

УДК 539.3

© 1996 г. В.В. ПАРЦЕВСКИЙ

**ОБ ИЗГИБЕ ОРТОТРОПНОЙ
СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНЫ С РАССЛОЕНИЕМ**

Механике разрушения композитных слоистых элементов конструкций с расслоениями посвящена обширная литература. В.В. Болотиным разработана многопараметрическая теория разрушения [1–3], предложена классификация трещин (равновесные, субравновесные, неравновесные; устойчивые, неустойчивые), сформулированы классификационные критерии. Основной областью применения теории являются композиты. В работе [4] на базе теории исследована произвольно расположенная круговая трещина расслоения в трансверсально изотропной слоистой пластине произвольной геометрии при изгибе. Аналитически получены условия роста такой трещины.

Здесь в приближении Кирхгофа рассмотрена задача о прямоугольном в плане расслоении в ортотропной пластине при изгибе. Исследовано влияние степени анизотропии на условия развития трещины в статике и динамике.

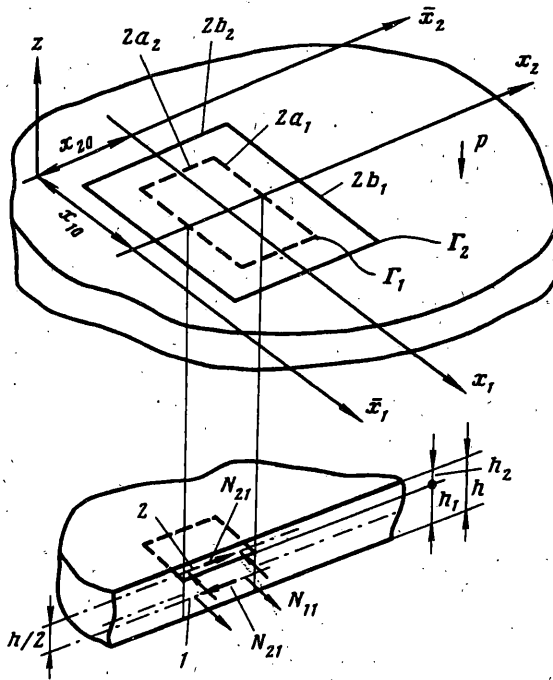
1. На фиг. 1 показана произвольная в плане ортотропная пластина с произвольными условиями на контуре под нагрузкой $p(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Область расслоения полагаем прямоугольной $\omega = 2a_1 \times 2a_2$, ориентированной вдоль главных осей упругости \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Плоскость расслоения параллельна лицевым плоскостям, части 1 и 2 в области расслоения имеют те же упругие свойства, что и остальная область.

Функцию прогиба пластины без расслоения $W(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ – невозмущенное решение, будем считать известным. Введем локальную систему координат x_1, x_2 с началом в центре расслоения. В [4] было показано, что в трансверсально изотропной пластине возмущение, вносимое расслоением, ощутимо лишь в ограниченной области Ω вокруг ω (предполагается, что ω достаточно далеко расположена от границы пластины). Причем при относительно небольших градиентах W различие невозмущенного и возмущенного решений вне $\Omega \sim \rho^4$, где ρ – отношение характерных размеров ω и Ω . Здесь введем $\Omega = 2b_1 \times 2b_2$, так, чтобы $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \zeta$, и будем искать функцию прогиба возмущенного решения $w(x_1, x_2)$ в этой области с цилиндрическими жесткостями $D_j = E_j h^3 / 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$ вне ω и $\bar{D}_j = E_j (h_1^3 + h_2^3) / 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$ внутри ω . На контуре Γ_2 (фиг. 1) $w(x_1, x_2)$ должна удовлетворять двум граничным условиям, на Γ_1 должны быть выполнены два условия непрерывности обобщенных перемещений, например, для $x_1 = a_1$: w и $\partial w / \partial x_1$, а также два условия на обобщенные силы [4]:

$$M_{11}^- + N_{11} \frac{h}{2} = M_{11}^+, Q_1^{*-} + \frac{h}{2} \frac{\partial N_{21}}{\partial x_2} = Q_1^{*+} \quad (x_1 = a_1) \quad (1.1)$$

$$M_{11}^- = \bar{D}_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), M_{11}^+ = D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right),$$

$$Q_1^{*-} = \frac{\partial M_{11}^-}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial M_{12}^-}{\partial x_2}, Q_1^{*+} = \frac{\partial M_{11}^+}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial x_2}$$



Фиг. 1

$$M_{12}^+ = \frac{G_{12}h^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad M_{12}^- = \frac{G_{12}(h_1^3 + h_2^3)}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$N_{11} = A_1^{(1)}(\epsilon_{11} + \nu_{12}\epsilon_{22}), \quad N_{12} = 2G_{12}h_1\epsilon_{12}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad A_1^{(1)} = \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

Здесь u_α – перемещение точек срединной плоскости слоя 1 в расслоении, остальные обозначения общепринятые. Кроме того, перемещения точек срединной поверхности u_α слоя 1 связаны с функцией прогиба

$$u_\alpha = \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \quad (x_1 = \pm a_1, \quad x_2 = \pm a_2, \quad \alpha = 1, 2) \quad (1.2)$$

В (1.1) использованы очевидные равенства по величине усилий N_{11}, N_{22}, N_{12} в срединных плоскостях слоев 1 и 2.

Функции перемещений возмущенного решения будем искать методом Ритца на базе принципа Лагранжа

$$w(x_1, x_2) = W(x_1, x_2) + \sum_j \sum_k W_{jk} \sin \eta_{j1} \sin \eta_{k2} \quad (x_1, x_2 \in \Omega)$$

$$u_\alpha = \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \sum_j \sum_k U_{jk}^{(\alpha)} \sin \xi_{j1} \sin \xi_{k2} \quad (x_1, x_2 \in \omega)$$

$$\eta_{j\alpha} = \frac{\pi j}{2} \left(\frac{x_\alpha}{b_\alpha} + 1 \right), \quad \xi_{j\alpha} = \frac{\pi j}{2} \left(\frac{x_\alpha}{a_\alpha} + 1 \right) \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.3)$$

Здесь W_{jk} , $U_{jk}^{(\alpha)}$ – неизвестные коэффициенты разложений.

Решения (1.3) удовлетворяют кинематическим условиям (1.2), условиям стыковки по прогибам и вторым производным по нормали с невозмущенным решением W на контуре. Остаются неудовлетворенными условия стыковки для $\partial w / \partial n$ и Q_n^* на Γ_2 (n – нормаль к Γ_2) и статические условия стыковки на Γ_1 (1.1). Выполнения условий на Γ_2 следует ожидать с погрешностью ζ^4 аналогично [4], условий (1.3) – в силу принципа Лагранжа с ростом числа членов в рядах (1.3).

Вычислим полную энергию пластины в Ω :

$$\mathcal{E} = U + \Pi, \quad \Pi = \iint_{\Omega} p w dx_1 dx_2$$

$$U = \frac{1}{2} D_1 \iint_{\Omega} \Phi_{\alpha} dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} D_1 (1 - \gamma) \iint_{\omega} \Phi_{\alpha} dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} A_1 h_1 h_2^{-1} \iint_{\omega} \Phi_{\alpha} dx_1 dx_2$$

$$\Phi_{\alpha} = \kappa_{11}^2 + \chi \kappa_{22}^2 + 2\nu_{12} \kappa_{11} \kappa_{22} + 2\beta \kappa_{12}^2$$

$$\Phi_{\alpha} = \varepsilon_{11}^2 + \chi \varepsilon_{22}^2 + 2\nu_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2\beta \varepsilon_{12}^2$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}, \quad \chi = E_2 / E_1, \quad \gamma = \bar{D}_1 / D_1$$

$$\beta = 2G_{12} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) E_1^{-1}, \quad A_1 = E_1 h / (1 - \nu_{12} \nu_{21}). \quad (1.4)$$

Условия минимума энергии \mathcal{E} :

$$\partial \mathcal{E} / \partial W_{jk} = 0, \quad \partial \mathcal{E} / \partial U_{jk}^{(\alpha)} = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots; \alpha = 1, 2)$$

приводят к системе алгебраических уравнений

$$\sum_j \sum_k a_{ijk} X_{jk} = F_{iq} \quad (i + q, j + k = \overline{1, m})$$

$$X_{jk} = \underbrace{(W_{11}, W_{12}, \dots)}_{n_1}, \underbrace{(U_{11}^{(1)}, U_{12}^{(1)}, \dots)}_{n_2}, \underbrace{(U_{11}^{(2)}, U_{12}^{(2)}, \dots)}_{n_3}$$

$$m = n_1 + n_2 + n_3, \quad m_1 = n_1 + n_2 \quad (1.5)$$

Матрица жесткости a_{ijk} , составленная по парам $iq \times jk$, симметрична по этим парам

$$a_{ijk} = \delta_{ij} \delta_{qk} \left(\frac{j^4}{a_1^4} + \chi \frac{k^4}{a_2^4} + 2(\nu_{12} + \beta) \frac{j^2 k^2}{a_1^2 a_2^2} \right) \quad (j + k, i + q = \overline{1, n_1})$$

$$a_{ijk} = -\frac{48h_1 \zeta_{ijk}}{\pi^3 h^2 a_1} \left(\frac{i^2}{a_1^2} + \nu_{12} \frac{q^2}{a_1^2} + \beta \frac{q^2}{a_1 a_2} \right) C_{ij} S_{qk} \quad (i + q = \overline{1, n_1}; j + k = \overline{n_1 + 1, m_1})$$

$$a_{ijk} = -\frac{48h_1 \zeta_{qjk}}{\pi^3 h^2 a_2} \left(\chi \frac{q^2}{a_2^2} + \nu_{12} \frac{i^2}{a_1 a_2} + \beta \frac{i^2}{a_1 a_2} \right) C_{qk} S_{ij} \quad (i + q = \overline{1, n_1}; j + k = \overline{n_1 + 1, m_1})$$

$$a_{ijk} = \frac{48h_1 \delta_{iq} \delta_{qk}}{\pi^2 h^2 h_2^2 \zeta^2} \left(\frac{j^2}{a_1^2} + \beta \frac{k^2}{2a_2^2} \right) \quad (i + q; j + k = \overline{n_1 + 1, m_1}) \quad (1.6)$$

$$a_{ijk} = \frac{24h_1 (2\nu_{12} + \beta)}{\pi^4 h^2 h_2^2 \zeta^2 a_1 a_2} i_{ijk} (1 - \delta_{ij})(1 - \delta_{qk})(1 - (-1)^{i+j})(1 - (-1)^{q+k})$$

$$(i + q = \overline{n_1 + 1, m_1}; j + k = \overline{m_1 + 1, m})$$

$$a_{ijk} = \frac{48h_1\delta_{iq}\delta_{qk}}{\pi^2 h^2 h_2 \zeta^2} \left(\chi \frac{k^2}{a_2^2} + \beta \frac{j^2}{2a_1^2} \right) (i+q, j+k = \overline{m_1+1, m})$$

$$F_{iq} = -\frac{4}{\pi^2 a_1 a_2} \iint_{\Omega} \left\{ \bar{p} - \left(\frac{i^2}{a_1^2} + \nu_{12} \frac{q^2}{a_2^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \left(\chi \frac{q^2}{a_2^2} + \nu_{12} \frac{i^2}{a_1^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right\} \sin \eta_{i1} \sin \eta_{q2} +$$

$$+ 2\beta i q \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \cos \eta_{i1} \cos \eta_{q2} \Big\} dx_1 dx_2 \quad (i+q = \overline{1, n_1})$$

$$F_{iq} = -\frac{24h_1}{\pi^3 h^2 a_1^2 a_2} \iint_{\omega} \left[i \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right) \cos \xi_{i1} \sin \xi_{q2} + \beta \frac{q a_1}{a_2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \sin \xi_{i1} \cos \xi_{q2} \right] dx_1 dx_2$$

$$(i+q = \overline{n_1+1, m_1})$$

$$F_{iq} = -\frac{24h_1}{\pi^3 h^2 a_1 a_2^2} \iint_{\omega} \left[\chi q \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right) \sin \xi_{i1} \cos \xi_{q2} + \right.$$

$$\left. + \beta \frac{i a_2}{a_1} \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \cos \xi_{i1} \sin \xi_{q2} \right] dx_1 dx_2$$

$$(i+q = \overline{m_1+1, m})$$

$$\bar{p} = \frac{4p}{\pi^2 D_1 \zeta^2}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j=k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

$$S_{jk} = \frac{\sin \varphi_j^- + (-1)^k \sin \varphi_j^+}{j^2 \zeta^2 - k^2}, \quad C_{jk} = \frac{\cos \varphi_j^- - (-1)^k \cos \varphi_j^+}{j^2 \zeta^2 - k^2}, \quad \varphi_j^{\pm} = \frac{\pi j (\zeta \pm 1)}{2}$$

Заметим, что первые n_1 уравнений, если в них положить $U_{jk}^{(\alpha)} = 0$, дают асимптотически точное решение задачи об изгибе ортотропной опертой пластины без расслоения, нагруженной $p(x_1, x_2)$ и граничными изгибающими моментами невозмущенного решения.

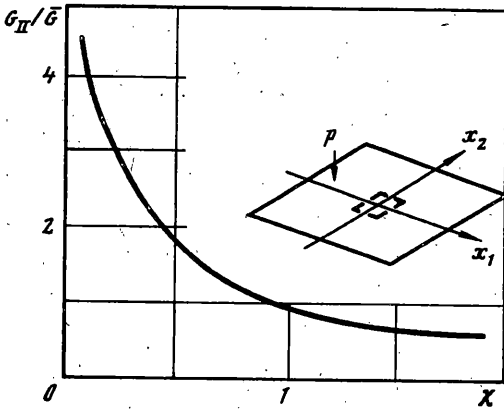
2. Исследуем один из возможных механизмов разрушения пластины с дефектом типа расслоения – развитие этого расслоения в своей плоскости. В композитных пластинах слоистой структуры поверхности раздела слоев являются слабыми – этим и объясняется склонность их к расслоениям.

Положим, что трещина расслоения везде закрыта. Тогда условия ее роста можно записать в виде

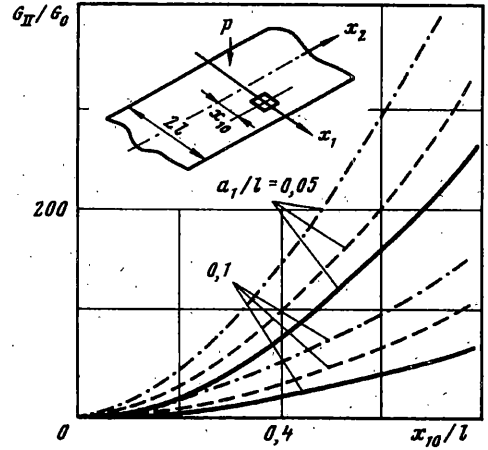
$$f(G_{II}, G_{III}) = G_{IIc}$$

Здесь G_{II} , G_{III} – обобщенные силы продвижения трещины [2] или скорости высвобождения энергии деформации при росте трещины поперечного и продольного сдвига (моды II и III соответственно), f – критериальная функция, G_{IIc} – вязкость разрушения по моде II.

Параметры G_{II} , G_{III} могут быть вычислены в точке фронта трещины [5], или в интегральной форме $G_{\alpha} = \partial U / \partial l_{\alpha}$ (l_{α} – некоторый геометрический параметр трещины). Если известно точное, в рамках применяемой теории, решение задачи, то оба подхода дают одинаковый результат, в случае приближенного решения только интегральная форма дает надежную оценку G_{α} [6]. В данном случае быстрой сходимости для обобщенных сил на фронте трещины ожидать не приходится в силу примененного



Фиг. 2



Фиг. 3

метода Ритца и вследствие эффекта Гиббса, т. к. обобщенные силы разрывны на Γ_1 .

В качестве тестового примера рассмотрим квадратное в плане $\omega = 2a_1 \times 2a_1$ расслоение в центре круговой трансверсально изотропной пластины, защемленной по контуру, в условиях осесимметричного изгиба давлением $p = \text{const}$. Здесь

$$W(r) = -p(64D)^{-1}(R^2 - r^2)^2, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad U_{jk}^{(1)} = U_{jk}^{(2)}, \quad W_{jk} = W_{kj}$$

При вычислениях было принято $\zeta = a_1 / b_1 = 1/3$, $h_1 = h_2$. Сначала исследовалась сходимость интеграла энергии деформации (1.4) в зависимости от числа удерживаемых членов в разложениях (1.3). Вычисления проводились до $n_1 = 12$, $n_2 = 10$ (соответственно число коэффициентов W_{jk} , U_{jk}). Для обеспечения погрешности 0,05 оказалось достаточно ограничиться $n_1 = 9$, $n_2 = 6$.

Скорость высвобождения энергии деформации на единицу длины фронта трещины вычислялась по формуле

$$G = \frac{1}{8a_1} \frac{U(a_1 + \Delta a_1) - U(a_1)}{\Delta a_1}$$

Здесь принималось $\Delta a_1 = a_1/20$.

Сравнение с результатом G' при круговом расслоении [4] для $r = a_1$ дает $G'/G = 0,86$. Здесь отметим, во-первых, что длины фронтов трещин в сравниваемых вариантах различны ($8a_1$ и $2\pi a_1$), во-вторых, в действительности квадратная в плане трещина растет лишь в серединах сторон, а не по всему контуру. Последнее видно из рассмотрения простого примера вычисления G_1 при отдире пленки от жесткого основания под действием давления в полости $2a_1 \times 2a_1$. Подобный результат получен и в [7] методом конечных элементов.

Влияние степени анизотропии $\chi = E_2/E_1$ иллюстрируется на фиг. 2 на примере вычисления G_{II} в пластине $2c \times 2c$ с квадратным расслоением $2a_1 \times 2a_2$ ($a_1 = a_2$) при $p = \text{const}$ ($a_1/c = 0,1$; $\bar{G} = G_{II}|_{\chi=1}$). Здесь принималось $G_{II} = (U(a_1 + \Delta a_1, a_2) - U(a_1, a_2)) \times (4a_1 \Delta a_1)^{-1}$, $\nu_{12} = 0,2$; $G_{12}/E_1 = 0,1$. Видно, что при прочих равных условиях следует ожидать роста расслоения в направлении оси большей жесткости. В упрощенной постановке без учета Φ_e в (1.4) эта задача рассматривалась в [8].

Анализ соотношений для энергии U (1.4) и вида коэффициентов системы уравнений (1.6) позволяет оценить границы отношения размеров прямоугольного

расслоения при условии равенства G_{II} на границах $x_1 = a_1$ и $x_2 = a_2$. Для прочих равных условий:

$$a_1 / a_2 \in [\chi^{1/4}, \chi^{1/2}].$$

В упомянутой задаче отдира пленки по моде I это отношение близко к $\chi^{1/4}$.

На фиг. 3 приведены результаты вычисления G_{II} в удлиненной в направлении x_2 пластине под равномерной нагрузкой с квадратным в плане расслоением $2a_1 \times 2a_2$ ($a_1 = a_2$, $h_1 = h_2$). Для различных значений a_1/l и степени анизотропии χ показана зависимость G_{II}/G_0 от величины удаления центра расслоения от середины пластины – x_{10} . Сплошные линии соответствуют $\chi = 1$, штриховые – 0,5; штрихпунктирные – 0,25. Через G_0 обозначено G_{II} при $x_{10} = 0$. Максимум G_{II} достигается на стороне отслоения $x_1 = a_1$, ближайшей к границе пластины.

Все выводы о зависимости G от a_1 и от расположения трещины по толщине пластины, сделанные в [4], верны и здесь.

Как и в [4] можно получить решения при импульсном нагружении пластины, полагая $p = 0$ в (1.6) и определяя амплитуду прогиба невозмущенного решения из энергетических соображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Многопараметрическая механика разрушения // В кн.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1984. Вып. 25. С. 12–33.
2. *Болотин В.В.* Разрушение композиционных материалов по типу расслоений // В кн.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1986. Вып. 27. С. 8–20.
3. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 447 с.
4. *Парцевский В.В.* Круговое расслоение в композитной пластине произвольной формы при изгибе // Изв. АН МГТ. 1996. № 1. С. 137–145.
5. *Williams J.G.* On the calculation of energy release rates for cracked laminates // Internat. J. of Fracture. 1988. V. 36. No. 2. P. 101–119.
6. *Парцевский В.В.* Расслоение композитных пластин при изгибе // Механика композитных материалов. 1990. № 6. С. 1047–1050.
7. *Whitcomb J.D., Shivakumar K.N.* Strain – energy release rate analysis of plates with postbuckled delaminations // J. of Composite Mater. 1989. V. 23. No. 7. P. 714–734.
8. *Partsevsky V.V., Speransky M.I., Beliaev S.M.* Delamination at openings in composite plates // Compos. Sci. and Technology. 1992. V. 45. No. 3. P. 229–232.

Москва

Поступила в редакцию
25.XII.1995