МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1996

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. С.А. АГАФОНОВ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ УПРУГОВЯЗКОГО СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Дестабилизация равновесия неконсервативных систем малыми диссипативными силами была обнаружена на примере рассмотрения двойного маятника с упруговязкими шарнирами, на который действует следящая сила [1]. Дестабилизация также обнаруживается и при рассмотрении континуальных моделей. Например, в [2] рассматривался консольно закрепленный стержень, изготовленный из вязкоупругого материала, и на который действует следящая сила. Область устойчивости упругого стержня оказалась шире, чем для стержня с малой вязкостью. Таким образом, в пространстве параметров этих задач существует область, в которой равновесие системы без диссипации устойчиво, а при наличии малой диссипации – неустойчиво. Эта область имеет конечную меру при стремлении коэффициента вязкости к нулю.

В публикуемой работе анализируется возможность параметрической стабилизации неустойчивой прямолинейной формы консольно закрепленного стержня, на который действует следящая сила.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Рассматривается консольно закрепленный стержень, на свободный конец которого действует следящая сила P (фиг. 1). Стержень изготовлен из вязкоупругого материала с законом деформирования Кельвина – Фойхта $\sigma = E(e + \nu\dot{e})$, где σ, e, E, ν – соответственно напряжение, деформация, модуль упругости и время релаксации. Предполагается, что основание $x = 0$ может совершать гармонические колебания вдоль невозмущенной прямой $y = 0$ (прямолинейной формы) по закону $x_0 = \varepsilon_0 \cos \omega t, x_0$ – неподвижная ось, коллинеарная оси x.

Линеаризованное в окрестности прямоугольной формы $y = 0$ уравнение движения стержня с граничными условиями имеет вид

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \nu\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + m\varepsilon_0\omega^2\cos\omega t\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$y(0,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t) = 0$$

где EI – жесткость сечения стержня при изгибе, m – линейная плотность стержня.

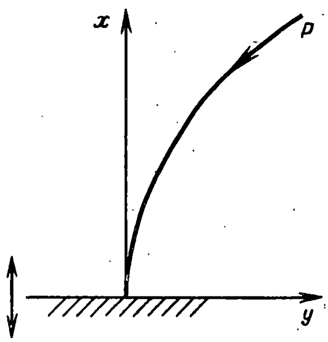
2. Редукция к системе дифференциальных уравнений. Решение уравнения (1.1) ищем в виде ряда

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau)z_k(\xi), \quad \tau = \omega t, \quad \xi = xl^{-1} \tag{2.1}$$

Функции $z_k(\xi)$ являются решениями краевой задачи

$$d^4 z_k / d\xi^4 - \lambda_k^2\mu^2 z_k = 0, \quad \mu^2 = m\omega^2 l^4/(EI) \tag{2.2}$$

$$z_k(0) = \frac{dz_k}{d\xi}(0) = 0, \qquad \frac{d^2 z_k}{d\xi^2}(1) = \frac{d^3 z_k}{d\xi^3}(1) = 0$$



Фиг. 1

и имеют вид

$$z_k(\xi) = \gamma_k(\cos \delta_k\xi - \operatorname{ch} \delta_k\xi) + \operatorname{sh} \delta_k\xi - \sin \delta_k\xi$$

$$\gamma_k = \frac{\sin \delta_k + \operatorname{sh} \delta_k}{\cos \delta_k + \operatorname{ch} \delta_k} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

где $\delta_k^2 = \lambda_k\mu$, причем δ_k являются корнями уравнения

$$\operatorname{ch} \delta_k \cos \delta_k = -1 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

Первые два наименьших корня уравнения (2.4) приближенно равны $\delta_1 = 1{,}875$, $\delta_2 = 4{,}694$. Соответственно $\gamma_1 = 1{,}362$, $\gamma_2 = 0{,}982$. Система функций $\{z_k(\xi)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_0^1 z_k(\xi)z_i(\xi)d\xi = 0 \quad (i \neq k) \tag{2.5}$$

$$a_i = \int_0^1 z_i^2(\xi)d\xi \quad (i = k)$$

Подставляя (2.1) в исходное уравнение (1.1), умножая на $z_i(\xi)$ и интегрируя от 0 до 1 и учитывая условие ортогональности (2.5), получим относительно $u_k(\tau)$ бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Ограничимся рассмотрением системы двух уравнений для $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$. Эта система такова

$$\ddot{u}_1 + k\mu^{-2}\delta_1^4\dot{u}_1 + \delta_1^4\mu^{-2}u_1 + p\mu^{-2}(e_{11}u_1 + e_{21}u_2) + \varepsilon \cos \tau(f_{11}u_1 + f_{21}u_2) = 0 \tag{2.6}$$

$$\ddot{u}_2 + k\mu^{-2}\delta_2^4\dot{u}_2 + \delta_2^4\mu^{-2}u_2 + p\mu^{-2}(e_{12}u_1 + e_{22}u_2) + \varepsilon \cos \tau(f_{12}u_1 + f_{22}u_2) = 0$$

$$k = \frac{\nu\omega}{EI}, \qquad p = \frac{Pl^2}{EI}, \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{l} \ll 1$$

$$e_{ki} = a_i^{-1}\int_0^1 z_k''(\xi)z_i(\xi)d\xi, \qquad f_{ki} = a_i^{-1}\int_0^1 z_k'(\xi)z_i(\xi)d\xi, \quad (k, i = 1, 2) \tag{2.7}$$

где точка означает производную по τ. Малость ε означает, что амплитуда параметрического возбуждения мала по сравнению с длиной стержня.

Вычисления по формулам (2.7) приводят к числовым значениям: $e_{11} = 0{,}825$, $e_{22} = -17{,}73$, $e_{12} = 2{,}92$, $e_{21} = -8{,}582$, $f_{11} = 1{,}988$, $f_{22} = 1{,}646$, $f_{12} = 1{,}203$, $f_{21} = -3{,}383$.

Для модели упругого стержня ($k = 0$) при отсутствии параметрического возбуждения ($\varepsilon = 0$) прямолинейная форма $y(x, t) = 0$ устойчива при $p < p_0 \simeq 20{,}15$ [3]. В этом случае характеристическое уравнение системы (2.6) при $k = \varepsilon = 0$ имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, причем частоты ω_1, ω_2 зависят от двух параметров μ и p. Пусть теперь $k > 0$, а параметрическое возбуждение по-прежнему отсутствует: $\varepsilon = 0$. Применение критерия Рауса–Гурвица дает следующий результат. Условие асимптотической устойчивости сводится к положительности третьего гурвицева определителя Δ_3, который приводится к виду

$$k^{-2}\delta_1^{-4}\delta_2^{-4}(\delta_2^4 - \delta_1^4)^{-1}\Delta_3 = \mu^{-8}f(p) + \mu^{-10}(\delta_2^4 - \delta_1^4)^{-1}(\delta_1^4 + \delta_2^4)\times$$

$$\times[2\delta_1^4\delta_2^4 + (e_{22}\delta_1^4 + e_{11}\delta_2^4)p]k^2$$

Коэффициент при k^2 положителен, а функция $f(p) = 473{,}12 - 37{,}11p - 1{,}459p^2$. Неравенство $f(p) > 0$ выполняется при $p < p_1 \simeq 9{,}328$ и при достаточно малом $k \sim \varepsilon$ является условием асимптотической устойчивости.

Очевиден эффект падения критической нагрузки при наличии малой вязкости. Возникает задача о возможности стабилизации прямолинейной формы вязкоупругого стержня параметрическим возбуждением в области $p_1 < p < p_0$. Эта задача решается ниже.

3. Комбинационные резонансы. Эффект стабилизации. Сделаем в системе (2.6) замену переменных

$$\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix} = L \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Vmatrix}, \quad L = \begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{e_{21}p}{\mu^2\omega_2^2 - \delta_1^4 - pe_{11}} \\ \dfrac{e_{12}p}{\mu^2\omega_1^2 - \delta_2^4 - pe_{22}} & 1 \end{Vmatrix}$$

После этой замены система (2.6) примет вид

$$\ddot{v}_1 + k\sigma(d_{11}^0\dot{v}_1 + d_{21}^0\dot{v}_2) + \omega_1^2 v_1 + \varepsilon\sigma\cos\tau(f_{11}^0 v_1 + f_{21}^0 v_2) = 0$$
$$\ddot{v}_2 + k\sigma(d_{12}^0\dot{v}_1 + d_{22}^0\dot{v}_2) + \omega_2^2 v_2 + \varepsilon\sigma\cos\tau(f_{12}^0 v_1 + f_{22}^0 v_2) = 0, \quad \sigma = \det L^{-1} \tag{3.1}$$

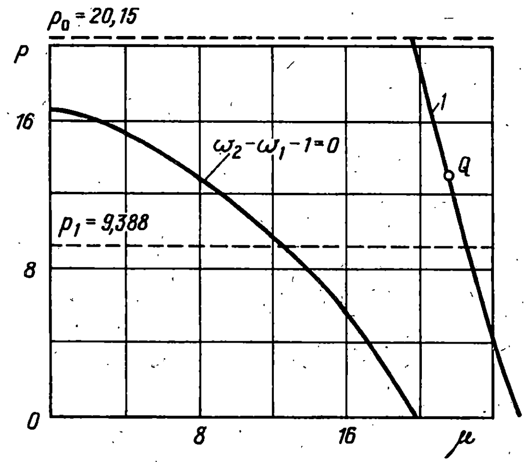
В (3.1) коэффициенты d_{ij}^0, f_{ij}^0 выражаются через $e_{ij}, f_{ij}, \delta_1, \delta_2, p, \mu$.

Границу устойчивости системы (3.1) будем искать методом осреднения. Для этого приведем систему (3.1) к стандартному виду многочастотной системы с помощью замены переменных $v_i = r_i \sin\varphi_i$, $\dot{v}_i = r_i\omega_i\cos\varphi_i$ $(i = 1, 2)$. В новых переменных r_i, φ_i система (3.1) имеет вид

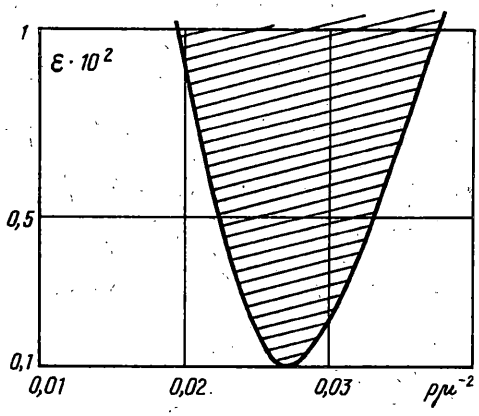
$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 + k\sigma(d_{11}^0 \sin\varphi_1\cos\varphi_1 + d_{21}^0 r_2 r_1^{-1}\omega_2\omega_1^{-1}\sin\varphi_1\cos\varphi_2) +$$
$$+\varepsilon\sigma\omega_1^{-1}(f_{11}^0\sin^2\varphi_1 + f_{21}^0 r_2 r_1^{-1}\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\cos\tau$$
$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 + k\sigma(d_{12}^0 r_1 r_2^{-1}\omega_1\omega_2^{-1}\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + d_{22}^0\sin\varphi_2\cos\varphi_2) +$$
$$+\varepsilon\sigma\omega_2^{-1}(f_{12}^0 r_1 r_2^{-1}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + f_{22}^0\sin^2\varphi_2)\cos\tau \tag{3.2}$$
$$\dot{r}_1 = -k\sigma(d_{11}^0\cos^2\varphi_1 r_1 + d_{21}^0\omega_2\omega_1^{-1}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 r_2) -$$
$$-\varepsilon\sigma\omega_1^{-1}(f_{11}^0\sin\varphi_1\cos\varphi_1 r_1 + f_{21}^0\cos\varphi_1\sin\varphi_2 r_2)\cos\tau$$
$$\dot{r}_2 = -k\sigma(d_{12}^0\omega_1\omega_2^{-1}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 r_1 + d_{22}^0\cos^2\varphi_2 r_2) -$$
$$-\varepsilon\sigma\omega_2^{-1}(f_{12}^0\sin\varphi_1\cos\varphi_2 r_1 + f_{22}^0\sin\varphi_2\cos\varphi_2 r_2)\cos\tau$$

Рассмотрим сначала комбинационный резонанс $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$. Этому резонансу на плоскости (μ, p) соответствует кривая (фиг. 2). Введя расстройку $\Delta_1 = \omega_1 + \omega_2 - 1$, $\Delta_1 \sim \varepsilon$ и сделав замену переменных $\varphi_1, \varphi_2, \tau \to \varphi_1, \varphi_2, \theta$, $\theta = \varphi_1 + \varphi_2 - \tau$ приведем систему уравнений (3.2) к виду, в котором резонанс устранен за счет увеличения на единицу числа медленных переменных. Осредняя эту систему по быстрым переменным φ_1, φ_2, получим уравнения, описывающие эволюцию медленных переменных, для которых сохранены прежние обозначения

$$\dot{\theta} = \Delta_1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon\sigma f_{21}^0\omega_1^{-1}r_2 r_1^{-1}\cos\theta - \tfrac{1}{4}\varepsilon\sigma f_{12}^0\omega_2^{-1}r_1 r_2^{-1}\cos\theta$$
$$\dot{r}_1 = -\tfrac{1}{2}k\sigma d_{11}^0 r_1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon\sigma\omega_1^{-1}f_{21}^0 r_2\sin\theta \tag{3.3}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\dot r_2 = -\tfrac{1}{2} k\sigma d^0_{22} r_2 - \tfrac{1}{4}\varepsilon\sigma\omega_2^{-1} f^0_{12} r_1 \sin\theta$$

На границе устойчивости система (3.3) имеет ненулевое стационарное решение, которое находится из уравнений

$$4\Delta_1 - \varepsilon\sigma f^0_{21}\omega_1^{-1} r_2 r_1^{-1}\cos\theta - \varepsilon\sigma f^0_{12}\omega_2^{-1} r_1 r_2^{-1}\cos\theta = 0$$

$$2kd^0_{11} r_1 + \varepsilon\omega_1^{-1} f^0_{21} r_2 \sin\theta = 0 \qquad (3.4)$$

$$\varepsilon\omega_2^{-1} f^0_{12} r_1 \sin\theta + 2kd^0_{22} r_2 = 0$$

Условием существования стационарного решения является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при r_1, r_2 во втором и третьем уравнениях

$$4\omega_1\omega_2 k^2 \varkappa - \varepsilon^2 \sin^2\theta = 0, \quad \varkappa = d^0_{11} d^0_{22} / (f^0_{12} f^0_{21}) \qquad (3.5)$$

Заметим, что соотношение (3.5) может быть выполнено только при $\varkappa > 0$. Исключая r_1, r_2, θ из уравнений (3.4) с учетом (3.5), получим, с точностью до величин порядка ε^2, уравнение границы области устойчивости

$$\varepsilon^2 = 4\omega_1\omega_2\varkappa[4\Delta_1^2\mu^4(\delta_1^4+\delta_2^4)^{-2} + k^2] \qquad (3.6)$$

Численный расчет показал, что на резонансной кривой $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$ параметр $\varkappa > 0$ только при $p_1 < p < p_0$. Если $0 < p < p_1$, то $\varkappa < 0$. Отсюда следует, что граница устойчивости существует в области, где прямолинейная форма упруговязкого стержня неустойчива. В качестве примера построения границы устойчивости была взята на резонансной кривой $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$ точка Q, которой отвечают значения параметров $\mu = 21{,}87$, $p = 13$. Граница устойчивости изображена в плоскости ($p\mu^{-2}$, ε) (фиг. 3) при $k=10^{-2}$. Область асимптотической устойчивости заштрихована.

Рассмотрим теперь другой комбинационный резонанс $\omega_2 - \omega_1 - 1 = 0$ (фиг. 2). Проведя аналогичные вычисления, получим выражение для границы устойчивости

$$\varepsilon^2 = -4\omega_1\omega_2\varkappa[4\Delta_2^2\mu^4(\delta_1^4+\delta_2^4)^{-2} + k^2], \quad \Delta_2 = \omega_2 - \omega_1 - 1 \sim \varepsilon \qquad (3.7)$$

Вычисления показали, что $\varkappa < 0$ в области $0 < p < p_1$ и $\varkappa > 0$ при $p_1 < p < p_0$. Это означает, что граница устойчивости существует в области асимптотической устойчивости, т.е. наличие резонанса $\omega_2 - \omega_1 - 1 = 0$ приводит при параметрическом возбуждении к дестабилизации асимптотически устойчивой формы стержня.

Отметим следующее важное обстоятельство. Исходный объект исследования описывается уравнением в частных производных (1.1). При применении метода разделения переменных, оно сводилось к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой ограничивались лишь двумя. Строго говоря, одна задача подменялась другой. Однако в задачах о параметрической неустойчивости (асимптотической устойчивости) имеет место близость показателя экспоненциального роста (убывания) решений уравнения (1.1) аналогичному показателю для конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В пределе, когда число уравнений $n \to \infty$ они совпадают. Строгие формулировки и доказательства соответствующих теорем даны в [4].

Таким образом, рассмотрение комбинационных резонансов показало, что резонанс $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$ приводит к стабилизации неустойчивой формы упруговязкого стержня посредством параметрического возбуждения. Резонанс $\omega_2 - \omega_1 - 1 = 0$, наоборот, приводит к дестабилизации асимптотически устойчивой формы стержня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ind. – Arch. 1952. Bd. 20. H. 1. S. 49–56.
2. *Bolotin V.V., Zhinzher N.I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to non-conservative forces // Intern. J. Solids and Structures. 1969. V. 5. № 9. P. 965–989.
3. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.VI.1994