

УДК 539.3

© 1996 г. А. Г. САРКИСЯН, А. Г. СМОЛЯНИН, А. И. ЦЕЙТЛИН

КОМБИНИРОВАННЫЙ ГРАНИЧНО-КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ

Современные методы автоматизированного расчета строительных конструкций и численного решения статических и динамических задач механики сплошной среды, связанных с проектированием сооружений, основаны главным образом на двух наиболее универсальных алгоритмах — конечно-элементном и граничноэлементном, имеющих весьма большие области эффективного применения. Конечноэлементные программы, являющиеся наиболее распространенными, используются при расчетах сооружений, представляющих собой совокупность пластинчатых, стержневых или оболочечных конструктивных элементов. Расчетные схемы таких сооружений при относительно небольшой площади или объеме занимаемой сооружением области имеют достаточно большие границы, и в этом случае метод конечных элементов (МКЭ) не имеет конкурентов. Однако, при расчете отдельных элементов или сооружений простой конфигурации (таких например, как плотина), а также при изучении напряженно-деформированного состояния сред в неограниченных областях (например, конструкции на упругом основании или в упругой среде) метод граничных элементов (МГЭ) оказывается много эффективнее, чем МКЭ. Особенно это характерно для задач о динамическом взаимодействии сооружений с грунтом при микро- и макросейсмических колебаниях. Однако, еще более экономичные алгоритмы расчета сооружений сложной конфигурации, взаимодействующих с грунтовым основанием, могут быть построены на основе комбинированного гранично-конечноэлементного метода [1—3], предполагающего конечноэлементное описание сооружения и граничноэлементную формулировку задачи для грунтового основания.

В публикуемой статье авторы, придерживаясь общей схемы построения комбинированного метода, приведенной в [1, 2], поставили своей целью разработку эффективного алгоритма решения стационарной динамической задачи для вязкоупругой среды с частотно-независимым относительным демпфированием применительно к расчету сложных сооружений, взаимодействующих с грунтовым основанием. Особенностью работы, наряду с решением конкретных прикладных задач, является рассмотрение стационарных колебаний, часто встречающихся в строительной практике, что требует вычисления интегралов с быстроосциллирующими функциями и особого выбора длин граничных элементов в зависимости от частоты возмущения.

1. Основные соотношения динамики вязкоупругой среды. Заданное тело предполагается состоящим из n однородных, изотропных, вязкоупругих материалов (сред) соответственно с плотностями ρ_k , комплексными параметрами вязкоупругости $\lambda_k(i\omega)$, $\mu_k(i\omega)$ и коэффициентами Пуассона ν_k ($k = 1, \dots, n$). Для описания вязкоупругих свойств материалов сред используется линейная модель частотно-независимого относительного демпфирования [4]. При этом комплексный аналог модуля Юнга берется в виде

$$E_k(i\omega) = E_k |\omega|^{\alpha_k} [\cos(\pi\alpha_k/2) + i \operatorname{sign} \omega \sin(\pi\alpha_k/2)] \quad (1.1)$$

а коэффициент Пуассона ν принимается вещественной постоянной, т. е. считается нерелаксирующим, где ω — круговая частота гармонических колебаний, $\alpha_k = 2\pi^{-1} \operatorname{arctg} \gamma_k$, γ_k — коэффициент потерь. Зависимости между $\lambda_k(i\omega)$, $\mu_k(i\omega)$, $E_k(i\omega)$ и ν_k получаются из аналогичных соотношений теории упругости путем

прямой замены соответствующих упругих констант указанными комплексными величинами. Данная модель обеспечивает идеальную частотную независимость потерь энергии на всей частотной оси и позволяет исследовать любые динамические процессы, однако исключает рассмотрение статического нагружения вследствие неограниченной ползучести при $\omega = 0$. В последнем случае материалы сред предполагаются упругими.

Каждая из указанных сред занимает область (конечную или бесконечную) D_k с кусочно-гладкой границей S_k . За положительное направление нормали на границе S_k принимается направление, внешнее относительно области D_k . На поверхности раздела задаются условия контакта, на остальных частях границ — граничные условия. Каждая область рассматривается отдельно методом граничных интегральных уравнений или методом конечных элементов. Далее, используя условия контакта, полученные граничные интегральные уравнения (ГИУ) и уравнения МКЭ объединяются в одну глобальную систему, решением которой являются неизвестные функции перемещений и напряжений.

Пусть рассматриваемое тело подвержено гармоническим колебаниям в условиях плоской деформации в плоскости x_1, x_2 прямоугольной декартовой системы координат x_i ($i = 1, 2, 3$), вызванным действием силовых или кинематических гармонических нагрузок. В случае плоского напряженного состояния все последующие рассуждения останутся теми же, с той только разницей, что вместо комплексных параметров вязкоупругости $\lambda_k(i\omega)$ ($k = 1, \dots, n$) понадобится взять $2\lambda_k(i\omega) \mu_k(i\omega) / [\lambda_k(i\omega) + 2\mu_k(i\omega)]$. После исключения времени из уравнений движения задача сводится к определению в областях D_k ($k = 1, \dots, n$) регулярных векторов перемещений $\mathbf{u}^{(k)}$ (т. е., векторов, имеющих в каждой точке рассматриваемых областей непрерывные частные производные до второго порядка включительно и непрерывно продолжаемых со своими частными производными до первого порядка включительно на границах соответствующих областей), удовлетворяющих:

уравнениям движения

$$A^{(k)}(\partial q; i\omega) \mathbf{u}^{(k)}(q; \omega) + \rho \omega^2 \mathbf{u}^{(k)}(q; \omega) = 0 \quad (1.2)$$

контактным условиям, выражающим скачок перемещений $\Delta \mathbf{u}^{(kl)}$ и напряжений $\Delta \sigma^{(kl)}$ при переходе через границу раздела областей k и l

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(l)} &= \Delta \mathbf{u}^{(kl)} \\ \sigma^{(k)} - \sigma^{(l)} &= \Delta \sigma^{(kl)}, \quad \sigma^{(k)} = T^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

на внеконтактных поверхностях граничным условиям.

Рассматривается случай, когда указанные скачки равны нулю: $\Delta \mathbf{u}^{(kl)} = 0$, $\Delta \sigma^{(kl)} = 0$, т. е. случай идеального контакта, где $A^{(k)}(\partial q; i\omega)$ и $T^{(k)}(\partial q, \mathbf{n}(q); i\omega)$ для каждой области D_k определяются следующими соотношениями:

$$A^{(k)}(\partial q; i\omega) = [A_{ij}^{(k)}(\partial q; i\omega)]_{2 \times 2} \quad (1.4)$$

$$A_{ij}^{(k)}(\partial q; i\omega) = \delta_{ij} \lambda_k(i\omega) \Delta(q) + [\lambda_k(i\omega) + \mu_k(i\omega)] \frac{\partial^2}{\partial x_r(q) \partial x_j(q)}$$

$$T^{(k)}(\partial q; \mathbf{n}(q); i\omega) = [T_{ij}^{(k)}(\partial q, \mathbf{n}(q); i\omega)]_{2 \times 2} \quad (1.5)$$

$$T_{ij}^{(k)}(\partial q, \mathbf{n}(q); i\omega) = \lambda_k(i\omega) \mathbf{n}_r(q) \frac{\partial}{\partial x_j(q)} +$$

$$+ \mu_k(i\omega) \mathbf{n}_j(q) \frac{\partial}{\partial x_r(q)} + \mu_k(i\omega) \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(q)}$$

2. Формулировка задачи для ГЭ области. Регулярные решения уравнения (1.2) можно представить в виде [5]:

$$\begin{aligned} \alpha u_i^{(k)}(p; \omega) &= \int_{\Gamma_k} G_{ji}^{(k)}(q-p; \omega) \sigma_j^{(k)}(q; \omega) d_q \Gamma_k - \\ &- \int_{\Gamma_k} G_{qji}^{(k)}(q, p; \omega) u_j^{(k)}(q; \omega) d_q \Gamma_k \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$p \in D_k; \alpha = 1$$

$$p \in \Gamma_k; \alpha = \xi$$

$$p \in E_2 \setminus (D_k \cup \Gamma_k); \alpha = 0$$

где Γ_k — граница области D_k (контур пластины единичной толщины с основаниями, параллельными координатной плоскости x_1, ox_2); $\xi = 1/2$, если граница гладкая, или точка p лежит на гладком участке кусочно-гладкой границы; $u_j^{(k)}(q; \omega)$, $\sigma_j^{(k)}(q; \omega)$ — компоненты комплексных векторов перемещений и напряжений в k -й области; $G_{ji}^{(k)}(q-p; \omega)$, $G_{qji}^{(k)}(q, p; \omega)$ — соответственно элементы матриц

$$G(q-p; \omega) = |G_{jr}(q-p; \omega)|_{2 \times 2} \quad (2.2)$$

$$G_q(q, p; \omega) = T(\partial q, \mathbf{n}(q); i\omega) G(q-p; \omega) \quad (2.3)$$

где $G(q-p; \omega)$ — матрица фундаментальных решений уравнения (1.2), элемент которой $G_{jr}(q-p; \omega)$ — направленное вдоль оси x_j комплексное перемещение в точке q от действия единичной нагрузки в направлении x_r в точке p .

Здесь и далее принимается независимое суммирование по повторяющимся нижним индексам.

При $p \in \Gamma_k$ уравнения (2.1) представляют граничные интегральные уравнения (ГИУ) краевой задачи для k -й области, где вторые интегралы следует понимать в смысле главного значения.

Наиболее распространенный подход к решению сингулярных интегральных уравнений состоит в сведении их к системе алгебраических уравнений и численном решении последней. Следуя этому подходу, разобьем границу Γ_k на $N^{(k)}$ элементов таким образом, чтобы последние не содержали внутри себя точки негладкости границы, и запишем дискретный аналог (2.1) при $p \in \Gamma_k$:

$$\begin{aligned} \xi u_i^{(k)}(p; \omega) &= \sum_{m=1}^{N^{(k)}} \int_{\Gamma_k^m} G_{ji}^{(k)}(q^m-p; \omega) \sigma_j^{(k)}(q^m; \omega) d_q \Gamma_k - \\ &- \sum_{m=1}^{N^{(k)}} \int_{\Gamma_k^m} G_{qji}^{(k)}(q^m, p; \omega) u_j^{(k)}(q^m; \omega) d_q \Gamma_k \end{aligned} \quad (2.4)$$

где q^m — точки m -го граничного элемента.

Аппроксимируем $u_j^{(k)}$ и $\sigma_j^{(k)}$ в пределах каждого граничного элемента по интерполяционной формуле Лагранжа второго порядка, а сами элементы принимаем линейно изменяющимися между своими крайними (геометрическими) узлами, т. е. субпараметрическими.

Предположим, что граница рассматриваемой области гладкая. Тогда число неизвестных на границе перемещений и напряжений в корректно поставленной задаче будет $4N^{(k)}$ (на границе раздела в качестве неизвестных на этом этапе условно выбираются либо перемещения, либо напряжения). Столько же уравнений получим, если в каждом граничном элементе в двух точках составим соотношение

(2.4). Таким образом, получим систему $4N^{(k)}$ алгебраических уравнений, которую в матричной форме запишем в виде

$$\sum_{m=1}^{N^{(k)}} {}^{(k)}H_{\alpha}^{rm} U_{\alpha}^{(k)m} = \sum_{m=1}^{N^{(k)}} {}^{(k)}G_{\alpha}^{rm} P_{\alpha}^{(k)m} \quad (r = 1, \dots, N^{(k)}) \quad (2.5)$$

$$U_{\alpha}^{(k)m} = \{U_{j\alpha}^{(k)m}\}_{j=1,2}, \quad P_{\alpha}^{(k)m} = \{P_{j\alpha}^{(k)m}\}_{j=1,2}, \quad {}^{(k)}H_{\alpha}^{rm} = [{}^{(k)}h_{\alpha ij}^{rm}]_{i=1,2}^T$$

$${}^{(k)}h_{\alpha ij}^{rm} = 0,5N_{\alpha}(\eta_0) \delta_{ij} \delta_{rm} + J^m \int G_{ij}^{(k)}(q^m(\eta), p^r(\eta_0); \omega) N_{\alpha}(\eta) d\eta$$

$${}^{(k)}G_{\alpha}^{rm} = [{}^{(k)}g_{\alpha ij}^{rm}], \quad {}^{(k)}g_{\alpha ij}^{rm} = J^m \int G_{ij}^{(k)}(q^m(\eta) - p^r(\eta_0); \omega) N_{\alpha}(\eta) d\eta$$

где J^m — якобиан преобразования элемента линии при переходе от заданной к локальной нормированной системе координат η ($\theta = 1, 2$).

Дополнительные сложности могут возникнуть, когда граница имеет негладкости, в нашем случае угловые точки, где поверхностные усилия определены не однозначно, а лишь своими предельными значениями слева и справа по направлению обхода. В этом случае, при некоторых граничных условиях в угловых точках (например, когда заданы только смещения) в системе (2.5) появятся лишние неизвестные.

Известные приемы преодоления этих трудностей основаны на приближенных подходах [6, 7]. Ниже предлагается иной подход к решению граничных уравнений для областей с угловыми точками, позволяющий обойти указанные трудности.

Суть этого подхода состоит в следующем: в зависимости от количества лишних неизвестных системы (2.5) на границе области выбирается соответствующее число дополнительных точек коллокации (дополнительные точки наблюдения), не совпадающих с угловыми узлами.

Размещение дополнительных точек коллокации, как, впрочем, и основных, вне угловых точек избавляет нас от излишних сложностей при вычислении разрывной и сингулярной составляющих особых интегралов. При этом численный эксперимент показал, что для хорошей обусловленности системы (2.5) следует располагать эти точки на расстоянии 0,01—0,05 длины элемента от угловой точки. Этого оказывается достаточно и для линейной независимости уравнений вида (2.4), записываемых в выбранных таким образом точках с двух сторон от угла.

3. Формулировка задачи для КЭ области. Пусть область Q представлена совокупностью плоских изопараметрических конечных элементов (КЭ). Функцию перемещений u аппроксимируем на пространстве базисных функций (функций формы), определенных лишь в пределах отдельного КЭ [8—10]:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_e} N_j(\eta_1, \eta_2) U_j^i \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

где u_i — перемещение по направлению i точки с локальными координатами (η_1, η_2) , n_e — количество узлов КЭ, N_j — функция формы j -го узла КЭ, U_j^i — перемещение j -го узла по направлению i . Такая же аппроксимация задана для координат x_1 и x_2 КЭ:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n_e} N_j(\eta_1, \eta_2) X_j^i \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

где x_i — значения глобальных координат для точки, имеющей локальные координаты (η_1, η_2) , X_j^i — координаты x_i для узла j .

Уравнения МКЭ для рассматриваемой задачи имеют вид

$$K^{(l)} U^{(l)} = F^{(l)}$$

$$K^{(l)} = K_1^{(l)} + iK_2^{(l)}, \quad K_1^{(l)} = K_{st}^{(l)} - \omega^2 M^{(l)} \quad (3.3)$$

где $K^{(l)}$ — комплексная матрица динамической жесткости; $K_{st}^{(l)}$ — статическая матрица жесткости (МЖ) системы, полученная для материала с модулем упругости, равным действительной части комплексного модуля $E_i(i\omega)$, а $K_2^{(l)}$ — МЖ системы с модулем упругости, равным мнимой части комплексного модуля $E_i(i\omega)$ (1.1); $U^{(l)}$ — комплексные амплитудные значения узловых перемещений; $F^{(l)}$ — комплексные амплитуды вектора узловых сил; $M^{(l)}$ — матрица масс.

Пусть конструкция, занимающая область Q , армирована. Представим арматуру в виде отдельных стержней, имеющих абсолютное сцепление с основным материалом. В этом случае статическая матрица жесткости КЭ определяется по формуле [11, 12]:

$$K_{st}^{(l)} = \int_{\Omega_c} B^T D^{(l)} B \det J d\Omega_c + \sum_{i=1}^{m_s} a_i \int_{R_i} B^T (D_{st}^{(l)} - D^{(l)}) B \det J dR \quad (3.4)$$

$$B = \|B_1 B_2 \dots B_{n_c}\|, \quad B_i = \begin{vmatrix} \{1\ 0\} \times \mathbf{v}_i & 0 \\ 0 & \{0\ 1\} \times \mathbf{v}_i \\ \{0\ 1\} \times \mathbf{v}_i & \{1\ 0\} \times \mathbf{v}_i \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v}_i = J^{-1} \begin{vmatrix} \partial N_i / \partial \eta_1 \\ \partial N_i / \partial \eta_2 \end{vmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial \eta_1 & \partial x_2 / \partial \eta_1 \\ \partial x_1 / \partial \eta_2 & \partial x_2 / \partial \eta_2 \end{vmatrix}$$

где Ω_c — объем КЭ, n_c — количество узлов в КЭ, J — матрица Якоби, $D^{(l)}$ и $D_{st}^{(l)}$ — матрицы упругости основного материала и материала армирующих стержней соответственно, a_i — площадь i -го стержня, m_s — количество стержней в КЭ.

Матрица масс армированного КЭ также определяется раздельным интегрированием по объему основного материала и армирующих стержней

$$m_c^{(l)} = \int_{\Omega_c} N^T \rho^{(l)} N \det J d\Omega_c + \sum_{i=1}^{m_s} a_i \int_{R_i} N^T (\rho_i^{(l)} - \rho^{(l)}) N \det J dR \quad (3.5)$$

$$N = \begin{vmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_{n_c} & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_{n_c} \end{vmatrix}$$

где $\rho_i^{(l)}$ — плотность, R_i — длина i -го стержня.

Интегралы (3.4) и (3.5) вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса. Этот прием используется давно и довольно широко для изопараметрических КЭ [8, 10], поэтому окончательные формулы здесь не приводятся. Отметим, что в данном случае КЭ имеют 8 узлов. Функции формы — полиномы сирендипова семейства [8], дающие на стороне КЭ аппроксимацию перемещений, совпадающую с принятой для граничных элементов.

4. Формулировка комбинированного ГЭ — КЭ метода. Для того, чтобы объединить системы МГЭ (2.5) и МКЭ (3.3), необходимо использовать контактные

условия (1.3). Введем матрицу c , связывающую узловые напряжения ε и узловые силы f на поверхности контакта

$$f = c\varepsilon \quad (4.1)$$

$$c = \int_{-1}^1 N^T N \varepsilon \det J d\eta \quad (4.2)$$

Учитывая принятую аппроксимацию, получим матрицу c в следующем замкнутом виде

$$c = \frac{z_j}{2} \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{vmatrix}, \quad c_i = \begin{vmatrix} a_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_i \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2) \quad (4.3)$$

где $a_1 = 1/6$, $a_2 = 2/3$, z_j — длина j -й контактной грани.

Запишем объединенную систему линейных алгебраических уравнений МГЭ и МКЭ:

$$\begin{vmatrix} K_r & K_{rs} & 0 & 0 \\ K_{sr} & K_{ss} & c & 0 \\ 0 & H_s & -G_s & H_e \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_r^f \\ u_s \\ \varepsilon_s \\ u_e^b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P^f \\ 0 \\ G_e \varepsilon_e \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

где индексы s и e обозначают соответственно контактные и внеконтактные поверхности, а f и b — указывают принадлежность соответственно к конечно-элементной и граничноэлементной областям.

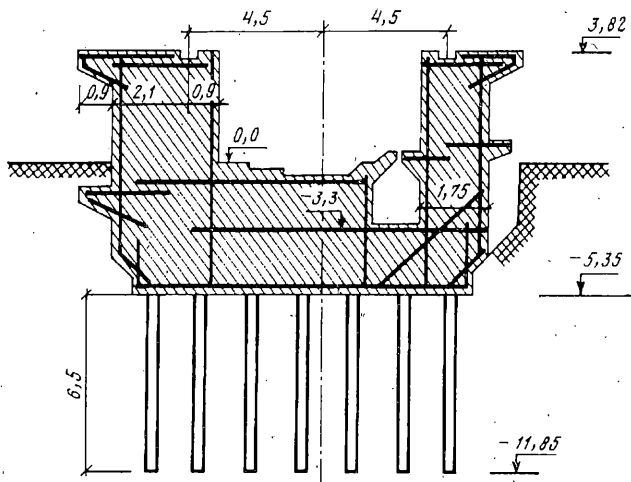
Матрица коэффициентов при неизвестных уравнениях (4.4) является вещественной и несимметричной. Несимметрия создает неудобства вычислительного характера, но не влияет на точность решения. Однако, эта матрица является плохо обусловленной из-за значительной разности порядков диагональных элементов матрицы, что, как известно, приводит к большим погрешностям решений из-за ошибок округления. В данном случае, как показали первые тесты, наблюдается сильная неустойчивость решения при перемещении точек коллокации. Кроме того, примеры для симметричных областей с симметричными граничными условиями дают несколько несимметричное решение даже при симметричном расположении точек коллокации. Для улучшения решения было применено нормирование строк матрицы по способу, предложенному в [13]. Он заключается в умножении обеих частей системы (4.4) на масштабирующую диагональную матрицу $L = \text{diag}(l_1 \dots l_n)$ с элементами

$$l_m = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}| / \sum_{j=1}^n |A_{mj}| \quad (4.5)$$

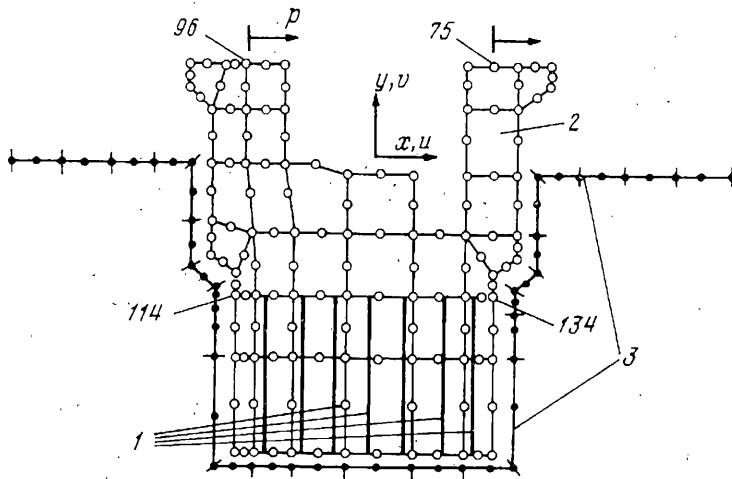
Решение тестовых примеров показывает, что этот прием приводит к улучшению решения. В частности, в симметричных примерах решение становится симметричным даже при несимметричном расположении точек коллокации.

5. Примеры. 1. *Колебания фундамента под агрегат аргоно-кислородного рафинирования стали фирмы KRUPP.*

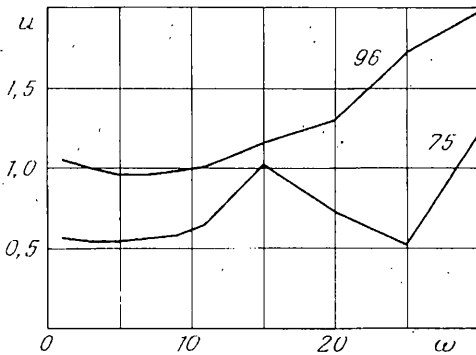
Фундамент представляет собой массивную корытообразную, протяженную в плане конструкцию из монолитного железобетона на свайном основании (фиг. 1). Расчетная нагрузка в виде горизонтальных сосредоточенных сил представляет собой широкополосный случайный процесс типа белого шума. Нагрузка действует на уровне верха конструкции в поперечном направлении. Спектр Фурье этих сил был определен на основе экспериментальных данных ($P = 10$ кН/м в диапазоне



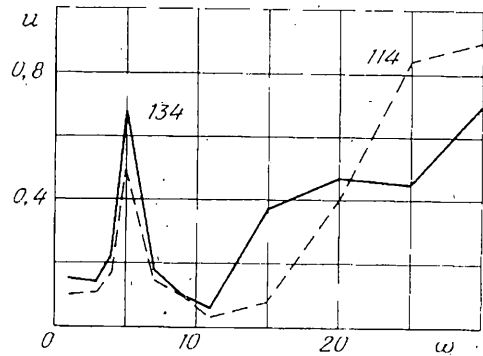
Фиг. 1



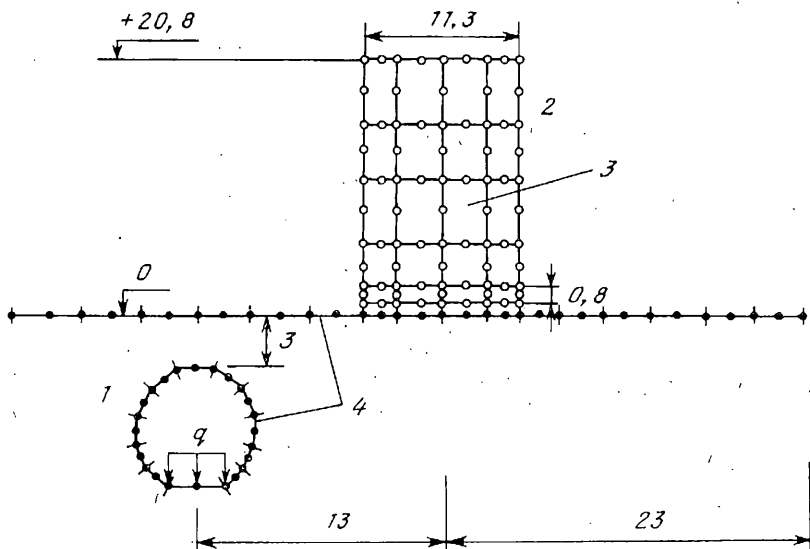
Фиг. 2



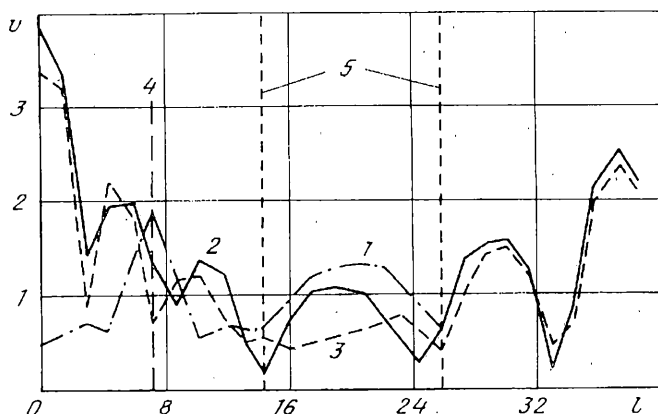
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

частот 2—30 Гц). Приведенные динамические характеристики грунта определены согласно геологическому разрезу площадки строительства ($E = 262,5$ МПа, $\nu = 0,3$, $\rho = 1,8$ т/м³, $\gamma = 0,1$). Расчетная схема фундамента и свайного поля (1) с примыкающим грунтом состоит из 33 изопараметрических 8-узловых КЭ (2), а основание — 26 субпараметрических ГЭ (3), из них 16 контактных (фиг. 2).

В результате расчета были получены спектры горизонтальных и вертикальных перемещений конструкции и поверхности грунта. На фиг. 3, 4 представлены спектры горизонтальных u [мкм] перемещений верха и подошвы фундамента (ω — частота колебаний в Гц).

2. Колебания здания, вызванные движением поездов метрополитена.

Рассматриваются колебания многоэтажного здания высотой 21 м. Расчетная схема с геометрическими и физическими характеристиками представлена на фиг. 5, где 1 — тоннель ($q = Qe^{i\omega t}$, $Q = 4 \cdot 10^{-2}$ МПа), 2 — здание, 3 — конечные элементы, 4 — граничные элементы; все линейные размеры даются в метрах. Как и в первом примере, приведенные динамические характеристики грунта были определены с учетом реальной геологической ситуации на площадке ($E = 213,9$ МПа, $\nu = 0,3$, $\rho = 1,8$ т/м³, $\gamma = 0,2$). Здание моделируется в виде

сплошной прямоугольной области, приведенные динамические характеристики которой вычисляются исходя из реальных динамических свойств здания, определенных экспериментально ($E = 85,6$ МПа, $\nu = 0,1$, $\rho = 0,31$ т/м³, $\gamma = 0,1$). Спектральные характеристики действующей нагрузки от движения поезда метрополитена также были определены на основе известных экспериментальных данных.

На фиг. 6 приведены полученные в результате расчета амплитуды вертикальных v [мкм] перемещений поверхности грунта для трех случаев: при отсутствии здания (кривая 1), со зданием на обычном фундаменте (кривая 2), со зданием на сплошной железобетонной фундаментальной плите (кривая 3) толщиной 0,8 м (l — расстояние в метрах). Вариантный расчет был выполнен для оценки эффекта взаимодействия и выяснения целесообразности применения сплошной фундаментальной плиты для снижения уровня вибраций в здании (на фиг. 6 прямая 4 соответствует оси тоннеля, а две вертикальные прямые 5 — границам здания).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kobayashi S., Kawakami T. Application of BE — FE combined method to analysis of dynamic interactions between structures and viscoelastic soil//Boundary Elements./Proc. 7th Int. Conf., Lake Como, Italy, 1985. Berlin, e. a.; Springer, 1985. P. 6.3—6.12.
2. Estorff O. von, Prubucki M. J. Dynamic response in the time domain by coupled boundary and finite elements./Comput. Mech. 1990. V. 6. № 1. P. 35—46.
3. Цейтлин А. И., Андреев О. О., Смолянин А. Г., Саркисян А. Г. Применение методов граничных и конечных элементов к динамическому расчету сооружений, взаимодействующих с грунтом//Czech. Conf. with Intern. Particip. DYNAMICS OF STRUCTURES '89. Karlovy Vary, Czechoslovakia. V. 1. P. 61—64.
4. Цейтлин А. И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. М.: Стройиздат, 1984. 334 с.
5. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Бицелешвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
6. Бенерджи П., Баттерфильд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
7. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел А. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
9. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
10. Бате Л., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 447 с.
11. Colville J., Abbasi J. Plane stress reinforced concrete finite elements./J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. 1974. V. 100. № 5. P. 1067—1083.
12. Кудашов В. И., Устинов В. П. Расчет пространственных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности и трещинообразования//Строит. механика и расчет сооружений. 1981. № 4. С 6—10.
13. Шайдуров В. В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989. 288 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.VIII.1994