

УДК 531.383

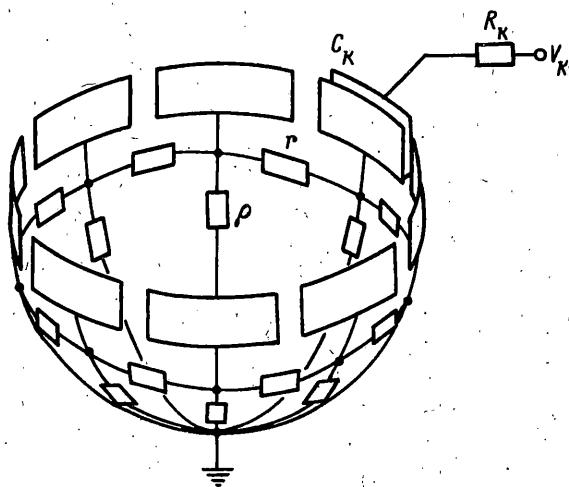
© 1996 г. А.А. КИРЕЕНКОВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА (ВТГ)**

Дополнена электрическая модель ВТГ [1], за счет учета перекрестного влияния друг на друга соседних электродов. Показано, что взаимодействие соседних управляющих электродов вызывает изменение собственной частоты колебаний и разрушение стоячих волн.

Исследовано влияние на динамику кольцевого резонатора отклонений от номинальных значений параметров электрической схемы прибора [1]. Показано, что несовпадение сопротивлений источников питания как в цепи системы съема информации, так и в цепи системы управления приводят к прецессии стоячих волн и к изменению их амплитуды. Кроме того, в случае наличия квадратурной составляющей возможно дополнительное расщепление частот. Показано, что неравенство зазора между управляющими электродами и недеформированным резонатором, а также несовпадение их геометрических характеристик вызывает изменение собственной частоты колебаний и разрушение стоячих волн.

1. Неидеальная электрическая модель ВТГ. Согласно дискретной электрической модели волнового твердотельного гироскопа [1], проводящая поверхность резонатора состоит из n отдельных обкладок, составляющих с n сосредоточенными электродами n конденсаторов. Эти n обкладок соединены между собой и омическое сопротивление связи равно r . Они также заземлены и омическое сопротивление заземления равно r (фиг.). Каждый электрод соединен с источником питания, имеющим сопротивление R , и подающим в цепь напряжение V_k ($k = 1, \dots, n$). Кроме того, в данной модели пре-небрегается взаимным влиянием конденсаторов друг на друга и считается, что в недеформированном состоянии резонатора их емкости равны. Однако при изготовлении реального прибора невозможно достичь абсолютного совпадения сопротивлений источников питания и, кроме того, оно может изменяться в процессе эксплуатации за счет различных внешних воздействий и естественного износа. Поэтому в рассматриваемой здесь модели считается, что сопротивления источников питания различны и равны R_k ($k = 1, \dots, n$). Также невозможно достичь абсолютного совпадения площадей электродов и равенства зазоров между ними и поверхностью резонатора. Последние два несоответствия сводятся к одному: неравенству емкостей конденсаторов в недеформированном состоянии резонатора $C_{0k} = C_0(1 + \Delta_k)$ ($k = 1, \dots, n$). Таким образом, в рассматриваемой в данной статье модели считается, что емкости конденсаторов C_{0k} , образованных электродами и соответствующими им участками поверхности недеформированного резонатора, отличаются друг от друга на малую величину $\Delta_k \ll 1$. Кроме того, при уточнении влияния на динамику резонатора электрической схемы, нельзя пренебречь взаимодействием электродов между собой. Одной из причин этого взаимодействия может быть искривление электрического поля у краев электродов [2], из-за которого заряд, находящийся на одном из электродов, будет индуцировать заряды на соседних. Следовательно, при рассмотрении электрических свойств прибора необходимо рассматривать взаимодействие не одного отдельно взятого электрода и соответствующего участка поверхности резонатора, а единой системы резонатор плюс n электродов. С точки зрения электростатики [2], данная конфигурация представляет собой систему, состоящую из $n + 1$



проводников, один из которых (резонатор) полностью окружен другими. Электростатические свойства такой системы удобно характеризовать матрицей емкостей, которая в нашем случае имеет вид

$$C = \begin{vmatrix} C_1 & c_1 & 0 & c_n \\ c_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_n & 0 & c_{n-1} & C_n \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

в которой C_k ($k = 1, \dots, n$) означает емкость плоского конденсатора, образованного отдельно взятым электродом и поверхностью резонатора, а c_k ($k = 1, \dots, n$) – емкость конденсатора, который образуют между собой соседние электроды. Очевидно, что для $\forall i, j = 1, \dots, n$ выполняется неравенство $c_i \ll C_j$. Остальные элементы матрицы (1.1) – тождественные нули, потому что учитывается взаимодействие только рядом расположенных электродов. Электрическая энергия, запасенная такой системой, определяется квадратичной формой зарядов, расположенных на электродах, матрица которой является обратной матрицей для матрицы емкостей [2]:

$$P(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}, C^{-1} \mathbf{Q}), \quad \mathbf{Q} \equiv \begin{vmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

где \mathbf{Q} обозначает вектор-столбец зарядов, находящихся на обкладках электродов.

2. Уравнения движения кольцевого резонатора. В качестве механо-математической модели, соответствующей представлению резонатора в виде сплошной среды, будем использовать принятую и используемую на практике модель – тонкое нерастяжимое кольцо, совершающее изгибные колебания в своей плоскости и врачающееся с угловой скоростью $\Omega(t)$. Для получения уравнений движения рассматриваемой электромеханической системы необходимо из известного выражения для плотности лагранжиана [3], определяющего механические колебания кольца:

$$L = \frac{1}{2} [(\dot{v} - \Omega w + \Omega R)^2 + (\dot{w} + \Omega v)^2 - \kappa^2 (w'' + v')^2] \quad (2.1)$$

в котором w и v имеют смысл радиальной и поперечной деформации кольца, вычесть

плотность электрической энергии (1.2), нормированную на массу кольца $\rho_0 S_0 R_0$ (ρ_0 – плотность материала, R_0 – радиус кольца, S_0 – площадь поперечного сечения). При этом будем считать, что емкость конденсатора, образованного k -м электродом и соответствующим ему участком поверхности резонатора, определяется по формуле [1]:

$$C_k = C_{0k}(1 + (\gamma_1/d_0)w(t, \phi_k)) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.2)$$

где γ_1 – численный коэффициент порядка единицы [1], а d_0 – зазор между электродами и поверхностью резонатора.

Изменим масштаб измерения деформаций $w^* = (\gamma_1/d_0)w$, $v^* = (\gamma_1/d_0)v$. Тогда, опуская для простоты записи звездочку у переменных w и v , получаем, что емкости (2.2) определяются по формулам

$$C_k = C_{0k}(1 + w(t, \phi_k)), \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.3)$$

а лагранжиан рассматриваемой электромеханической системы имеет вид

$$\bar{L} = L - \xi \Pi(w), \quad \xi \equiv \gamma_1^2 / (\rho_0 S_0 R_0 d_0^2) \quad (2.4)$$

где $\Pi(w)$ – плотность потенциальной энергии (1.2). Для получения явной зависимости Π от w представим матрицу емкостей (1.1) в виде

$$C = A + \Lambda \equiv (E + \Lambda A^{-1})A \quad (2.5)$$

где E – единичная матрица, а матрицы A и Λ определяются на основании формулы (2.3) так

$$A \equiv \begin{vmatrix} C_{01} & c_1 & 0 & c_n \\ c_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_n & 0 & c_{n-1} & C_{0n} \end{vmatrix}, \quad \Lambda \equiv \begin{vmatrix} C_{01}w(t, \phi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{01}w(t, \phi_n) \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

При вычислении матрицы C^{-1} , обратной к матрице емкостей (1.1), будем считать ее представленной в виде (2.5). Так как $\|\Lambda\| \ll 1$ то, с учетом симметричности матриц A и Λ , в линейном приближении матрица, обратная к матрице (2.3) может быть вычислена следующим образом [4]:

$$C^{-1} \approx A^{-1}(E - \Lambda A^{-1}) = A^{-1} - A^{-1}\Lambda A^{-1} \quad (2.7)$$

Используя очевидное равенство

$$w(t, \phi_k) = \int_0^{2\pi} w(t, \phi) \delta(\phi - \phi_k) d\phi$$

удобно представить матрицу Λ , введенную по формулам (2.6), в эквивалентном виде.

$$\Lambda = \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} C_{01}w(t, \phi)\delta(\phi - \phi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{0n}w(t, \phi)\delta(\phi - \phi_n) \end{vmatrix} d\phi \quad (2.8)$$

Таким образом, электрическая часть плотности потенциальной энергии, на основании формул (1.2), (2.7)–(2.8), с точностью до постоянных членов (не зависящих от w , v и их производных) имеет вид

$$\Pi(w) = -\frac{1}{2} w(t, \phi) Q^T A^{-1} \begin{vmatrix} C_{01}\delta(\phi - \phi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{0n}\delta(\phi - \phi_n) \end{vmatrix} A^{-1} Q \quad (2.9)$$

Подставляя равенства (2.1) и (2.8) в лагранжиан (2.4) и применяя принцип Гамильтона, получаем уравнение движения кольцевого резонатора, с учетом взаимодействия его с окружающими электродами, имеющее, с учетом условия нерастяжимости [3] $v' = w$, вид

$$\ddot{w} - \ddot{w}'' - 4\Omega\dot{w}' - \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \\ + (\xi/2)(Q, A^{-1} \operatorname{diag}\{C_{01}\delta''(\phi - \phi_1), \dots, C_{01}\delta''(\phi - \phi_n)\}A^{-1}Q) = 0 \quad (2.10)$$

В полученном уравнении дельта функцию следует рассматривать над пространством бесконечно дифференцированных, 2π -периодических функций. Тогда в первом сопряженном к данному пространству дельта функцию можно представить в виде ряда Фурье [5]:

$$\delta(\phi - \phi_k) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \cos l(\phi - \phi_k)$$

и, следовательно, под производной от дельта функции в уравнении (2.10) понимать производную соответствующего ряда

$$\delta''(\phi - \phi_k) = -\frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \cos l(\phi - \phi_k) \quad (2.11)$$

Кроме того, уравнение изгибных колебаний кольцевого резонатора (2.10) является незамкнутым, так как в него входит n неизвестных функций $Q_1(t), \dots, Q_n(t)$ – электрические заряды, находящиеся на обкладках электродов. Для его замыкания необходимо добавить уравнения электрических цепей представленных на фигуре. Применяя закон Ома и правила Кирхгофа, получаем

$$\tilde{R}\dot{Q} + C^{-1}\dot{Q} + rM\dot{Q} = V, \quad \tilde{R} \equiv \begin{vmatrix} R_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & R_n \end{vmatrix}, \quad V \equiv \begin{vmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

где \tilde{R} – матрица сопротивлений источников питания, V – вектор-столбец напряжений источников питания, а M – постоянная матрица, обладающая следующими свойствами [1]: $m_{kl} = m_{lk}$; $m_{kl} \equiv m_{k+l,l+1}$; $\|m_{kl}\| = \sum_{k=1}^{n-1} m_{k+1,1}(I_k + I_k^T) + m_{11}E$, где I_k – косой ряд порядка k .

Известно, что общее решение основного уравнения динамики кольцевого резонатора имеет вид [1, 6]:

$$w(t, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} (q_1^l(t) \cos l\phi + q_2^l(t) \sin l\phi) \quad (2.13)$$

Подставляя ряд (2.13) в уравнение (2.10) и учитывая формулу (2.11) находим, что коэффициенты ряда (2.13) определяются из решения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{vmatrix} \ddot{q}_1^l \\ \ddot{q}_2^l \end{vmatrix} - \frac{4i\Omega}{l^2 + 1} J \begin{vmatrix} \dot{q}_1^l \\ \dot{q}_2^l \end{vmatrix} - \frac{l^6 - 2l^4 + l^2}{l^2 + 1} \kappa^2 \begin{vmatrix} q_1^l \\ q_2^l \end{vmatrix} - \frac{\xi l^2}{2\pi(l^2 + 1)} \begin{vmatrix} Q^T A^{-1} X A^{-1} Q \\ Q^T A^{-1} Y A^{-1} Q \end{vmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

в которой через J обозначена симплектическая единица, а через X и Y диагональные матрицы, определяемые по формулам

$$X = \begin{vmatrix} C_{01} \cos l\varphi_1 & 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 & C_{0n} \cos l\varphi_n \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} C_{01} \sin l\varphi_1 & 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 & C_{0n} \sin l\varphi_n \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

Если имеются колебания только по основной форме ($l = 2$), то после введения безразмерного времени $\tau \equiv (6/\sqrt{5})\omega t$, замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая влияние электрической схемы на динамику основной формы изгибных колебаний кольцевого резонатора, в случае неподвижного основания, имеет вид

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} - \frac{2\xi}{5\pi\lambda^2} \left\| \mathbf{Q}^T A^{-1} X A^{-1} \mathbf{Q} \right\| = 0, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\lambda \varepsilon \hat{R} \dot{\mathbf{Q}} + C^{-1} \mathbf{Q} + \lambda r M \mathbf{Q} = \mathbf{V} \quad (2.17)$$

в которой $\lambda \equiv \frac{6}{\sqrt{5}}$ имеет смысл собственной частоты колебаний резонатора по основной форме, $\varepsilon = \|\hat{R}\|$ – норма матрицы сопротивлений, а \hat{R} – матрица, получаемая делением каждого элемента матрицы сопротивлений \hat{R} на ее норму ε . Очевидно, что $\|\hat{R}\| \approx 1$.

Исследование уравнений (2.16)–(2.17) зависит от того, какая система электродов рассматривается. В дальнейшем будут рассматриваться две из них: система электродов съема информации и система электродов управления. При изучении динамики основной формы будет применяться, использованный в [1], способ, в соответствии с которым, сначала необходимо из системы (2.17) найти связь между \mathbf{Q}_k ($k = \overline{1, n}$) и q_1, q_2 , а потом подставить получившиеся выражения в уравнения (2.16).

2.1. Система электродов управления. Система управления состоит из $n = 16$ электродов, характеризуется малым сопротивлением источников питания $R \rightarrow 0$ и независимостью их напряжений V_k от времени [1]. Кроме того омическое сопротивление связи тоже можно считать малым $r \rightarrow 0$ [1]. В этом случае уравнения (2.17) образуют сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений, так как малые параметры $\lambda\varepsilon, \lambda r$ стоят перед старшей производной. Поэтому, как и в [1], при проведении асимптотического анализа будем использовать метод интегральных многообразий.

Для получения нулевого приближения положим $\varepsilon = 0$ и $r = 0$ [1]. Следовательно, в нулевом приближении заряды на электродах определяются по формуле $\mathbf{Q}_0 = CV$.

Для нахождения первого приближения в системе (2.17), под производной от заряда следует понимать производную от нулевого приближения [1]. Подставляя \mathbf{Q}_0 в систему (2.17) вместо \mathbf{Q} и разрешая полученную систему алгебраических уравнений относительно \mathbf{Q} , находим

$$\mathbf{Q} = (C - \lambda C(\hat{R} + rM)\dot{C})\mathbf{V} \quad (2.18)$$

Для получения в (2.18) производной от матрицы емкостей будем использовать ее представление в виде (2.5). Следовательно

$$\dot{C} = \dot{q}_1 X + \dot{q}_2 Y \quad (2.19)$$

Подставляя выражение (2.19) в равенства (2.18) находим, что в линейном приближении асимптотика для зарядов в системе электродов управления имеет вид

$$\mathbf{Q} = (A + q_1 X + q_2 Y - \lambda A(\hat{R} + rM)(\dot{q}_1 X + \dot{q}_2 Y))\mathbf{V} \quad (2.20)$$

Транспонируя матрицу-столбец (2.20), с учетом того, что матрицы A, X, Y, \tilde{R}, M симметрические, получаем

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{V}^T (A + q_1 X + q_2 Y - \lambda(\dot{q}_1 X + \dot{q}_2 Y)(\tilde{R} + rM)A) \quad (2.21)$$

Подстановка асимптотик (2.20)–(2.21) в систему (2.16) дает

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} - \mathbf{F} - H\mathbf{q} + G_1\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.22)$$

где H – симметрическая матрица консервативных сил, G_1 – симметрическая матрица диссипативных сил, а \mathbf{F} – вектор-столбец постоянной силы, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} H &= \frac{2\xi}{5\pi\lambda^2} \mathbf{V}^T \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 \end{vmatrix} \mathbf{V} \\ h_1 &= 2XA^{-1}X, \quad h_2 = YA^{-1}X + XA^{-1}Y, \quad h_3 = 2YA^{-1}Y \\ G_1 &= \frac{2\xi}{5\pi\lambda} \mathbf{V}^T \begin{vmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{1,2} & g_{1,3} \end{vmatrix} \mathbf{V} \\ g_{1,1} &= 2X(R+rM)X, \quad g_{1,2} = (Y(R+rM)X + X(R+rM)Y), \quad g_{1,3} = 2Y(R+rM)Y \\ \mathbf{F} &= \frac{2\xi}{5\pi\lambda^2} \begin{vmatrix} \mathbf{V}^T X \mathbf{V} \\ \mathbf{V}^T Y \mathbf{V} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.2. Система электродов съема информации. Система съема информации состоит из $n = 8$ электродов и характеризуется большим сопротивлением R_k источников питания, а также независимостью напряжений источников V_k от времени и номера k [1].

Так как в системе электродов съема информации сопротивления источников $R_k \rightarrow \infty$, $k = \overline{1, n}$, то норма матрицы сопротивлений $\epsilon \rightarrow \infty$. Следовательно, система уравнений (2.17), описывающая колебания заряда в электрических цепях системы съема информации, является обычной возмущенной системой с малым параметром $1/(\lambda\epsilon)$. Кроме того, при изучении (2.17) в линейном приближении, следует отбросить члены вида $(r/\epsilon)MQ$, так как омическое сопротивление связи $r \rightarrow 0$ [1] и, следовательно, они имеют более высокий порядок малости.

Для асимптотического исследования (2.17), как и в [1], будем применять метод малого параметра Пуанкаре, в соответствии с которым решение ищется в виде ряда по степеням малого параметра $1/(\lambda\epsilon)$:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + (1/\lambda\epsilon)\mathbf{Q}_1 + (1/(\lambda^2\epsilon^2))\mathbf{Q}_2 + \dots \quad (2.24)$$

Подставляя ряд (2.24) в систему (2.17) и приравнивая члены при одинаковых степенях малого параметра, считая при этом, что матрица, обратная к матрице емкости (1.1) определяется по формулам (2.5), находим

$$\dot{\mathbf{Q}}_0 = 0, \quad \hat{R}\dot{\mathbf{Q}}_1 = \mathbf{V} - A^{-1} + A^{-1}(q_1 X + q_2 Y)A^{-1}\mathbf{Q}_0 \quad (2.25)$$

где матрицы A, X, Y определяются по формулам (2.6), (2.15).

Интегрирование равенств (2.25) дает

$$\mathbf{Q}_0 = \text{Const}$$

$$\hat{R}\mathbf{Q}_1 = (\mathbf{V} - A^{-1}\mathbf{Q}_0)\tau + A^{-1}(X \int q_1 d\tau + Y \int q_2 d\tau)A^{-1}\mathbf{Q}_0 \quad (2.26)$$

В силу требования отсутствия в выражениях (2.26) "секулярных" членов находим,

что $\mathbf{Q}_0 \equiv A\mathbf{V}$. Подставляя полученное тождество в систему (2.16) получаем, что в нулевом приближении справедливы равенства $\mathbf{q} = -\dot{\mathbf{q}}$, с помощью которых можно вычислить интеграл во втором выражении (2.26). Произведя интегрирование, с учетом тождества $(1/\epsilon)\tilde{R}^{-1} \equiv \tilde{R}^{-1}$ получаем, что в линейном приближении асимптотика для заряда в системе (2.17) имеет вид

$$\mathbf{Q} = (A - (1/\lambda)\tilde{R}^{-1}A^{-1}(\dot{q}_1X + \dot{q}_2Y))\mathbf{V} \quad (2.27)$$

Транспонируя матрицу-столбец (2.27), с учетом симметричности матриц A, X, Y, \tilde{R} , находим

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{V}^T(A - (1/\lambda)(\dot{q}_1X + \dot{q}_2Y)\tilde{R}^{-1}A^{-1}) \quad (2.28)$$

Подставляя выражения (2.27)–(2.28) в систему (2.16) получаем

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} - \mathbf{F} + G_2\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.29)$$

где \mathbf{F} – вектор-столбец постоянной силы, введенный по формуле (2.23), а G_2 – симметрическая матрица диссипативных сил, имеющая вид

$$G_2 = \frac{4\xi}{5\pi\lambda^3}\mathbf{V}^T \begin{vmatrix} g_{2,1} & g_{2,2} \\ g_{2,2} & g_{2,3} \end{vmatrix} \mathbf{V}, \quad g_{2,1} = 2XA^{-1}\tilde{R}^{-1}A^{-1}X \quad (2.30)$$

$$g_{2,2} = YA^{-1}\tilde{R}^{-1}A^{-1}X + XA^{-1}\tilde{R}^{-1}A^{-1}Y, \quad g_{2,3} = 2YA^{-1}\tilde{R}^{-1}A^{-1}Y$$

Итак, влияние электрической схемы ВТГ на динамику основной формы колебаний полностью определяется в случае системы управления уравнениями (2.22), а в случае системы съема информации уравнениями (2.29). Из (2.29) сразу следует, что исследуемая схема системы электродов съема информации не оказывает никакого влияния на консервативную часть полученной системы дифференциальных уравнений и, следовательно, не может вызывать ни изменения собственной частоты колебаний, ни разрушения стоящих волн. Таким образом, обнаружен новый качественный эффект в линейной теории ВТГ, остающийся справедливым при любых отклонениях, исследуемых в данной работе, параметров электрической схемы от номинальных значений. Кроме того, уравнения (2.22), (2.29) показывают, что взаимодействие между собой соседних электродов оказывает влияние в случае управляющих электродов только на консервативную часть соответствующей системы дифференциальных уравнений, а в случае электродов съема информации только на диссипативную часть.

Для исследования возможных эволюций основной формы будем использовать результаты работы [6], в соответствии с которыми, влияние линейных сил на динамику квазилинейных резонансных систем, имеющих двухкратную собственную частоту (резонанс 1:1), определяется структурой соответствующей матрицы.

Матрицы (2.23) и (2.30) описывают влияние на динамику основной формы всех возможных воздействий электрической схемы. Чтобы выделить вклад, вносимый каждой из ее составляющих, введем матрицы

$$A \equiv \begin{vmatrix} 0 & c_1 & 0 & c_n \\ c_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_n & 0 & c_{n-1} & 0 \end{vmatrix}, \quad A_2 \equiv \begin{vmatrix} \Delta_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \Delta_n \end{vmatrix}$$

$$X_0 \equiv \begin{vmatrix} \cos 2\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \cos 2\varphi_n \end{vmatrix}, \quad X_1 \equiv \begin{vmatrix} \Delta_1 \cos 2\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \Delta_n \cos 2\varphi_n \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

$$Y_0 \equiv \begin{vmatrix} \sin 2\varphi_1 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \sin 2\varphi_n \end{vmatrix}, \quad Y_1 \equiv \begin{vmatrix} \Delta_1 \sin 2\varphi_1 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \Delta_n \sin 2\varphi_n \end{vmatrix}$$

$$\|(1/C_0)A_1\| \ll 1, \quad \|A_2\| \ll 1, \quad \|X_1\| \ll 1, \quad \|Y_1\| \ll 1$$

с учетом которых можно представить матрицы A, X, Y , введенные по формулам (2.6), (2.15) в виде

$$A = C_0(E + (1/C_0)A_1 + A_2), \quad X = C_0(X_0 + X_1), \quad Y = C_0(Y_0 + Y_1). \quad (2.32)$$

Введенные по формулам (2.31), матрицы X_0 и Y_0 описывают эффекты, связанные с особенностью расположения электродов, матрица A_1 возникает из-за взаимодействия между собой соседних электродов, а матрицы X_1, Y_1 и A_2 определяют воздействие, связанное с возможным несовпадением ёмкостей конденсаторов, которые образуют электроды с соответствующими им участками недеформированного кольцевого резонатора.

Так как нормы матриц $(1/C_0)A_1, A_2, X_1, Y_1$ являются величинами первого порядка малости, то в линейном приближении матрица, обратная к матрице A , вычисляется по формуле

$$A^{-1} = (1/C_0)(E - (1/C_0)A_1 - A_2) \quad (2.33)$$

и при подстановке выражений (2.32)–(2.33) в формулы (2.23), (2.30) будем оставлять только линейные по этим матрицам члены. Кроме того, для выяснения влияния на динамику стоячих волн несовпадения сопротивлений источников питания будем предполагать, что сопротивление k -го источника питания отличается от номинального значения R на небольшую величину δ_k ($k=1, n$). Причем для сохранения правильного качественного характера полученных уравнений движения необходимо считать, что в случае системы управления $\delta_k \approx 1$, а в случае системы съема информации $\delta_k \ll 1$. Следовательно, матрица сопротивлений имеет вид

$$\tilde{R} = R(E + \tilde{R}_1), \quad \tilde{R}_1 \equiv \begin{vmatrix} \delta_1 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \delta_n \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

Подстановка (2.32)–(2.34) в (2.23) и (2.30), с учетом того, что для системы управления $\|\tilde{R}\| \ll 1$, а для системы съема информации $\|\tilde{R}_1\| \ll 1$ дает элементы матриц линейных сил

$$\begin{aligned} h_{1,1} &= 2(C_0(X_0^2 - X_0 A_2 X_0 + 2X_0 X_1) - 2X_0 A_1 X_0) \\ h_{1,2} &= 2C_0(X_0 Y_0 - A_2 X_0 Y_0 + Y_0 X_1 + X_0 Y_1) - 2X_0 A_1 Y_0 - 2Y_0 A_1 X_0 \\ h_{1,3} &= 2C_0(Y_0^2 - Y_0 A_2 Y_0 + 2Y_0 Y_1) - 2Y_0 A_1 Y_0 \\ g_{1,1} &= 2RC_0^2(E + \tilde{R}_1)X_0^2 \quad g_{1,3} = 2RC_0^2(E + \tilde{R}_1)Y_0^2 \\ g_{1,2} &= 2RC_0^2 X_0(E + \tilde{R}_1 + (r/R)M)Y_0 \\ g_{2,1} &= (2/R)X_0(X_0 - X_0 \tilde{R}_1 - X_0 A_2 - 2X_1) - (4/(RC_0))X_0 A_1 X_0 \\ g_{2,3} &= (2/R)Y_0(Y_0 - Y_0 \tilde{R}_1 - Y_0 A_2 - 2Y_1) - (4/(RC_0))Y_0 A_1 Y_0 \\ g_{2,2} &= (2/R)(X_0 Y_0 - A_2 X_0 Y_0 + Y_0 X_1 + X_0 Y_1 - X_0 Y_0 \tilde{R}_1) - (4/(RC_0))(X_0 A_1 Y_0 + Y_0 A_1 X_0) \end{aligned} \quad (2.35)$$

В силу линейности задачи, исследование влияния различных факторов на динамику основной формы можно провести отдельно, рассматривая матрицы, составленные из различных слагаемых в формулах (2.35). При вычислениях по этим формулам необходимо учитывать, что угол ϕ_k , задающий угловое положение k -го электрода определяется по формуле [1]

$$\phi_k = (2\pi / n)(k-1) \quad (k = 1, \dots, n)$$

3. Влияние несовпадения сопротивлений источников питания. Из равенств (2.35) видно, что сопротивления источников питания и, следовательно, отклонения их величин от заданного значения влияют только на диссипативную часть соответствующих систем дифференциальных уравнений и определяются членами, содержащими матрицу \tilde{R}_l . Для выяснения характера этого влияния необходимо вычислить матрицы G_1 и G_2 , учитывая в формулах (2.35) только те слагаемые, которые явно зависят от матрицы \tilde{R}_l .

Подставляя выражения (2.35) в (2.23), (2.30), считая, что X_0, Y_0, X_l, Y_l и \tilde{R}_l определяются по формулам (2.31), (2.34), в которых для системы съема информации следует положить $n = 8$, а для системы управления — $n = 16$, получаем

$$G_1 = -\frac{2\xi V^2}{5\pi\lambda^3 R} \sum_{k=1}^8 \delta_k \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos 4\phi_k & \sin 4\phi_k \\ \sin 4\phi_k & -\cos 4\phi_k \end{vmatrix} \right) \quad (3.1)$$

$$G_2 = \frac{2\xi V^2 R}{5\pi\lambda} \sum_{k=1}^{16} \delta_k V_k^2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos 4\phi_k & \sin 4\phi_k \\ \sin 4\phi_k & -\cos 4\phi_k \end{vmatrix} \right)$$

Таким образом, несовпадения сопротивлений источников и в системе съема информации, и в системе управления, приводят к появлению симметрической матрицы диссипативных сил, содержащей и сферическую часть, и девиатор. Из [6] следует, что диссипативные силы сферического типа (сферическая часть матриц (3.1)) приводят к изменению амплитуды, а диссипативные силы гиперболического типа (девиатор матриц (3.1)) вызывают прецессию стоячей волны и изменение ее амплитуды на конусе стоячих волн $K = 0$ [6]. Если $K \neq 0$, то возникает дополнительное изменение K и изменение амплитуды.

Следовательно, формулы (3.1) показывают, что в системе съема информации отклонение сопротивления k -го источника от номинального значения R на малую величину $\delta_k R$ приводит к изменению коэффициента диссипации на $2V^2\xi\delta_k(5\pi\lambda^3 R)^{-1}$ и к "ходу", величина которого пропорциональна $2V^2\xi\delta_k(5\pi\lambda^3 R)^{-1}$. В случае чистой стоячей волны ($K = 0$), "ходы", возникающие из-за несовпадения сопротивлений источников питания в системе съема информации определяются, на основании таблицы инфинитезимальных эволюций [6], по формуле

$$\dot{\Theta} = -\frac{\xi V^2}{10\pi\lambda^3 R} \sum_{k=1}^8 \delta_k \sin 4(\Theta - \phi_k)$$

В случае электродов управления возможные эволюции стоячих волн зависят от закона распределения, приложенного к ним напряжения. Как и в [1], рассмотрим два важных с точки зрения практики случая:

Случай 1. Все напряжения источников питания V_k ($k = 1, \dots, 16$) одинаковы и равны V . В этом случае матрица G_2 из (3.1) имеет вид

$$G_2 = \frac{2\xi C_0^2 V^2 R}{5\pi\lambda} \sum_{k=1}^{16} \delta_k \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{16} \delta_k \begin{vmatrix} \cos 4\phi_k & \sin 4\phi_k \\ \sin 4\phi_k & -\cos 4\phi_k \end{vmatrix} \right) \quad (3.2)$$

Таким образом, в системе электродов управления отклонение сопротивления k -го источника питания от номинального значения на малую величину $R\delta_k$ приводит к увеличению коэффициента диссипации на $2C_0^2V^2R\xi\delta_k(5\pi\lambda)^{-1}$ и к уходу, пропорциональному $2C_0^2V^2R\xi\delta_k(5\pi\lambda)^{-1}$. Пользуясь таблицей инфинитезимальных эволюций [6], находим, что возникающие в этом случае, из-за несовпадения сопротивлений источников питания, уходы определяются для чистой стоячей волны ($K = 0$) по формуле

$$\dot{\Theta} = \frac{\xi C_0^2 V^2 R}{10\pi\lambda} \sum_{k=1}^{16} \delta_k \sin 4(\Theta - \varphi_k)$$

Случай 2. Электрическая балансировка резонатора определяется зависимостью $V_k = V \cos 2(\varphi_k - \alpha)$ ($k = 1, \dots, 16$). Подстановка этого равенства в систему (2.23) показала, что качественно данный случай не отличается от случая 1, за исключением небольших количественных поправок норм сферической части и девиатора матрицы (3.2).

4. Влияние неоднородности зазора между электродами и резонатором и несовпадения геометрических характеристик электродов. Как отмечено в п. 1, указанные несовпадения эквивалентны одному – несовпадению емкостей конденсаторов, образованных электродами и соответствующим им участком недеформированного резонатора. Формулы (2.35) показывают, что это несовпадение емкостей оказывает влияние только на консервативную часть системы дифференциальных уравнений, описывающей взаимосвязь электрических и механических колебаний в цепи управляющих электродов, и определяется членами, содержащими матрицы X_1 и Y_1 . Вычисляя элементы матрицы H , явно зависящие от X_1 и Y_1 , которые определяются по формулам (2.31) при $n = 16$, для случая равенства напряжений источников питания получаем

$$H = -\frac{2\xi C_0 V^2}{5\pi\lambda^2} \sum_{k=1}^{16} \Delta_k \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos 4\varphi_k & \sin 4\varphi_k \\ \sin 4\varphi_k & -\cos 4\varphi_k \end{vmatrix} \right) \quad (4.1)$$

Таким образом, несовпадение зазора между управляющими электродами и кольцом, а также неравенство их геометрических характеристик приводят к появлению симметрической матрицы позиционных сил, содержащей и сферическую часть, и девиатор. В [6] было показано, что потенциальные сферические силы (сферическая часть матрицы (4.1)) приводят только к изменению частоты колебаний, а гиперболические потенциальные силы (девиатор матрицы (4.1)) приводят к разрушению стоячей волны и к изменению частоты колебаний, если $K = 0$. Вне конуса стоячих волн эти силы приводят также и к прецессии волнового поля, и к изменению амплитуды. Следовательно, равенство (4.1) показывает, что отклонение в емкости конденсатора, образованного k -м электродом и недеформированным резонатором, на величину Δ_k , вызывает уменьшение собственной частоты колебаний на величину $2V^2C_0\xi\Delta_k(5\pi\lambda^2)^{-1}$ и расщепление частот с коэффициентом пропорциональности $2V^2C_0\xi\Delta_k(5\pi\lambda^2)^{-1}$.

Кроме того, и в случае системы управления ($n = 16$), и в случае системы съема информации ($n = 8$) возникает вектор постоянной силы

$$\mathbf{F} = -\frac{2\xi C_0 V^2}{5\pi\lambda^2} \sum_{k=1}^n \Delta_k \begin{vmatrix} \cos 2\varphi_k \\ \sin 2\varphi_k \end{vmatrix}$$

5. Влияние взаимодействия соседних электродов. Взаимодействие между собой соседних электродов определяется матрицей A_1 , поэтому при вычислении матриц H и

G_2 , описывающих влияние на систему управления и систему съема информации позиционных и диссипативных сил, возникающих из-за взаимодействия соседних электродов, учитываются только те члены в выражениях (2.35), которые явно содержат эту матрицу. Подстановка соответствующих членов из (2.35) в (2.23) и (2.25), показывает, что матрицы H и G_2 содержат отличные в общем случае от нуля и сферическую часть, и девиатор. Следовательно, на основании [6], взаимодействие рядом расположенных электродов может приводить в случае системы управления к изменению частоты колебаний и к разрушению стоячей волны, а в случае системы съема информации к дополнительной диссипации колебаний и прецессии стоячей волны.

Сделаем дополнительное предположение о том, что емкости конденсаторов c_i ($i = 1, \dots, n$), образованных соседними электродами, одинаковы и равны c . В этом случае матрица A_1 может быть записана в виде $A_1 = c(S+S^T)$, где S – основная циркулянтная матрица перестановок или просто основной циркулянт [4].

В этом случае матрица H , определяющая влияние взаимодействия соседних управляющих электродов на динамику стоячих волн, имеет вид

$$H = -\frac{c\xi}{5\pi\lambda^2} \sum_{k=1}^{16} V_k V_{k+1} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} E + 2 \begin{vmatrix} \cos 2(\varphi_k + \varphi_{k+1}) & \sin 2(\varphi_k + \varphi_{k+1}) \\ \sin 2(\varphi_k + \varphi_{k+1}) & -\cos 2(\varphi_k + \varphi_{k+1}) \end{vmatrix} \right]$$

$$V_{17} \equiv V_1, \quad \varphi_{17} \equiv \varphi_1 \quad (5.1)$$

Как и выше, рассмотрим наиболее интересные, с точки зрения практики, частные случаи.

Случай 1. Все напряжения источников питания V_k ($k = 1, \dots, 16$) одинаковы и равны $H = -8\sqrt{2}(5\pi\lambda^2)^{-1}c\xi V^2 E$. Следовательно, расщепление частот не будет происходить, а возможно только уменьшение собственной частоты колебаний на величину первого порядка малости $8\sqrt{2}(5\pi\lambda^2)^{-1}c\xi V^2$.

Случай 2. Электрическая балансировка резонатора определяется зависимостью: $V_k = V \cos 2(\varphi_k - \alpha)$ ($k = 1, \dots, 16$). Подстановка этого равенства в матрицу (5.1) дает

$$H = -\frac{4\sqrt{2}c\xi V^2}{5\pi\lambda^2} - \frac{8c\xi V^2}{5\pi\lambda^2} \begin{vmatrix} \cos 4\alpha & \sin 4\alpha \\ \sin 4\alpha & -\cos 4\alpha \end{vmatrix}$$

В этом случае будет присутствовать как эффект уменьшения частоты на $8cV^2$, так и расщепление частот с коэффициентом пропорциональности $4cV^2$.

В системе съема информации, в предположении равенства емкостей конденсаторов, образованных соседними электродами, взаимодействие этих электродов вообще не оказывает никакого влияния, потому что матрица G_2 , определяющая диссипативную часть системы (2.29), в этом случае обращается в ноль.

В результате исследований, описанных в данной статье, обобщена электрическая модель волнового твердотельного гироскопа за счет учета взаимодействия соседних электродов. (Построение и исследование электрической модели ВТГ в [1] проводилось в предположении отсутствия этого взаимодействия.) Кроме того в рассматриваемом обобщении электрической модели ВТГ, названном неидеальной электрической моделью, считается, что зазор между электродами и кольцом и их геометрические размеры, а также сопротивления источников питания имеют отклонения от номинальных значений (в идеальной ситуации перечисленные параметры должны между собой совпадать). Поэтому пришлось заново выводить уравнения движения рассматриваемой электромеханической системы, используя отличные от [1] способы. При получении уравнений движения, для связи характеристик реального прибора с рассматриваемой математической моделью, использовалось представление кольцевого резонатора в виде сплошной среды [3]. Уравнения движения такой электромеханической системы (2.15), (2.16) описывают динамику произвольной формы изгибных колебаний тонкого нерастяжимого кольца. Подробное изучение проведено для основной (2-й) формы.

При исследовании уравнений движения (2.22) и (2.29) применялись асимптотические методы, использованные для подобных целей в [1], но способы их использования значительно отличаются, так как асимптотики приходится строить в виде матричных, а не скалярных как [1], рядов.

Установлено, что в линейной неидеальной модели ВТГ воздействие электрической схемы прибора на динамику стоячих волн в кольцевом резонаторе в случае системы съема информации оказывается только на диссипативную часть соответствующей системы дифференциальных уравнений (2.29).

Показано, что и в случае системы управления, и в случае системы съема информации отклонение сопротивлений источников питания от номинальных значений (в идеальной ситуации они должны между собой совпадать) вызывает уменьшение амплитуды колебаний и прецессию волновой картины, интерпретируемую как уход гироскопа (именно уход является основным показателем точности ВТГ). В случае наличия квадратурной составляющей возникает дополнительное изменение амплитуды и разрушение стоячих волн.

Выяснено, что неравенство зазоров между управляющими электродами и кольцом, а также несовпадение их геометрических размеров приводят к изменению собственной частоты колебаний и разрушению стоячих волн. Если уже имеется квадратурная составляющая, то появляется прецессия стоячих волн (уход) и изменение их амплитуды.

Наиболее трудоемкой оказалась задача об исследовании влияния перекрестных емкостей на динамику основной формы. Показано, что влияние взаимодействия соседних электродов на динамику стоячих волн определяется матрицей A_1 , их взаимных емкостей (2.31).

Установлено, что взаимодействие соседних электродов приводит к появлению в случае системы управления потенциальных сил, а в случае системы съема информации – диссипативных сил. Матрицы этих сил в обоих случаях симметрические, содержащие отличные от нуля сферическую часть и девиатор. Воздействие этих сил на эволюции стоячих волн однозначно определяется по таблице инфинитезимальных эволюций из работы [6]. Подробное исследование удалось провести в предположении равенства емкостей, образованных между собой соседними электродами. В этом случае взаимодействие электродов съема информации вообще не оказывает никакого влияния, так как соответствующая матрица обращается в нуль. Влияние взаимодействия управляющих электродов зависит от закона распределения поданного на них напряжения. Например, при электрической балансировке резонатора взаимодействие управляющих электродов вызывает уменьшение частоты колебаний и разрушение стоячих волн, а при равенстве напряжений источников – только уменьшение частоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф., Линч Д.Д. Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. АН. МТТ. 1995. № 5. С. 12–24.
2. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во Иностр. лит., 1954. 604 с.
3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
4. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
5. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.
6. Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. АН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.

Москва

Поступила в редакцию
27.III.1995