

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1996**

УДК 624.071.3

© 1996 г. В. А. ГРАЧЕВ, Ю. С. НАЙШТУТ

**РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КАРКАСОВ
ИЗ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ**

Задача о расчете прочности и устойчивости каркаса, стержни которого подчиняются гипотезе Бернулли, обладает следующим свойством инвариантности: напряженно-деформированное состояние в любой точке стержня не зависит от выбора глобальной системы координат, в которой заданы размеры и нагрузка.

Очевидно, что указанное свойство инвариантности должно сохраняться, если гипотеза Бернулли (прямых нормалей) заменяется любым другим, более общим предположением. В публикуемой работе этот вопрос изучается применительно к каркасам из анизотропных стержней типа Тимошенко [1]. Такие стержни могут рассматриваться как конечные элементы, имеющие в локальных координатах $7 \times 2 = 14$ степеней свободы: линейные смещения, повороты и деформацию концевых сечений.

Принимается естественное допущение, что внешняя нагрузка, смещения и повороты концов преобразуются при замене глобальных координат как векторы. Возникает вопрос: как инвариантным образом определить в рамках малых деформаций деформацию узла каркаса? Аналогичный вопрос присутствует в моментной или микрополярной теории упругости [2], когда тело составлено из нескольких кусков, каждый из которых описан в своей (локальной) системе координат, а для определения тела в целом необходимо ввести глобальную систему отсчета.

В теории отдельного стержня, разработанной достаточно подробно [3—7], поставленный выше вопрос не возникает, так как деформацию узла можно принять равной деформации конца стержня в локальной системе координат. Нет его и в микрополярной упругости, когда массивное тело описано в одной системе отсчета.

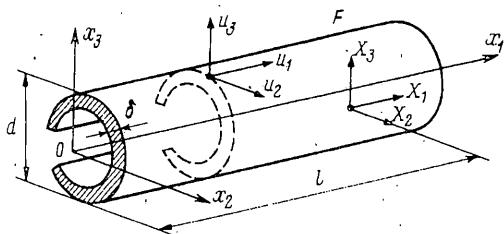
По сути, основная задача публикуемой работы состоит в том, чтобы указать, как по возможности шире инвариантным образом вводить в пространственную механическую систему дополнительные степени свободы, например, деформацию, не изменяя векторного (тензорного) представления присущих в ней величин. Пространственный каркас является простейшей моделью. Перенесение результатов на более сложные системы типа микрополярной упругости не вызывает дополнительных сложностей.

Понятие деформации узла для каркасов из стержней типа Бернулли, соединенных подобно плоским рамам, ввел Б. И. Горбунов в [8]. Приняв некоторые допущения о деформации узла, он вычислил локальные смещения концевых сечений и использовал полученные результаты в расчетах рам из тонкостенных стержней. Тот же результат использовался в последующие годы во многих конкретных задачах [9—11]. Недавно построения Б. И. Горбунова модифицированы путем введения коэффициентов редукции [12] между стержнями, сходящимися в узле.

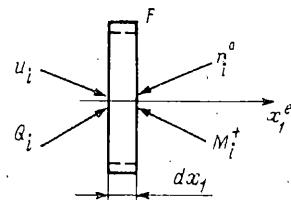
Таким образом, все авторы после [8] оперировали с какой-то одной возможностью конструктивного решения жесткого узла, обеспечивающей инвариантность деформации. В представленной работе показано, что это понятие можно определить шире, чем в приведенных исследованиях.

Порядок изложения отвечает последовательности введения соответствующих понятий метода конечных элементов (в форме метода перемещений).

1. Тонкостенный стержень типа Тимошенко — система с конечным числом степеней свободы. Рассматривается призматический стержень длиной l (фиг. 1). Изучение напряженно-деформированного состояния проведем в обычно используемой специальной системе отсчета, которая выбирается следующим образом.



Фиг. 1



Фиг. 2

Начало координат поместим на одном из концов. Точка $x_2 = x_3 = 0$ находится в центре тяжести поперечного сечения тела F . Пусть линия $x_2 = x_3 = 0$ проходит через центры тяжести всех сечений. Обозначим характерный размер сечения d . Призматический стержень называют тонкостенным, если малы числа

$$d/l \ll 1, \quad \delta/d \ll 1 \quad (1.1)$$

В предположениях (1.1) компоненты перемещений u_1, u_2, u_3 произвольной точки стержня могут быть представлены в форме [13]:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1^0(x_1) - v_{13}^0(x_1)x_3 - v_{12}^0(x_1)x_2 + \varphi_s(x_2, x_3)\psi^{0'}(x_1) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= v_1^0(x_1) - \psi^0(x_1)x_3, \quad u_3(x_1, x_2, x_3) = w_1^0(x_1) + \psi^0(x_1)x_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь функция $\psi^0(x_1)$ называется углом поворота сечения, а $\psi^{0'}(x_1)$ — ее производная. Представление (1.2) отвечает модели С. П. Тимошенко [1] с углами сдвига $v_{12}^0(x_1), v_{13}^0(x_1)$.

Функция депланации Сен-Венана связана с функцией $\varphi_s(x_2, x_3)$ — депланацией относительно центра тяжести сечения, следующей формулой:

$$\varphi_s(x_2, x_3) = \varphi(x_2, x_3) - x_{3s}\dot{x}_2 + x_{2s}x_3 \quad (1.3)$$

где x_{2s}, x_{3s} — координаты центра изгиба.

Задача расчета тонкостенного стержня, на который действует объемная нагрузка X_1, X_2, X_3 , сводится к определению трех функций u_1, u_2, u_3 из принципа виртуальной работы [13]:

$$\int_V (\sigma_y \delta e_y - X_i \delta u_i) dV = 0, \quad dV = dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1.4)$$

$$e_y = 1/2 (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$$

где векторы u_i удовлетворяют геометрическим ограничениям на концах. Напряжения и деформации связаны законом Гука

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} e_{kl} \quad (1.5)$$

Для тонких стержней выполняются равенства

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0 \quad (1.6)$$

Вычислим деформации

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= u_1^{0'}(x_1) - x_2 v_{12}^{0'}(x_1) - x_3 v_{13}^{0'}(x_1) \varphi_s(x_2, x_3) \psi^0(x_1) \\ \gamma_{12} &= -v_1^{0'}(x_1) + \psi^0(x_1) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_{3s} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\gamma_{13} = -w_1^{0'}(x_1) + \psi^0(x_1) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + x_{2s} \right)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{ii} = 2\varepsilon_{ii}$$

Из (1.4) имеем

$$\int_V (X_1 \delta(u_1^0 - x_2 v_{12}^0 - x_3 v_{13}^0 + \varphi_s \theta^0) + X_2 \delta(v_1^0 - \theta^0 x_3) + \\ + X_3 \delta(w_1^0 + \theta^0 x_2)) dV = \int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \delta \gamma_{12} + \sigma_{13} \delta \gamma_{13}) dV \quad (1.8)$$

Введем обозначения для внутренних усилий

$$N^0 = \int_F \sigma_{11} dF, \quad M_2^0 = - \int_F \sigma_{11} x_3 dF, \quad M_3^0 = \int_F \sigma_{11} x_2 dF, \quad Q_2^0 = \int_F \sigma_{12} dF \quad (1.9)$$

$$B^0 = H^0 = \int_F \sigma_{11} \varphi_s dF, \quad M_1^0 = \int_F (\sigma_{12} (\partial \varphi / \partial x_2 - x_{3s}) + \\ + \sigma_{13} (\partial \varphi / \partial x_3 + x_{2s})) dF, \quad Q_3^0 = \int_F \sigma_{13} dF$$

$$dF = dx_2 dx_3$$

По закону Гука (1.5) можно выразить семь внутренних усилий через первые производные семи функций $u_1^0, v_1^0, w_1^0, v_{12}^0, v_{13}^0, \theta^0, \theta^{0'}$ даже если имеет место анизотропия упругих свойств как по сечению, так и по длине стержня. Обозначим матрицу-строку $\{u_1^0, v_1^0, w_1^0, v_{12}^0, v_{13}^0, \theta^0, \theta^{0'}\} = u_i$ ($i = 1, 2, \dots, 7$).

С учетом сказанного перепишем (1.8) в форме интегрального тождества, зависящего от одной переменной

$$\int_0^l (N^0 \delta u_1^{0'} + Q_2^0 \delta w_1^{0'} + Q_2^0 \delta v_1^{0'} + M_1^0 \delta \theta^{0'} + M_2^0 \delta v_{12}^{0'} + \\ + M_3^0 \delta v_{13}^{0'} + H^0 \delta \theta^{0''}) dl = \quad (1.10)$$

$$= - \int_0^l (p_1 \delta u_1^0 + p_2 \delta w_1^0 + p_3 \delta v_1^0 + p_4 \delta v_{12}^0 + p_5 \delta v_{13}^0 + p_6 \delta \theta^0 + p_7 \delta \theta^{0'}) dl$$

$$p_1 = \int_F X_1 dF, \quad p_2 = \int_F X_2 dF, \quad p_3 = \int_F X_3 dF, \quad p_4 = - \int_F X_1 x_2 dF \quad (1.11)$$

$$p_5 = \int_F X_1 x_3 dF, \quad p_6 = \int_F (X_2 x_3 - X_3 x_2) dF, \quad p_7 = \int_F X_1 \varphi_s dF$$

Аналогично определим вектор-столбец

$$p_i = \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_7 \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \quad (1.12)$$

Интегрируя по частям (1.10) и учитывая произвол в выборе u_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), получим шесть уравнений равновесия для искомых функций Q_j :

$$\frac{dQ_i}{dx_1} + p_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad \frac{d^2Q_7}{dx_1^2} + \frac{dQ_6}{dx_1} + p_7 + \frac{dp_6}{dx_1} = 0$$

$$Q_i = \begin{vmatrix} N^0 \\ Q_1^0 \\ Q_2^0 \\ M_1^0 \\ M_2^0 \\ M_3^0 \\ H^0 \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, 7) \quad (1.13)$$

и семь граничных условий типа

$$Q_i \delta u_i \Big|_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \quad (1.14)$$

Чтобы упростить изложение, будем рассматривать для одного стержня только простейшие граничные условия, когда Q_i и δu_i независимы. Для тонкостенного стержня существенны и другие закрепления, например, упругие. Это обстоятельство, как известно [12, 14], можно учесть двояко: введя податливость опор в функционал (1.4), либо представляя стержень как систему, наделенную дополнительными «фиктивными» узлами и стерженьками-пружинами. В публикуемой работе принят второй подход.

Итак, на каждом конце стержня можно считать u_i фиксированным, и граничное условие примет вид

$$u_i = \text{const} = c_i(0) \quad (1.15)$$

либо δu_i произвольна и тогда

$$Q_i = 0 \quad (1.16)$$

Таким образом, имеется $7 \times 2 = 14$ граничных условий, имеющих вид либо (1.15), или (1.16).

Уравнения (1.13) можно записать через u_i , если воспользоваться формулами (1.7), (1.9), (1.11). Получающаяся система уравнений, в которую входят вторые производные функции $u_1^0, v_1^0, w_1^0, v_{12}^0, v_{13}^0$ и четвертые производные u^0 , имеет 14 порядок. Следовательно, эта система допускает общее решение, имеющее 14 произвольных постоянных, которые можно выразить через константы: $c_i(0)$, $c_i(l)$ при $i = 1, 2, \dots, 7$.

Доказательство последнего факта использует положительную определенность соответствующей (1.10) квадратичной формы и проводится стандартным образом [15].

Поэтому для $u_i(x_i)$ имеем формулу типа

$$u_i(x_i) = g_{ij} u_j(0, l), \quad u_i = (0, l) = \begin{vmatrix} u_1 = u_1(0) \\ u_2 = u_2(0) \\ \dots \dots \dots \\ u_7 = u_7(0) \\ u_8 = u_1(l) \\ \dots \dots \dots \\ u_{14} = u_7(l) \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 7; j = 1, 2, 3, \dots, 14)$$

Здесь g_{ij} — известная непрерывная матрица-функция, зависящая от координаты x_i , матрицу $u_i(0, l)$ ($i = 1, 2, \dots, 14$) содержащую четырнадцать компонент, называют обобщенными перемещениями концов стержня.

Подсчитаем по (1.17) усилия на концах 0 и l и найдем

$$Q_i(0, l) = k_{ij} u_j(0, l) \quad (i, j = 1, 2, \dots, 14) \quad (1.18)$$

Матрица k_{ij} называется матрицей жесткости стержня. Соотношение (1.18) позволяет истолковывать стержень между концами 0 и l как конечный элемент, имеющий в специальной системе координат 14 степеней свободы $u_i(0)$, $u_i(l)$. Действительно, знание $u_i(0, l)$ позволяет по (1.2), (1.4), (1.17) указать перемещения и напряжения в любой точке тонкостенного стержня.

2. Перемещения и углы поворота концевых сечений; их связь с обобщенными перемещениями концов. Поскольку четырнадцать чисел, отнесенных к центрам тяжести двух концевых сечений, определяют в отсутствии внешней нагрузки напряженно-деформированное состояние стержня, выясним их связь с перемещениями и поворотами концевых сечений. Из (1.2) следует, что вектор перемещений центра тяжести концевого сечения в специальной системе координат имеет компоненты — $r_1(x_1)$, $r_2(x_1)$, $r_3(x_1)$, равные

$$r_1(0) = u_1^0(0) + \varphi_s(0, 0) \theta^{0'}(0) \quad (2.1)$$

$$r_2(0) = v_1^0(0), \quad r_3(0) = w_1^0(0)$$

А вектор угла поворота ω_i концевого сечения, вычисляемый для точки-частицы с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, имеет вид [16]

$$\omega_i = 1/2 \operatorname{rot} u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (2.2)$$

$$\omega_1(0) = \theta^0(0), \quad \omega_2(0) = 1/2 v_{13}^0(0) + \theta^{0'}(0) \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_3}(0, 0) + 1/2 w_1^{0'}(0) \quad (2.3)$$

$$\omega_3(0) = 1/2 v_{12}^0(0) + \theta^{0'}(0) \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2}(0, 0) + 1/2 v_1^{0'}(0)$$

Аналогично для концевого сечения $x_1 = b$ можно записать

$$r_1(l) = u_1^0(l) + \varphi_s(0, 0) \theta^{0'}(l), \quad r_2(l) = v_1^0(l), \quad r_3(l) = w_1^0(l) \quad (2.4)$$

$$\omega_1(l) = \theta^0(l), \quad \omega_2(l) = 1/2 v_{13}^0(l) + \theta^{0'}(l) \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_3}(0, 0) + 1/2 w_1^{0'}(l) \quad (2.5)$$

$$\omega_3(l) = 1/2 v_{12}^0(l) + \theta^{0'}(l) \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2}(0, 0) + 1/2 v_1^{0'}(l)$$

Члены $w_1^{0'}(0)$, $w_1^{0'}(l)$, $v_1^{0'}(0)$, $v_1^{0'}(l)$ не являются независимыми. Их можно выразить через $u_i(0, l)$ в соответствии с (1.17). Получается выражение типа

$$w_i^-(0, l) = w_{ij}^- u_j(0, l), \quad w_i^-(0, l) = \begin{vmatrix} w_1^{0'}(0) \\ w_1^{0'}(l) \\ v_1^{0'}(0) \\ v_1^{0'}(l) \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

$$(i = 1, j = 1, 2, \dots, 14)$$

с известной матрицей w_{ij}^- . Подставим (2.6) в (2.1) — (2.5), считая $\theta^{0'}(0)$, $\theta^{0'}(l)$ известными,

$$r_i^0 = T_{ij}^{-1} u_j(0, l), \quad r_i^0 = \begin{vmatrix} r_m(0) \\ w_m(0) \\ \theta'(0) \\ r_m(l) \\ w_m(l) \\ \theta'(l) \end{vmatrix} \quad (m = 1, 2, 3) \quad (2.7)$$

(i = 1, j = 1, 2, \dots, 14)

Решим эту систему относительно $u_i(0, l)$. Получится зависимость, обратная (2.1)—(2.5):

$$u_i(0, l) = T_{ij} r_j^0 \quad (i = 1, j = 1, 2, \dots, 14) \quad (2.8)$$

Отметим отличие матрицы T_{ij} по сравнению с тем, что получается, если для стержня верна гипотеза Бернулли, а его сечения симметричны. В этом случае формулы (2.7), (2.8) значительно упрощаются. При наличии симметрии

$$\varphi_s(0, 0) = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_3}(0, 0) = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2}(0, 0) = 0 \quad (2.9)$$

Кроме того, по гипотезе Бернулли

$$w_1^{0'}(0) = v_{13}^0(0), \quad v_1^{0'}(0) = v_{12}^0(0) \quad (2.10)$$

$$w_1^{0'}(l) = v_{13}^0(l), \quad v_1^{0'}(0) = v_{12}^0(0)$$

Отсюда будем иметь

$$r_m(0) = \{u_1^0(0), v_1^0(0), w_1^0(0)\} \quad (m = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

$$w_m(0) = \{\theta^0(0), v_{13}^0(0), v_{12}^0(0)\}$$

Векторы перемещений и поворотов тела-точки, лежащей нанейтральной оси, совпадают на каждом конце с функциями $u_i(0)$, $u_i(l)$, и T_{ij} сводится к единичной матрице. Для стержня типа Тимошенко простые зависимости (2.11) заменяются на (2.7), (2.8).

Столбцу r_i^0 из (2.7) можно поставить в соответствие столбец усилий M_i^+ , аналогичный Q_i из (1.18) так, чтобы для концевых сечений выполнялось при произвольном $u_i(0, l)$ или r_i^0 условие равновесия сечения (фиг. 2, $x_1^e = 0$ или $x_1^e = l$):

$$M_i^+ r_i^0 = Q_i u_i(0, l) \quad (2.12)$$

Как обычно, предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. Подставляя зависимости (2.7) или (2.8) в (2.12), и учитывая, что (2.12) тождество при любых r_i^0 или $u_i(0, l)$, получим

$$M_i^+ = T_{ij}^* Q_i \quad (2.13)$$

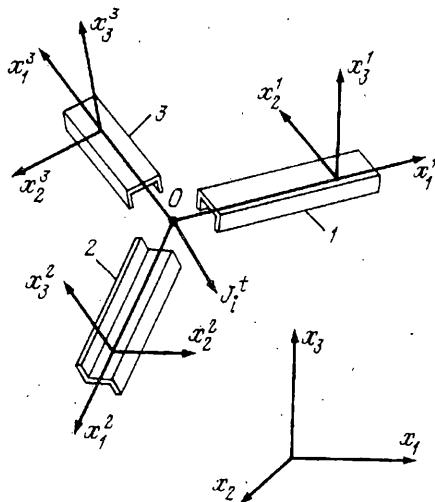
Если подставить в (2.13) выражение для Q_i из (1.18) и воспользоваться связью (2.8), то найдем

$$M_i^+ = T_{ij}^* k_{jm} T_{lm} r_l^0 = k_{ij}^0 r_l^0 \quad (2.14)$$

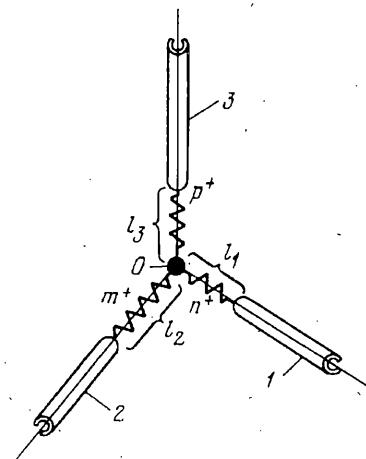
Матрицу

$$k_{ij}^0 = T_{im}^* k_{ml} T_{lj} \quad (2.15)$$

естественно назвать обобщенной матрицей жесткости анизотропной балки типа



Фиг. 3



Фиг. 4

Тимошенко, так как она связывает матрицу концевых смещений (перемещений — поворотов — депланаций) r_i^0 с обобщенными усилиями M_i^+ таким образом, что в этих сечениях выполняются условия обобщенного равновесия (2.12).

3. Глобальные и локальные координаты. Связь обобщенного перемещения узла и концевых перемещений стержней. Рассмотрим узел каркаса O , в котором сходится несколько стержней фиг. 3. Оси элементов (линии центров тяжести сечений стержней) пересекаются в одной точке. Каждый стержень связан с системой координат, введенной в п. 1. Такие координаты x_i^e называют локальными. Вводится также глобальная система координат x_i для описания расположения узлов и ориентации осей локальных координат стержней, образующих каркас.

Обобщенным вектором-перемещением узла каркаса назовем строку из семи чисел, которые в глобальной системе описывают перемещения, углы поворота и депланацию D бесконечно малого твердого тела, расположенного в точке O ($i = 1, 2, \dots, 7$):

$$J_i = \{u_{01}, u_{02}, u_{03}, \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}, D\} = \{u_{0m}, \omega_{0m}, D\} \quad (m = 1, 2, 3)$$

Вектору J_i поставим в соответствие вектор узловых сил так, чтобы равенство

$$\delta A = M_i^0 \delta J_i$$

выполнялось при произвольном δJ_i , где A — скалярная величина работы всех сил, приложенных к узлу.

Поставим следующий вопрос: какие обобщенные перемещения допустимы? Первое ограничение состоит в том, что порождаемые J_i перемещения концов всех сходящихся в узле стержней должны совпадать в глобальной системе координат.

Поскольку r_m и ω_m — векторы, то глобальные перемещения узла u_{0m}, ω_{0m} — тоже векторы. Следовательно, имеет место такая зависимость

$$u_0^+ = \begin{vmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \\ \omega_{01} \\ \omega_{02} \\ \omega_{03} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \{c_{ij}\} & 0 \\ 0 & \{c_{ij}\} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \\ r_3(0) \\ \omega_1(0) \\ \omega_2(0) \\ \omega_3(0) \end{vmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Матрица c_{ij} образована из направляющих косинусов между глобальной и локальными системами координат, связанными с каждым стержнем, сходящимся к узлу O .

Равенство (3.1) достаточно, чтобы перемещения точек, лежащих на линиях центров тяжести, и углы поворота сечений были непрерывны для каркаса в целом.

Предположим далее, что седьмая компонента J_i — депланация узла D — является скаляром, независящим от глобальной системы координат. Другими словами, $J_7 = D$ — функция узла каркаса.

В линейном приближении связь между J_i и r_i^0 можно ввести по закону

$$r_i^0 = F_i^0 J_i^0, \quad J_i^0 = \begin{vmatrix} J_m(0) \\ \dots \\ J_{m+7}(l) \end{vmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 14) \quad (m = 1, 2, \dots, 7)$$

$$F_i^0 = \begin{vmatrix} \{F_{mn}\} & 0 \\ 0 & \{F_{m'n'}\} \end{vmatrix}, \quad F_{mn} = \begin{vmatrix} \{c_{ij}\} & 0 & 0 \\ 0 & \{c_{ij}\} & 0 \\ a_{17}, & a_{27}, & \dots, & a_{77} \end{vmatrix} \quad m' = m + 7 \quad n' = n + 7 \quad (3.2)$$

с единственным условием

$$a_{77} \neq 0, \quad a_{1414} \neq 0 \quad (3.3)$$

и произвольными $a_{17}, a_{27}, \dots, a_{77}, a_{814}, \dots, a_{1414}$.

Условие (3.3) обеспечивает взаимно-однозначное соответствие между J_i^0 и r_i^0 . Матрицу F_i^0 назовем матрицей соединения стержня [14].

Требования однозначной обратимости матрицы (3.2) отражает обязательное для упругого узла условие: концевые перемещения сходящихся в узле стержней однозначно определяют его глобальное движение и, наоборот, — глобальное смещение узла порождает на концах стержней единственный вектор r_i^0 .

Если глобальная система координат выбрана, то значения четырнадцати величин $a_{17}, a_{27}, \dots, a_{77}, a_{814}, a_{914}, \dots, a_{1414}$ зависят от конструктивного исполнения узла сопряжения стержней в каркасе. Таким образом, при образовании каркасов из стержней типа Тимошенко появляется множество разных «упругих» узлов, не различимых в рамках теории классических стержневых каркасов. Появление новой степени свободы узла-депланации открывает достаточно широкие возможности для «редукции» локальной депланации от одного стержня к другому. Матрица соединения (3.2) является, в итоге, естественным расширением построений Б. Н. Горбунова [8], согласующимся с общепринятой теорией [14] стержневых систем.

Числа $a_{17}, a_{27}, \dots, a_{77}, a_{814}, \dots, a_{1414}$ зависят от глобальной системы отсчета. Возникает вопрос: каким образом числа $a_{17}, a_{(i+7)14}$ ($i = 1, 2, \dots, 7$) преобразуются при переходе к любой другой системе координат?

Ответ на этот вопрос дается в следующем параграфе, где обосновывается возможность расчета каркаса, когда за неизвестные принимаются перемещения, углы поворота концевых сечений, а также депланация узлов. При этом связь локальных и глобальных параметров обеспечивается матрицей (3.2).

4. Формулировка задачи о расчете каркаса из тонкостенных стержней. Обобщенные уравнения равновесия узлов. Грузовые члены. Канонические уравнения метода перемещений. Шарнирное и податливое примыкание стержней. Преобразование матрицы соединения при замене глобальных координат. Каркасом называют такую систему стержней, линии центров тяжести сечений которых пересекаются в конечном числе узловых точек. Для каждого элемента каркаса вводится локальная система координат, а положение узлов фиксируется в гло-

бальной системе отсчета, как в п. 3. На отдельные стержни действуют силы P_i ($i = 1, 2, \dots, 7$), а в узле сосредоточены обобщенные силы M'_i .

Пусть в узле сходится n стержней, а всего узлов p . Концевые усилия со стороны каждого стержня в его локальной системе координат обозначим M_i^{+k} . Узел называют незакрепленным, если допустимы любые перемещения J'_i . Узел находится в равновесии, если равенство

$$M'_i J'_i = \sum_{k=1}^n M_i^{+k} r_i^{0k}, \quad r_i^{0k} = \begin{vmatrix} r_1^k(0) \\ \dots \\ r_3^k(0) \\ w_1^k(0) \\ w_3^k(0) \\ \theta^k(0) \end{vmatrix} = F_m^0 J_m^k \quad (4.1)$$

выполняется для всех допустимых J'_i . Уравнение (4.1) — обобщенное уравнение равновесия узла.

Чтобы рассчитать каркас необходимо удовлетворить следующим условиям:

1. Существуют векторы-перемещения узлов J'_i , i — номер узла;
2. Векторы M'_i порождают такие перемещения концов стержней, что поля перемещения внутри каждого стержня непрерывны;
3. Перемещения u_i внутри каждого стержня удовлетворяют уравнениям (1.13);
4. Узлы каркаса находятся в равновесии в смысле (4.1).

Будем решать задачу в два этапа. Вначале найдем частное решение-поле J_i^{10} , удовлетворяющее (1.13) при условии, что концы всех стержней закреплены

$$r_i^{0k} = u_i = 0 \quad (4.2)$$

Решение такой задачи существует, при этом условия 2, 3 выполняются, а соответствующие $J_i^{10} = 0$.

Значения M_i^+ из (2.13) называются грузовыми членами. Грузовые члены собранных в узел стержней не обязаны быть в равновесии, так что условие 4, вообще говоря, не выполнено.

На втором этапе попытаемся найти для всех узлов векторы J_i^1 так, чтобы поле $(J_i^{10} + J_i^1)$ удовлетворяло (4.1). Неизвестные J_i^1 (семь в каждом узле) должны отвечать нулевой нагрузке $P_i = 0$. Они определяют векторы Q_i и M_i^+ по формулам (1.18) и (2.13). Записав для каждого узла семью уравнений равновесия (4.1), получим каноническую систему метода перемещений, содержащую $7p$ уравнений относительно $7p$ неизвестных J_i^1 . Из этих уравнений находится $7p$ неизвестных, а $(J_i^{10} + J_i^1)$ удовлетворяют условиям 1—4.

Если какой-либо из стержней примыкает к узлу шарнирно, например, его номер q , так что локально какое-то из усилий M_q^+ обращается в нуль, то наряду с глобальными перемещениями узла J_q вводится дополнительное локальное перемещение конца стержня u_q^k и составляется дополнительное уравнение

$$M_q^- + u_q^k k' = 0 \quad (4.3)$$

где k' — соответствующий диагональный коэффициент в (2.14). Составляется столько дополнительных уравнений типа (4.3), сколько простых шарниров содержит расчетная схема, и все уравнения типа (4.1) и (4.3) позволяют найти глобальные J_i и локальные перемещения u_i^k .

Податливое соединение стержней в узле O (фиг. 4) моделируем путем введения дополнительных узлов m^+, n^+, p^+ и соответствующих «фиктивных» стержней с малыми длинами l_1, l_2, l_3 . Назначая различные жесткости этих стержней, можно

моделировать податливое узловое соединение в точке О. При этом опоры «фиксивных» стержней считаются идеальными.

Полученные в результате решения полной системы уравнений перемещения и усилия, будучи отнесены к локальным координатам каждого стержня, не должны зависеть от выбора глобальной системы координат. Последнее требование позволяет найти преобразование матриц (3.2) при переходе к новой системе координат.

Действительно, обозначим соответствующую матрицу в любой новой системе отсчета F'_i . В матрице F'_i можно задать 14 неопределенных коэффициентов $a_{17}', a_{27}', \dots, a_{77}', a_{814}', \dots, a_{1414}'$. Таким образом, если количество стержней в каркасе h , то всего неопределенных коэффициентов будет $14h$. Выразим все $14h$ внутренних усилий через эти коэффициенты и приравняем усилиям, полученным от решения первоначальной системы с исходной матрицей соединения. Получается $14h$ уравнений для нахождения всех величин $a_{17}', a_{27}', \dots, a_{1414}'$. Следовательно, условие инвариантности внутренних усилий определяет преобразование матриц (3.2) при замене системы координат.

Из сказанного также следует, что для каждого жесткого, неформируемого в классическом смысле узла каркаса можно указать в линейном приближении семь произвольных коэффициентов, распределяющих угловую диспланацию. Любой выбор этих коэффициентов обеспечивает жесткое смещение узла в смысле гипотезы плоских сечений Бернулли и равновесие сил и моментов, относящихся к центру узла. Коэффициенты $a_{17}, \dots, a_{77}, \dots, a_{1414}$ задают различные типы уравнений внутренних напряжений в элементах, вызванных диспланацей (или вызывающими диспланацию) узлов.

5. Эйлерова устойчивость каркасов из тонкостенных стержней типа Тимошенко. Рассмотрим стержень с начальными напряжениями $k\sigma_0^0$, где σ_0^0 — уровень внутренних напряжений, подсчитанный по формулам п. 1—4. Если нагрузки возрастают пропорционально параметру k , то $k\sigma_0^0$ отвечает вектору kP .

Расчет эйлеровой устойчивости состоит в определении такого значения k [13], чтобы оно соответствовало собственному числу в вариационном принципе

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta e_{ij} + k\sigma_0^0 \mu_{ij} \delta u_{ij}) dV = 0 \quad (5.1)$$

Вариации δe_{ij} , δu_{ij} должны удовлетворять геометрическим ограничениям на торцах стержня.

Повторив рассуждения п. 1, 2, можно получить аналог (2.14) — локальную матрицу жесткости для тонкостенного стержня, связывающую концевые усилия и перемещения

$$M_i^{0c} = k_{ij}^{0c} r_{ij}^{0c} \quad (5.2)$$

Матрица k_{ij}^{0c} зависит от параметра k .

Оценка устойчивости каркаса методом перемещений не отличается в остальном от построений п. 3, 4: после введения глобальных переменных составляются уравнения типа (4.1).

Эта система содержит столько же линейных уравнений, сколько неизвестных J_i^{0c} и нулевые грузовые члены. Матрица полученной системы зависит от параметра k , и существование собственного значения означает эйлерову потерю устойчивости, связанную с бифуркацией форм равновесия каркаса.

Собственное значение k_0 обращает детерминант этой системы в нуль. Поэтому простой способ подсчета k_0 состоит в построении функции $\det k_{ij}^{0c}$ и выявлении тех значений k , когда

$$\det k_{ij}^{0c} = 0 \quad (5.3)$$

Последняя процедура может быть выполнена численно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Timoshenko S. On the correction for the shear of the differential equations for transverse vibrations of the prismatic bars//Phil. Mag. 1921. V. 41. S. E. No. 6. P. 341—346.
2. Эринген А. К. Теория микрополярной упругости//Разрушение. Т. 2./Ред. Либовиц Г. М.: Мир, 1975. С. 647—751.
3. Timoshenko S. Theory of bending, torsion and buckling of the thin-walled members of the open cross section//J. Franklin Ins. 1945. V. 239. No. 3. P. 201—219; No. 4. S. 249—268; No. 5. P. 343—361.
4. Понятовский В. В. Применение асимптотического метода интегрирования к задаче равновесия тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности//Изв. АН. МГГ. 1968. № 5. С. 139—143.
5. Елисеев В. В. Применение асимптотического метода в задаче о равновесии криволинейного стержня//Изв. АН. МГГ. 1977. № 3. С. 145—150.
6. Бердичевский В. Л. Об энергии упругого стержня//ПММ. 1981. Т. 9. Вып. 4. С. 704—708.
7. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1961. 508 с.
8. Горбунов Б. Н. Расчет пространственных рам из тонкостенных стержней//ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 6. С. 65—70.
9. Уманский А. А. Строительная механика самолета. М.: Физматгиз, 1961. 529 с.
10. Вычков Д. С. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М.: Стройиздат, 1962. 475 с.
11. Стрельбицкая А. И. Предельное равновесие рам из тонкостенных стержней при изгибе с кручением. Киев: Наук. думка, 1964. 255 с.
12. Хьюз О. Ф. Проектирование судовых корпусных конструкций. Л.: Судостроение, 1988. 360 с.
13. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
14. Розин Л. А. Стержневые системы как системы конечных элементов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 232 с.
15. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.
16. Седов Л. И. Механика силиконной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

Самара

Поступила в редакцию
9.IV.1993