/(4G)$$

Подставив теперь в правую часть выражения (1) $r = a_0 = a(s_0)$, $z = 0$, а в правую часть выражения (2) $r = 0$, $z = b_0 = b(s_0)$ с учетом (8), получим

$$da(s_0) = F_a(s_0)a(s_0)dp, db(s_0) = F_b(s_0)b(s_0)dp \quad (10)$$

$$F_a(s_0) = [2(1-2\nu)(f_1(s_0) + f_2(s_0)/(1+s_0^2))\omega_1(s_0) + f_2(s_0)/(s_0(1+s_0^2)^2)]$$

$$F_b(s_0) = [2(1-2\nu)(f_1(s_0) + f_2(s_0)/s_0^2)\omega_3(s_0) + f_2(s_0)/(s_0^3(1+s_0^2))] \quad (11)$$

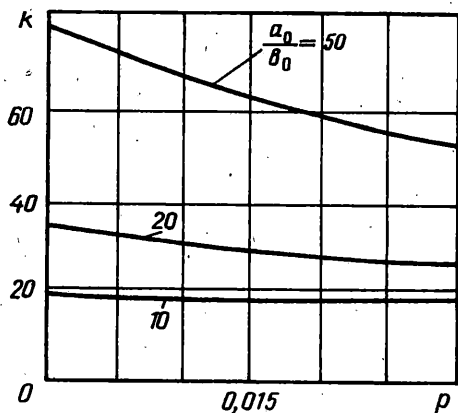
$$s_0 = ((a(s_0)/b(s_0))^2 - 1)^{-1/2} \quad (12)$$

Дифференцируя обе части равенства (12) по p , найдем

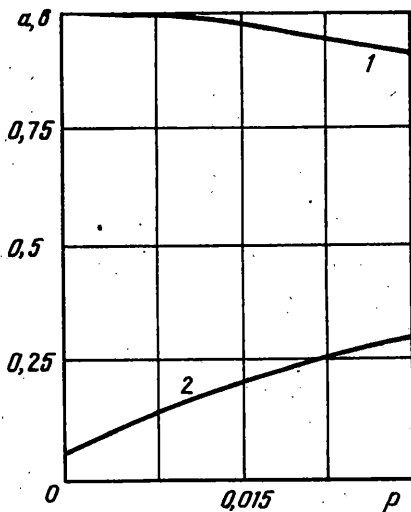
$$\frac{ds_0(p)}{dp} = -\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{1}{((a/b)^2 - 1)^{3/2}} \left(\frac{da}{dp} \frac{1}{a} - \frac{db}{dp} \frac{1}{b}\right) \quad (13)$$

Используя далее (10)–(12), окончательно получим

$$ds_0(p)/dp = s_0(1+s_0^2)(F_b(s_0) - F_a(s_0)) \quad (14)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

а значит

$$p(s_0^*) = \int_{s_0}^{s_0^*} \frac{ds}{s(1+s^2)(F_b(s) - F_a(s))} \quad (15)$$

Теперь из (10), (11) непосредственно следует

$$a^* = a(s_0^*) = a(s_0) \exp \left[\int_{s_0}^{s_0^*} \frac{F_a(s) ds}{s(1+s^2)(F_b(s) - F_a(s))} \right] \quad (16)$$

$$b^* = b(s_0^*) = b(s_0) \exp \left[\int_{s_0}^{s_0^*} \frac{F_b(s) ds}{s(1+s^2)(F_b(s) - F_a(s))} \right] \quad (17)$$

Цилиндрические координаты выражаются через сфероидальные μ, s (координаты сжатого эллипсоида) по формулам

$$r = c(1+s^2)^{1/2}(1-\mu^2)^{1/2}, \quad z = cs\mu \quad (18)$$

где c – софокусное расстояние. При $b(s_0) = 0$ (щель) для определения b_0^* удобно использовать вторую из формул (18), вместо того чтобы в (17) переходить к пределу при $s_0 \rightarrow 0$. Таким образом, из второй формулы (18) имеем при $\mu = 1$ ($r = 0$):

$$b^* = b(s_0^*) = cs_0^* = a^* s^* / (1+s_0^{*2})^{1/2} \quad (19)$$

Вычислим теперь концентрацию напряжений $k = \sigma_z/q_z$ при $z = 0$. Формула для σ_z в геометрической линейной постановке имеет вид [1]:

$$\sigma_z = 2G(v\theta/(1-2\nu) + \partial w/\partial z) \quad (20)$$

$$\theta = \partial u_r/\partial r + u_r/r + \partial w/\partial z$$

Для вычисления напряжений используются формулы дифференцирования

$$\begin{aligned} \partial s/\partial z &= \mu(1+s^2)/(c(s^2+\mu^2)), \quad \partial \mu/\partial z = s(1-\mu^2)/(c(s^2+\mu^2)) \\ \partial s/\partial r &= sr/(c^2(s^2+\mu^2)), \quad \partial \mu/\partial r = -\mu r/(c^2(s^2+\mu^2)) \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом формул (21) при $z = 0$ ($\mu = 0$), $r = a$ из (20) будем иметь

$$d\sigma_z = \sigma_z^{(1)} dp = \left[2\nu \left(d\lambda + \frac{d\kappa}{1+s^2} \right) \left(2\omega_1(s) - \frac{1}{s(1+s^2)} \right) + 2(1-\nu) \left(d\lambda + \frac{d\kappa}{s^2} \right) \omega_3(s) + \right. \\ \left. + d\kappa \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \frac{2s}{(1+s^2)^2} + \frac{1}{s^3(1+s^2)} \right) \right] 2G \quad (22)$$

Из формул (20) и (25) следует

$$d\lambda = f_1(s_0) dp = f_1(s_0) \varphi(s_0) ds, \quad d\kappa = f_2(s_0) dp = f_2(s_0) \varphi(s_0) ds \quad (23)$$

$$\varphi(s) = 1 / (s(1+s^2)(F_b(s) - F_a(s)))$$

Выражение для $\sigma_z(s_0^*)$ получим, интегрируя правую часть равенства (22)

$$\sigma_z(s_0^*) = \int_{s_0}^{s_0^*} \sigma_z^{(1)}(s) \varphi(s) ds$$

где s_0^* соответствует верхнему пределу в интеграле (15). В случае $b \ll a$ из (22) с использованием предыдущих формул можно получить асимптотическую формулу

$$\Delta\sigma_z \approx \frac{4\Delta q}{\pi s_0} = \frac{4\Delta q ((a_0/b_0)^2 - 1)^{1/2}}{\pi} = \frac{4\Delta q}{\pi} \left(\frac{a_0}{b_0} + O\left(\frac{b_0}{a_0}\right) \right) \quad (24)$$

а из формулы (14) следует

$$\Delta q_z = 4G\Delta\bar{p} \approx \frac{4\pi\Delta s G}{8(1-\nu)} = \frac{\pi G\Delta s}{2(1-\nu)} \quad (25)$$

Для $a(s_0^*)$ и $b(s_0^*)$ получим

$$a(s_0^*) = a(s_0) \exp\left(-\alpha \int_{s_0}^{s_0^*} \frac{ds}{(1+s^2)}\right), \quad b(s_0^*) = b(s_0) \exp\left(\int_{s_0}^{s_0^*} \frac{ds}{s(1+s^2)}\right)$$

$$\alpha = (\pi/8) ((1-2\nu)/(1-\nu))$$

Отсюда находим, используя формулу (12) при $b \ll a$:

$$a(s_0^*) \approx a(s_0) \exp(-\alpha\Delta s) = a(s_0) \exp\left(-\frac{1-2\nu}{4G} \Delta q_z\right)$$

$$b(s_0^*) \approx b(s_0) \exp\left(\frac{\Delta s}{s_0}\right) \approx b(s_0) \left(1 + \frac{\Delta s}{s_0}\right) \approx b(s_0) \left(1 + \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2 \frac{2(1-\nu)}{\pi G} \Delta q_z\right)$$

Теперь из (24) имеем

$$\Delta\sigma_z \approx \frac{4\Delta q_z}{\pi} \left(\frac{a_0}{b_0} + O\left(\frac{b_0}{a_0}\right) \right) \approx \frac{2G\Delta s}{1-\nu} \frac{a_0}{b_0} = \frac{2G}{1-\nu} \frac{a_0}{b_0} \frac{1}{((a_0/b_0)^2 - 1)^{1/2}} \quad (26)$$

Отсюда следует, что в случае круговой трещины ($b_0 = 0$), предельное значение напряжения σ_z равно, как и в плоском случае [2], $2G/(1-\nu)$ при $\Delta p \rightarrow 0$. Из формулы (26) следует также, что начиная с некоторого $b_0 = \bar{b}_0 \ll a_0$ дальнейшее уменьшение

малой оси b_0 практически не вызывает изменения $\Delta\sigma_z(\Delta p)$. Поэтому, на основании первой теории прочности разрушающее напряжение не должно быть чувствительным к изменению b_0 в диапазоне $0 < b < \bar{b}_0$, что согласуется с экспериментальными данными [3]. На фиг. 1 приведены зависимости концентрации напряжений $k = \sigma_z(s)/q_z(s)$ от растягивающего усилия $p = q_z/(4G)$ для различных отношений a_0/b_0 ($\nu = 0.25$), на фиг. 2 – зависимости изменения полуосей a (кривая 1) и b (кривая 2) от p .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И.: Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Даль Ю.Н. Влияние малой геометрической нелинейности на характер напряженно-деформированного состояния у вершины трещины // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 130–137.
3. Прикладные вопросы вязкости и разрушения / Под ред. Б.А. Дроздовского. М.: 1968. 552 с.

Подольск

Поступила в редакцию
9.VI.1994