МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1996

УДК 624.07:534.1

© 1996 г. В. Д. КЛЮШНИКОВ, К. А. ХВОСТУНКОВ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО СТЕРЖНЯ

Дается точное решение в элементарных функциях для продольных сил самогравитации стержня. Приводятся верхняя и нижняя оценки его критической длины. Сопоставляются результаты различных подходов к задаче об устойчивости упругого самогравитирующего стержня.

В [1] было отмечено, что прямое применение закона тяготения Ньютона к модели упругого стержня, как одномерному самогравитирующему отрезку, приводит к неограниченным значениям осевых сил на его концах. Для устранения такой особенности предложено рассматривать стержень как объемный параллелепипед. Однако вычисление напряженного состояния, а, следовательно, и критической длины такого стержня, проведено не было. Автор ограничился лишь некоторыми качественными выводами.

Указанная особенность для одномерной модели отсутствует при использовании для вычисления гравитационных сил метода потенциала на основе известного уравнения Пуассона. Такой прием был использован в [2]. Исходя из характера распределения проекции на ось z гравитационного взаимодействия $q = (q_x, q_y, q_z)$ малого элемента стержня со всем объемом, производные $\partial q_x/\partial x$ и $\partial q_y/\partial y$ на оси стержня (ось z) полагались пренебрежимо малыми. При этом уравнение Пуассона сводилось к равенству

$$\rho\Delta V = \partial q_z/\partial z = -4\pi G\rho^2$$

и стержень рассматривался как одномерный отрезок с осевой силой q_z, что, в итоге, привело к подозрительно низкой верхней оценке для критической длины L_*. Так для стального стержня сечением 1 мм^2 имеем $L^4 = 42EI\,(\pi G\rho^2 F)^{-1}$, откуда $L_* = 10^2$ м.

Здесь и далее ρ — плотность, G — гравитационная постоянная, F и I — площадь и момент инерции поперечного сечения, E — модуль Юнга.

В [3] был использован метод, не требующий определения докритического напряженного состояния. Такой подход позволил дать конечную верхнюю оценку критической длины стержня, которая на пять порядков превышает таковую в [2]:

$$L^2 = kEI\,(G\rho^2F^2)^{-1}$$

откуда $L_* = 1{,}6\cdot 10^7$ при $k = 72$. При этом, так же как и в [1], стержень рассматривался как одномерный самогравитирующий отрезок.

Однако, как показано ниже, можно довести до конца и в элементарных функциях расчет действующих в стержне сил в трехмерной постановке, намеченный в [1], для использования их в задаче устойчивости как мертвых нагрузок. Для стержня прямоугольного сечения (a, b, L) проекция массовых сил самогравитации на его ось (ось z) получается интегрированием проекций на ось z всех попарных взаимодействий малых элементов стержня.

$$q_z = -G\rho^2 \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx_1 \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy_1 \int\limits_{0}^{L} \frac{(z_1 - z)}{R^3} dz_1 = G\rho^2 (p (L - z) - p (z)) \qquad (1)$$

$$R = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

$$p (t) = a^2 b \ln [(C + b) (C - b)^{-1}] + ab^2 \ln [(C + a) (C - a)^{-1}] -$$

$$- at^2 (\ln [(C + a) (C - a)^{-1}] - \ln [(A + a) (A - a)^{-1}]) -$$

$$- bt^2 (\ln [(C + b) (C - b)^{-1}] - \ln [(B + b) (B - b)^{-1}]) +$$

$$+ 2abt \{\operatorname{arctg} [(C + a + b)/t] - \operatorname{arctg} [(C - a + b)/t] -$$

$$- \operatorname{arctg} [(C + a - b)/t] + \operatorname{arctg} [(C - a - b)/t]\} -$$

$$- 2/3\, a^2 (C - A) - 2/3\, b^2 (C - B) + 2/3\, t^2 (C - A - B + t)$$

$$A = \sqrt{a^2 + t^2}, \quad B = \sqrt{b^2 + t^2}, \quad C = \sqrt{a^2 + b^2 + t^2}$$

В случае квадратного сечения ($a = b$) имеем для $p (t)$:

$$p (t) = a^2 \ln [(D + a) (D - a)^{-1}] - 2at^2 (\ln [(D + a) (D - a)^{-1}] -$$

$$- \ln [(A + a) (A - a)^{-1}]) + 2at^2 \{\operatorname{arctg} [(D + 2a)/t] +$$

$$+ \operatorname{arctg} [(D - 2a)/t] - 2 \operatorname{arctg} [D/t]\} - 4/3a^2 (D - A) + 2/3t^2 (D - 2A + t)$$

$$D = \sqrt{2a^2 + t^2}$$

Тогда выражение для осевой силы будет иметь вид

$$N (z) = \int\limits_{0}^{z} q_z (z)\, dz = G\rho^2 L^4 (Q (\xi) + Q (1 - \xi) - Q (1) - Q (0)) \qquad (2)$$

$$- Q (\xi) = 2/3\, \alpha\xi^3 \{\ln [(\gamma + \alpha) (\gamma - \alpha)^{-1}] - \ln [(\beta + \alpha) (\beta - \alpha)^{-1}]\} -$$

$$- 1/3\, \alpha^4 [2 \ln (\xi + \alpha) + \ln (\xi + \beta)] - 2\alpha^3 \xi \ln [(\gamma + \alpha) (\gamma - \alpha)^{-1}] +$$

$$+ 2/3\, \alpha^4 \{\arcsin [(\gamma + 2\alpha) (\gamma + \alpha)^{-1}/\sqrt{2}\,] + \arcsin [(\gamma - 2\alpha) (\gamma - \alpha)^{-1}/\sqrt{2}\,]\} -$$

$$- 4\alpha^4 \{\operatorname{arctg} [(\xi + \alpha + \gamma)/\alpha] - \operatorname{arctg} [(\xi - \alpha + \gamma] + \operatorname{arctg} [\xi/\gamma]\} +$$

$$+ \alpha^2 \xi^2 \{\operatorname{arctg} [(\gamma + 2\alpha)/\alpha] + \operatorname{arctg} [(\gamma - 2\alpha)/\alpha] -$$

$$- \operatorname{arctg} [\gamma/\xi]\} + \alpha^2 \xi (\gamma - \beta) - 1/3\, \xi^3 (\gamma - 2\beta + \xi)$$

$$\xi = z/L, \quad \alpha = a/L, \quad \gamma = \sqrt{2\alpha^2 + \xi^2}, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 + \xi^2}$$

Будем полагать, что $\alpha << 1$, поэтому, разлагая $Q (\xi)$ по малому параметру α с точностью до α^4, получим, что за исключением торцевых зон, где $\xi << \alpha$ или $1 - \xi << \alpha$ будем иметь

$$N (\xi) = \alpha^4 [\lambda + \ln (\xi (1 - \xi))], \quad \lambda = 2{,}65 \qquad (3)$$

В торцевых зонах, где $\xi << \alpha$ или $1 - \xi << \alpha$, соответственно разложение будет иметь вид

$$N (\xi) = \lambda_1 \alpha^4 \xi, \quad N (\xi) = \lambda_1 \alpha^4 (1 - \xi), \quad \lambda_1 = 3{,}6 \qquad (4)$$

Осевая сила $N(\xi)$ сильно отличается от $N_0(\xi)$ из [2]:

$$N_0(\xi) = 2\pi\alpha^2\xi(1-\xi)$$

Отношение их максимумов составляет

$$N(1/2)/N_0(1/2) = \alpha^2$$

Учитывая это обстоятельство на основе функционала Тимошенко

$$J(v) = \int_0^1 [EI(v'')^2 - N(\xi)(v')^2]\, d\xi$$

задавая функцию прогиба в кинематически допустимом виде

$$v(\xi) = C_1\xi(1-\xi) + C_2\xi^2(1-\xi)^2$$

получаем итоговое выражение для критической длины.

$$L^2 = kEI(G\rho^2F^2)^{-1}$$

где $k=10$. Так для стального стержня сечения $F=1$ мм^2 $L_* = 6{,}6\cdot10^6$ метров, что является оценкой сверху для L_*. Причиной такого различия с результатом из [2] явилось то, что, несмотря на малость поперечного сечения по сравнению с длиной, принятое в [2] указанное выше предположение о пренебрежимой малости величин $\partial q_x/\partial x$ и $\partial q_y/\partial y$, оказывается неприемлемым.

Для оценки значения L_* снизу аппроксимируем график функции $N(z)$ горизонтальной прямой, проходящей через ее максимум, равный $N(L/2)$. Такая прямая отражает характер распределения осевых нагрузок в стержне, нагруженном по торцам силой $P = N(L/2)$, для которого Эйлерова нагрузка равна

$$P = N(L/2) = \pi^2EIL^{-2}$$

Подставляя в это уравнение найденное выше значение для осевой силы в стержне (3) при $\xi = 1/2$, получаем

$$L^2 = kEI(G\rho^2F^2)^{-1}$$

где $k=7{,}8$, что для стального стержня сечения $F=1$ мм^2 дает $L_* = 5{,}6\cdot10^6$ м.

Таким образом, используя подход [1], где стержень рассматривается как трехмерный объект, удается получить всюду ограниченное значение для результирующих сжимающих сил. Отвечающая этим силам как «мертвым» критическая длина определяется выражением

$$L_*^2 = kEI(G\rho^2F^2)^{-1}$$

при $7{,}8 < k < 10$.

Авторы благодарят Д. М. Бениаминова за полезное обсуждение проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феодосьев В. И.* О некоторых необычных примерах устойчивости равновесия упругих систем//Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 130—136.
2. *Клюшников В. Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
3. *Алфутов Н. А., Попов Б. Г.* Устойчивость самогравитирующего стержня//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 177—180.

Москва

Поступила в редакцию
1.III.1994