МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1996

УДК 531.36; 531.31

© 1996 г. С.И. МОРИНА

ОБ ОБЛАСТЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДОСТИЖИМОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Построение областей достижимости [1, 2] управляемой материальной точки в гравитационном поле тяготения играет важную роль в исследовании задач теории полета искусственных спутников Земли. При этом условия на выбор допустимых управлений зачастую представляют собой инженерные или технические ограничения, реализуемые с некоторой ошибкой. Поэтому можно считать доспустимыми управления, нарушающие эти ограничения "на произвольно малую величину". Если "малые" возмущения системы ограничений приводят к малым изменениям области достижимости, то можно говорить об устойчивости. Однако, часто имеет место противоположный эффект: введение управлений, "незначительно" нарушающих исходные ограничения, приводит к скачкообразному изменению результата (см., например, [3, гл. III], [4, гл. I]. Конечно, здесь имеет смысл говорить не об одном конкретном возмущении "жестких" условий, а об асимптотике возмущенных условий и, соответственно, об асимптотике областей достижимости. Кроме того, представляет интерес исследование областей асимптотической достижимости управляемой системы при различных способах введения возмущений на комплекс условий. Постановки такого рода рассматриваются в работах [4–8].[1] В частности, там исследуется линейная управляемая система с ресурсными неравенствами и интегральными ограничениями в виде включения

$$\sum_{i=1}^{r} \int_{t_0}^{\vartheta_0} |f_i(t)|dt \le c, \quad \int_{t_0}^{\vartheta_0} S(t)f(t)dt \in Y$$

Здесь $c \in [0, \infty[$; Y – замкнутое множество в R^n, $n \in N$; $f = (f_1, \ldots, f_r) : [t_0, \vartheta_0[\to R^r$ – управляющая вектор-функция, компоненты которой есть кусочно-постоянные и непрерывные справа на $[t_0, \vartheta_0[$ функции со значениями в R, $r \in N$; $S(\ldots)$ – матричнозначная функция размерности $n \times r$, компоненты которой являются кусочнонепрерывными и непрерывными справа функциями, определенными на $[t_0, \vartheta_0[$. Далее вводятся два класса возмущенных задач.

В первом случае рассматривается управляемая система с ограничениями вышеупомянутого типа, но при этом параметр c заменяется на $c + \alpha$, а множество Y – на его α-окрестность Y_α, где α – произвольное положительное число. Во втором случае ресурсный параметр остается без изменения, лишь Y заменяется на Y_α. Пусть G, $G_\alpha^{(1)}$, $G_\alpha^{(2)}$ – области достижимости управляемой системы при заданных "жестких" ограничениях и α– ослабленных ограничениях первого и второго типов соответственно. Через $\mathrm{Att}^{(i)}$ обозначим область асимптотической достижимости (аттрактор), представляющую собой пересечение замыканий $G_\alpha^{(i)}$ при всех $\alpha \in]0, \infty[$ $(i = 1, 2)$. Относительно области достижимости G и аттракторов $\mathrm{Att}^{(1)}$, $\mathrm{Att}^{(2)}$ справедливы следующие утверждения (см., в частности, [4, гл. VI]): всегда имеет место равенство $\mathrm{Att}^{(1)} = \mathrm{Att}^{(2)}$, т.е. область достижимости асимптотически нечувствительна ("груба") относительно ресурсного параметра; если все компоненты отображения $S(\ldots)$ являются кусочно-постоянными и непрерывными справа функциями, то $G = \mathrm{Att}^{(1)} = \mathrm{Att}^{(2)}$ (имеет место устойчивость области достижимости).

Однако, в некоторых случаях задача может быть "грубой" и, в то же время, неустойчивой (в традиционном понимании этого слова) по отношению к ресурсному параметру. Соответствующий пример был приведен в [4], другой пример, связанный с задачей управления материальной точкой в ньютоновом поле, рассматривается ниже. Для этой задачи исследуются различные варианты ослабления заданных интегральных ограничений, при этом компоненты матриканта $S(\ldots)$ не являются кусочно-постоянными функциями. Приводится описание соответствующих областей асимптотической достижимости, определяются ограничения, относительно которых задача является асимптотически нечувствительной.

[1] См. также: *Морина С.И.* Построение асимптотически достижимых множеств в некоторых задачах управления. Екатеринбург, 1993. 29 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 2807-В93.

Следует отметить, что публикуемая работа посвящена модельному примеру и не претендует на практическое использование в космической навигации.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу об управлении материальной точкой в гравитационном поле тяготения. Предположим, что управляющее воздействие таково, что движение точки происходит по кривой, лежащей в плоскости и мало отличающейся от круговой орбиты с некоторым радиусом r_0 ($r_0 \in\ ]0, \infty[$). Тогда уравнения движения представимы в следующем виде (см., например, [9]):

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x} = -\varepsilon^2 x_1 + f_1, \quad \dot{x}_4 = -\varepsilon^2 x_2 + f_2 \tag{1.1}$$

где (x_1, x_2) – координаты радиус-вектора точки в плоскости орбиты, (x_3, x_4) – вектор скорости, $\varepsilon^2 = \mu/r_0^3$ (μ – гравитационный параметр), $f = (f_1, f_2)$ – управляющий вектор. Пусть движение управляемой системы (1.1) происходит на промежутке времени $[0, \pi/\varepsilon]$ с начальными условиями

$$x_1(0) = r_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = \varepsilon r_0 \tag{1.2}$$

Управляющая программа f выбирается из множества F всех кусочнопостоянных и непрерывных справа двумерных вектор-функций, определенных на $[0, \pi/\varepsilon[$. Траекторию системы (1.1) с начальными условиями (1.2), соответствующую управлению $f \in F$, обозначим через $x_f(\cdot) = (x_{1f}(\cdot), x_{2f}(\cdot), x_{3f}(\cdot), x_{4f}(\cdot))$.

Пусть задана следующая система ограничений:

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \|f(t)\| dt \le c, \quad c > 0 \tag{1.3}$$

$$x_{1f}(\pi/\varepsilon) = -r_0 - c/\varepsilon, \quad x_{2f}(\pi/\varepsilon) = 0 \tag{1.4}$$

Здесь символ $\|\cdot\|$ означает эвклидову норму в R^2. Иными словами, задача состоит в том, чтобы в фиксированный момент времени попасть в заданную точку в плоскости орбиты, соблюдая при этом ресурсное ограничение.

Покажем, что система ограничений (1.3), (1.4) несовместна. Используя формулу Коши, запишем соотношения (1.4) в интегральной форме:

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \sin(\varepsilon t) f_1(t) dt = -c, \quad \int_0^{\pi/\varepsilon} \sin(\varepsilon t) f_2(t) dt = 0$$

Покажем, что для любого $f \in F$, удовлетворяющего ресурсному ограничению (1.3), не может быть выполнено условие

$$\left| \int_0^{\pi/\varepsilon} \sin(\varepsilon t) f_1(t) dt \right| \ge c$$

а, следовательно, и условие (1.4). Предположим противное: $\exists \tilde{f} \in F$, для которой верны неравенства

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \|\tilde{f}(t)\| dt \le c, \quad \left| \int_0^{\pi/\varepsilon} \sin(\varepsilon t) \tilde{f}_1(t) dt \right| \ge c \tag{1.5}$$

Поскольку из последнего неравенства следует, что $\tilde{f}_1 \not\equiv 0$, то с учетом (1.5) имеем

$$c \ge \int_0^{\pi/\varepsilon} \|\tilde{f}(t)\| dt \ge \int_0^{\pi/\varepsilon} |\tilde{f}_1(t)| dt > \int_0^{\pi/\varepsilon} \sin(\varepsilon t) |\tilde{f}_1(t)| dt \ge \left| \int_0^{\pi/\varepsilon} \sin(\varepsilon t) \tilde{f}_1(t) dt \right| \ge c$$

Полученное противоречие показывает, что задача (1.1)–(1.4) неразрешима в классе управлений F и, поэтому, область достижимости в данном случае есть пустое множество $G = \emptyset$.

2. Релаксация области достижимости. Рассмотрим различные варианты возмущения системы ограничений (1.3), (1.4) и соответствующие области достижимости. Пусть

$$Y \triangleq \{(r^*,\ 0)\}, \quad r^* = -r_0 - c/\varepsilon$$

$$M_c \triangleq \left\{ f \in F\colon \int_0^{\pi/\varepsilon} \|f(t)\| dt \leq c \right\}$$

Для любого $\alpha > 0$ введем множества

$$Y_\alpha^{(1)} \triangleq \{(x_1,\ x_2) \in R^2 \colon |x_1 - r^*| \leq \alpha, \quad x_2 = 0\}$$

$$Y_\alpha^{(2)} \triangleq \{(x_1,\ x_2) \in R^2 \colon x_1 = r^*, \quad |x_2| \leq \alpha\}$$

$$Y_\alpha^{(3)} \triangleq \{(x_1,\ x_2) \in R^2 \colon |x_1 - r^*| \leq \alpha, \quad |x_2| \leq \alpha\}$$

Рассмотрим следующие множества допустимых управлений

$$U_\alpha^{(i)} \triangleq \{f \in F \colon f \in M_c,\ \{x_f(\pi/\varepsilon)\}_2 \in Y_\alpha^{(i)}\} \quad (i = \overline{1,\ 3})$$

$$U_\alpha^{(4)} \triangleq \{f \in F \colon f \in M_{c+\alpha},\ \{x_f(\pi/\varepsilon)\}_2 \in Y\}$$

$$U_\alpha^{(5)} \triangleq \{f \in F \colon f \in M_{c+\alpha},\ \{x_f(\pi/\varepsilon)\}_2 \in Y_\alpha^{(3)}\}$$

$$\{x_f(\pi/\varepsilon)\}_2 \triangleq (x_{1f}(\pi/\varepsilon),\ x_{2f}(\pi/\varepsilon))$$

Через $G_\alpha^{(i)}$ обозначим области достижимости системы (1.1) в пространстве "геометрических" координат, соответствующие множествам допустимых управлений $U_\alpha^{(i)}$:

$$G_\alpha^{(i)} \triangleq \{\{x_f(\pi/\varepsilon)\}_2 \colon f \in U_\alpha^{(i)}\} \quad (i = \overline{1,\ 5})$$

Согласно [4] введем множества асимптотически достижимых элементов

$$\mathrm{Att}^{(i)} \triangleq \bigcap_{\alpha > 0} \overline{G_\alpha^{(i)}} \quad (i = \overline{1,\ 5}) \tag{2.1}$$

где замыкание рассматривается в пространстве R^2 с топологией покоординатной сходимости. При этом некоторая точка $z^* \in R^2$ принадлежит $\mathrm{Att}^{(i)}$, если существует последовательность управляющих функций $(f^k)_{k=1}^{\infty}$ такая, что для любого $\alpha > 0$ функции f^k начиная с некоторого момента принадлежат множеству $U_\alpha^{(i)}$ и, кроме того, соответствующая последовательность терминальных значений $(\{x_{f^k}(\pi/\varepsilon)\}_2)_{k=1}^{\infty}$ сходится к z^*.

Заметим, что в силу специфики задачи в данном случае рассматриваются только приближенные решения-последовательности. Однако в более общих постановках для описания областей асимптотической достижимости необходимо привлекать понятие приближенного решения направленности [10].

Пусть G_c – область достижимости системы (1.1) в пространстве геометрических координат, соответствующая ограничению $f \in M_c$. Справедливо следующее предложение: для любого $c > 0$ верно соотношение

$$G_c = \{(x_1,\ x_2) \in R^2 \colon (x_1 + r_0)^2 + x_2^2 < (c/\varepsilon)^2\}$$

Доказательство. Пусть $R_c \triangleq \{(x_1,\ x_2) \in R^2 : (x_1 + r_0)^2 + x_2^2 < (c/\varepsilon)^2\}$. Покажем сначала, что верно включение $G_c \subset R_c$. Пусть $w \in G_c$, т.е. $\exists \tilde{f} \in F$:

$$x_{1\tilde{f}}(\pi/\varepsilon) = w_1, \quad x_{2\tilde{f}}(\pi/\varepsilon) = w_2, \quad \int_0^{\pi/\varepsilon} \|\tilde{f}(t)\| dt \le c$$

Если $\tilde{f} \equiv 0$, то $w = (-r_0, 0)$ и, следовательно, $w \in R_c$. Пусть теперь $\tilde{f} \not\equiv 0$. Тогда либо $\tilde{f}_1 \not\equiv 0$, либо $\tilde{f}_2 \not\equiv 0$. Оценим величину $(r_0 + w_1)^2 + w_2^2$. С учетом неравенства Минковского [11, стр. 176] имеем

$$(r_0 + w_1)^2 + w_2^2 = \left(\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\sin(\varepsilon t)\tilde{f}_1(t)dt\right)^2 + \left(\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\sin(\varepsilon t)\tilde{f}_2(t)dt\right)^2 <$$

$$< \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\left(\int_0^{\pi/\varepsilon} |\tilde{f}_1(t)|dt)^2\right) + \left(\int_0^{\pi/\varepsilon} |\tilde{f}_2(t)|dt)\right)^2\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\int_0^{\pi/\varepsilon} \|\tilde{f}(t)\|dt\right)^2 \le \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^2$$

Таким образом, $w \in R_c$ и, следовательно, $G_c \subset R_c$. Покажем справедливость обратного включения. Пусть $y = (y_1, y_2) \in R_c$, т.е. $(r_0 + y_1)^2 + y_2^2 = b^2$, где $b \in [0, c/\varepsilon[$. Если $b = 0$, то управление $f \equiv 0$ приводит траекторию в точку $(-r_0, 0)$. И в этом случае $y \in G_c$. Полагаем в дальнейшем, что $b > 0$. При $\delta > 0$ построим следующее управление $f_\delta = (f_{1\delta}, f_{2\delta})$:

$$f_{1\delta}(t) = \begin{cases} (y_1 + r_0)c^*/(b\delta), & t \in [\pi/(2\varepsilon),\ \pi/(2\varepsilon) + \delta[\\ 0, & t \notin [\pi/(2\varepsilon),\ \pi/(2\varepsilon) + \delta[\end{cases}$$

$$f_{2\delta}(t) = \begin{cases} y_2 c^*/(b\delta), & t \in [\pi/(2\varepsilon),\ \pi/(2\varepsilon) + \delta[\\ 0, & t \notin [\pi/(2\varepsilon),\ \pi/(2\varepsilon) + \delta[\end{cases} \tag{2.2}$$

Значения c^* и δ определим из условий $f_\delta \in M_c$ и $\{x_{f\delta}(\pi/\varepsilon)\}_2 = y$. Тогда будем иметь

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \|f_\delta(t)\| dt = \int_0^{\pi/\varepsilon} [(f_{1\delta}(t))^2 + (f_{2\delta}(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt = \int_{\pi/(2\varepsilon)}^{\pi/(2\varepsilon)+\delta} \frac{((y_1 + r_0)^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} c^*}{b\delta} dt = c^*$$

При $c^* \in [0, c]$ функция f_δ удовлетворяет ресурсному ограничению M_c. Далее, согласно формуле Коши найдем

$$x_{1f_\delta}(\pi/\varepsilon) = -r_0 + \frac{(y_1 + r_0)c^*}{b\varepsilon}\frac{\sin(\varepsilon\delta)}{\varepsilon\delta} \tag{2.3}$$

Пусть величина δ определяется из условия $x_{1f_\delta}(\pi/\varepsilon) = y_1$. С учетом (2.3) получим уравнение

$$\sin(\varepsilon\delta)/(\varepsilon\delta) = b\varepsilon/c^* \tag{2.4}$$

Нетрудно показать, что уравнение $\sin x = ax$ имеет корень на интервале $[0, \pi/2[$ при условии

$$2/\pi < a < 1 \tag{2.5}$$

Следовательно, уравнение (2.4) имеет решение $\delta^* \in]0, \pi/(2\varepsilon)[$ при условии

$$2/\pi < b\varepsilon/c^* < 1, \quad c^* \in]0,\ c] \tag{2.6}$$

Заметим, что равенство $x_{2f_\delta}(\pi/\varepsilon) = y_2$ автоматически выполняется, если δ является корнем уравнения (2.4). Этот факт непосредственно следует из соотношения

$$x_{2f_\delta}(\pi/\varepsilon) = \int\limits_{\pi/(2\varepsilon)}^{\pi/(2\varepsilon)+\delta} \frac{\sin(\varepsilon t)}{\varepsilon}\frac{y_2 c^*}{b\delta}dt = \frac{y_2 c^*}{b\varepsilon}\frac{\sin(\varepsilon\delta)}{\varepsilon\delta}$$

Таким образом, по заданному значению $b \in\ ]0, c/\varepsilon[$ выбираем c^* из условия (2.6). В частности, можно взять

$$c^* = \begin{cases} 3b\varepsilon/2, & 0 < b < c/(2\varepsilon) \\ (c+b\varepsilon)/2, & c/(2\varepsilon) \le b \le c/\varepsilon \end{cases}$$

Зафиксировав c^*, находим решение уравнения (2.4) $\delta = \delta^*$, которое в силу ограничений (2.6) лежит в интервале $]0, \pi/(2\varepsilon)[$. Затем, согласно формулам (2.2) построим управление f_δ при $\delta = \delta^*$, которое приведет траекторию $\{x_{f_\delta}(\cdot)\}_2$ в конечный момент времени $t = \pi/\varepsilon$ в заданную точку $y \in R_c$. Вложение $R_c \subset G_c$ и, следовательно, предложение в целом доказано.

Очевидно, $\forall i \in \overline{1,\ 3}$ справедливо равенство $G_\alpha^{(i)} = Y_\alpha^{(i)} \cap G_c$. Поэтому имеем

$$G_\alpha^{(1)} = \{x \in R^2 : x_1 \in]r^*,\ r^* + \alpha^*],\ x_2 = 0\}$$

$$G_\alpha^{(2)} = \emptyset$$

$$G_\alpha^{(3)} = \{x \in R^2 : x_1 \in]r*,\ r*+\alpha],\ |x_2| \le \alpha;\ (r_0 + x_1)^2 + x_2^2 < (c/\varepsilon)^2\}$$

$$\alpha* = \min\{\alpha,\ 2c/\varepsilon\}$$

Далее, $\forall\alpha > 0$ точка $(r^*, 0)$ лежит в области $G_{c+\alpha}$, поэтому $G_\alpha^{(4)} = Y \cap G_{c+\alpha} = Y$. Управление f_α^*, реализующее точку $(r^*, 0)$, имеет вид

$$f_{1\alpha}^*(t) = \begin{cases} -c^*/\delta^*, & t \in [\pi/(2\varepsilon),\ \pi/(2\varepsilon) + \delta^*[\\ 0, & t \notin [\pi/(2\varepsilon),\ \pi/(2\varepsilon) + \delta^*[\end{cases}$$

$$f_{2\alpha}^*(t) = 0, \quad t \in [0,\ \pi/\varepsilon[$$

где c^* и δ^* определяются из условий $f_\alpha^* \in M_{c+\alpha}$, $\{x_{f_\alpha^*}(\pi/\varepsilon)\}_2 \in Y$. В частности, можно взять

$$c^* = \begin{cases} c + \overline{\alpha}\varepsilon/2, & \varepsilon \in]0,\ 1] \\ c + \overline{\alpha}/2, & \varepsilon \in]1,\ \infty[\end{cases}$$

$$\overline{\alpha} = \min\{\alpha,\ c/\varepsilon\}$$

Тогда δ^* есть корень уравнения $\sin(\varepsilon\delta)/(\varepsilon\delta) = c/c^*$.

Относительно $G_\alpha^{(5)}$ заметим, что при $\varepsilon \le 1/\sqrt{2}$ справедливо включение $Y_\alpha^{(3)} \subset G_{c+\alpha}$ и в этом случае $G_\alpha^{(5)} = Y_\alpha^{(3)}$. Если же $\varepsilon > 1/\sqrt{2}$, то $G_\alpha^{(5)} = Y_\alpha^{(3)} \cap G_{c+\alpha}$.

Из полученных выражений для $G_\alpha^{(i)}$ и формулы (2.1) следует, что $\forall i \in \overline{1,\ 5}$ $(i \ne 2)$ справедливо равенство $\mathrm{Att}^{(i)} = Y$; для $i = 2$ имеем $\mathrm{Att}^{(2)} = \emptyset$.

Заметим, что равенство $\mathrm{Att}^{(5)} = \mathrm{Att}^{(3)}$ непосредственно следует из теоремы 6.4.2 [4] и означает, что в данной задаче имеет место "грубость" (или асимптотическая нечувствительность) относительно ресурсного ограничения. Из соотношений $\mathrm{Att}^{(1)} = Y$, $\mathrm{Att}^{(4)} = Y$ следует, что задача является неустойчивой по отношению к ресурсному ограничению и ограничению по первой координате. В то же время из равенства $\mathrm{Att}^{(4)} = \mathrm{Att}^{(5)}$ следует, что в данной задаче имеет место "грубость" относительно ограничений по первой координате, хотя функция, определяющая это ограничение, не является кусочно-постоянной. Рассмотренный пример подтверждает тот факт, что ступенчатость функций, входящих в интегральное ограничение, является лишь достаточным условием для асимптотической нечувствительности при возмущении части ограничений, определяемых этими функциями.

Работ выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94–01–00350, и Государственного Комитета Российской Федерации по высшему образованию, грант № 94–1.5–45 по исследованиям в области фундаментального естествознания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 296 с.
3. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
4. *Ченцов А.Г.* Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: Наука, 1993. 232 с.
5. *Белов Е.Г., Ченцов А.Г.* Релаксация ограничений в многокритериальных задачах // Изв. вузов. Математика. 1991. № 7. С. 3–8.
6. *Chentson A.G.* On the construction of solution to nonregular problems of optimal control // Probl. Control and Inform. Theory. 1991. V. 20. No. 2. P. 129–143.
7. *Ченцов А.Г.* Устойчивость некоторых нелинейных экстремальных задач с воздействиями импульсного характера // Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 30–41.
8. *Ченцов А.Г.* Релаксации допустимых множеств и конструкции расширений // Кибернетика и системный анализ. 1992. № 4. С. 78–87.
9. *Бердышев Ю.И., Савинова Л.А.* О некоторых задачах перемещения материальной точки в гравитационном поле тяжести // Релаксации нелинейных экстремальных задач. Свердловск: УрО АН СССР, 1991. С. 17–22.
10. *Келли Дж.* Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.
11. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
11.III.1994