

УДК 624.07:534.1

© 1996 г. М. САЗГАРАН, В. А. СВЕТЛИЦКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТО-СКРУЧЕННЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ НА КРУЧЕНИЕ

Приводятся уравнения и результаты численного исследования устойчивости сжато-скрученных прямолинейных стержней с учетом начального (до потери устойчивости) скручивания, что ранее не рассматривалось. Показано, что учет начального скручивания стержня влияет на критические значения сил и моментов, что необходимо учитывать при точных расчетах.

В [1, 2] и многочисленных статьях, посвященных исследованию устойчивости сжато-скрученных прямолинейных стержней не учитывалось начальное (до потери устойчивости) скручивание стержня, т. е. считалось, что крутильная жесткость стержня равна бесконечности. Это условие физически неверно, так как для стержней все три жесткости (крутильная и две изгибные) одного порядка. Поэтому вопрос о влиянии начального скручивания стержня на его критическое состояние остался невыясненным. Непрерывно растущие требования к точности расчетов упругих элементов машин и приборов, особенно используемых в механотронных системах приводит к необходимости максимального учета реальных свойств упругих элементов и условий их работы.

Точность и надежность работы механотронных систем [3] полностью зависит от точности и надежности работы ее механических элементов, так как точность и надежность «электронных» элементов очень высока.

Высокая точность расчетов особенно необходима при проектировании оптимальных конструкций, так как определение оптимальных параметров конструкций по «упрощенным» уравнениям может дать далеко не оптимальные значения.

Ограничимся рассмотрением классической задачи об устойчивости сжато-скрученного консольного прямолинейного стержня, имеющего разные изгибные жесткости (фиг. 1). Уравнения равновесия можно получить, как частный случай, из уравнений, приведенных в [4]. Эти уравнения в связанной системе координат $\{e_j\}$ (в безразмерной форме записи) имеют вид

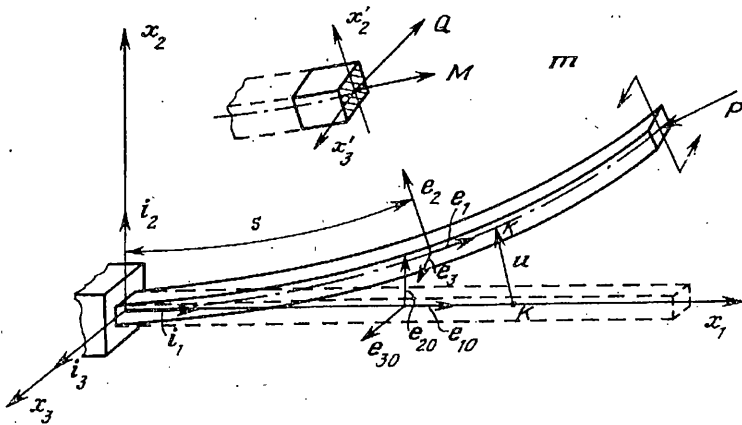
$$\frac{dQ_2}{d\varepsilon} - \frac{Q_{10}^*}{A_{33}} M_3 - \chi_{10}^* Q_3 = 0$$

$$\frac{dQ_3}{d\varepsilon} - \frac{Q_{10}^*}{A_{22}} M_2 - \chi_{10}^* Q_2 = 0$$

$$\frac{dM_2}{d\varepsilon} + \left(\frac{M_{10}}{A_{33}} - \chi_{10}^* \right) M_3 - Q_3 = 0$$

$$\frac{dM_3}{d\varepsilon} + \left(\chi_{10}^* - \frac{M_{10}^*}{A_{22}} \right) M_2 + Q_2 = 0$$

$$\frac{d\vartheta_2}{d\varepsilon} - \frac{M_2}{A_{22}} + \chi_{10}^* \vartheta_3 = 0, \quad \varepsilon = \frac{s}{l} \quad (1)$$



Фиг. 1

$$d\vartheta_3/d\varepsilon - M_3/A_{33} + \kappa_{10}^* \vartheta_2 = 0$$

$$\frac{du_2}{d\varepsilon} - \vartheta_3 - \kappa_{10}^* u_3 = 0, \quad \frac{du_3}{d\varepsilon} + \vartheta_2 + \kappa_{10}^* u_2 = 0$$

$$Q = -Q_{10}^* e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3$$

$$M = M_{10}^* e_1 + M_2 e_2 + M_3 e_3, \quad u = \sum_{j=1}^3 u_j e_j$$

Здесь ε — безразмерная дуговая координата; Q_2, Q_3 и Q_{10}^* — компоненты вектора Q ; M_2, M_3 и M_{10}^* — компоненты вектора M ; ϑ_2, ϑ_3 — углы поворота связанных осей; u_2, u_3 — компоненты вектора перемещений в связанных осях (u_1 при малых смещениях точек осевой линии стержня относительно оси x_1 можно считать равным нулю); $A_{22}(\varepsilon), A_{33}(\varepsilon)$ — безразмерные изгибные жесткости стержня равные

$$A_{22}(\varepsilon) = \frac{\tilde{A}_{22}}{A_{22}(0)}, \quad A_{33}(\varepsilon) = \frac{\tilde{A}_{33}(s)}{A_{33}(0)}, \quad \tilde{A}_{22} = EJ_{x_2}, \quad \tilde{A}_{33} = EJ_{x_3}.$$

(\tilde{A}_i — размерные жесткости, J_{x_2}, J_{x_3} — главные моменты сечения стержня, в общем случае зависящие от дуговой координаты s).

Входящие в систему уравнений (1) величины со звездочкой, характеризуют критическое напряженно-деформированное состояние прямолинейного стержня: M_{10}^* — крутящий момент, Q_{10}^* — сжимающая сила, κ_{10}^* — «скручивание» стержня. Учет начального скручивания стержня ($\kappa_{10}^* \neq 0$) приводит к тому, что после потери устойчивости осевая линия стержня становится пространственной кривой, поэтому получаем восемь (а не четыре) уравнения равновесия.

Моменты M_{10}^* и κ_{10}^* связаны соотношением

$$\kappa_{10}^* = \frac{M_{10}^*}{A_{11}}, \quad A_{11}(\varepsilon) = \frac{\tilde{A}_{11}(s)}{A_{33}(0)}, \quad \tilde{A}_{11} = GJ_k \quad (2)$$

где A_{11} — безразмерная жесткость стержня на кручение. Если считать, что A_{11} бесконечно велика (обычно используемое условие), то κ_{10}^* равно нулю и система (1) распадается на две системы уравнений четвертого порядка, позволяющие

определить критические значения при потере устойчивости в плоскости $x_1 O x_2$ и $x_1 O x_3$. Стержень сжат осевой силой P , и скручен моментом m , поэтому $Q_{10}^* = |P|$ (с учетом знака) и $M_{10}^* = |m|$.

Появляющиеся при потере устойчивости перерезывающие силы Q_2, Q_3 и изгибающие моменты M_2 и M_3 считаются малыми. Осевое усилие Q_1 и крутящий момент M_1 после потери устойчивости равны

$$\tilde{Q}_1 = Q_{10}^* - Q_1, \quad \tilde{M}_1 = M_{10}^* + M_1 \quad (3)$$

Вектор κ характеризует кручение и кривизны осевой линии стержня в двух взаимноперпендикулярных плоскостях [4]. До потери устойчивости он определяется выражением

$$\kappa_0 = \kappa_{10}^* e_{10} \quad (4)$$

После потери устойчивости будем иметь

$$\kappa = \kappa_0 + \Delta\kappa = (\kappa_{10}^* + \Delta\kappa_1) e_1 + \Delta\kappa_2 e_2 + \Delta\kappa_3 e_3 \quad (5)$$

где $\Delta\kappa_i$ — малые приращения кривизн проекций осевой линии на плоскости, связанные с главными осями сечения. Приращения $\Delta\kappa_2$ и $\Delta\kappa_3$ связаны с изгибающими моментами соотношениями

$$\Delta\kappa_2 = M_2/A_{22}, \quad \Delta\kappa_3 = M_3/A_{33} \quad (6)$$

При выводе системы уравнений (1) принято, что произведения (нелинейные слагаемые) $(Q_i \Delta\kappa_k), (M_i \Delta\kappa_k), (\vartheta_i \Delta\kappa_k)$ и $(u_i \mu_k)$ — величины второго порядка малости, которыми можно пренебречь. Система уравнений (1) справедлива как для «мертвых» сил и моментов, так и для «следящих». Характер поведения сил и моментов при потере устойчивости учитывается в крайних условиях.

Систему уравнений (1) можно представить в виде

$$dZ/d\varepsilon + AZ = 0, \quad Z = (Q_2, Q_3, M_2, M_3, \vartheta_2, \vartheta_3, u_2, u_3)^T \quad (7)$$

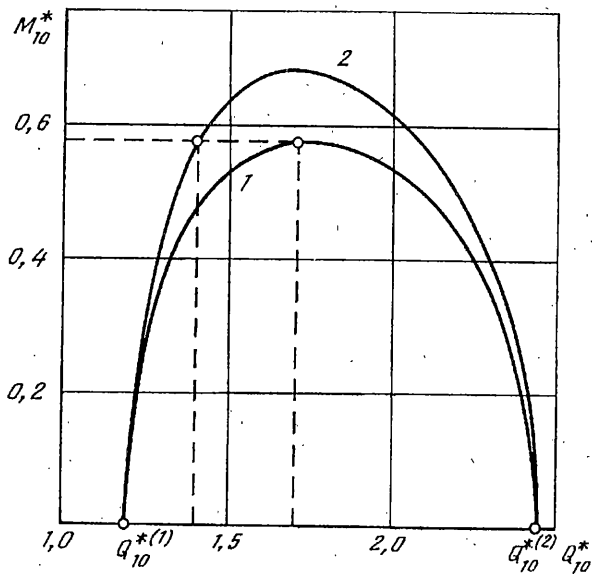
$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\kappa_{10}^* & 0 & -Q_{10}^*/A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{10}^* & 0 & Q_{10}^*/A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \left(\frac{M_{10}^*}{A_{22}} - \kappa_{10}^*\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\left(\frac{M_{10}^*}{A_{33}} - \kappa_{10}^*\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/A_{22} & 0 & 0 & -\kappa_{10}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/A_{33} & \kappa_{10}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\kappa_{10}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \kappa_{10}^* & 0 \end{vmatrix}$$

Решение уравнения (7) имеет вид

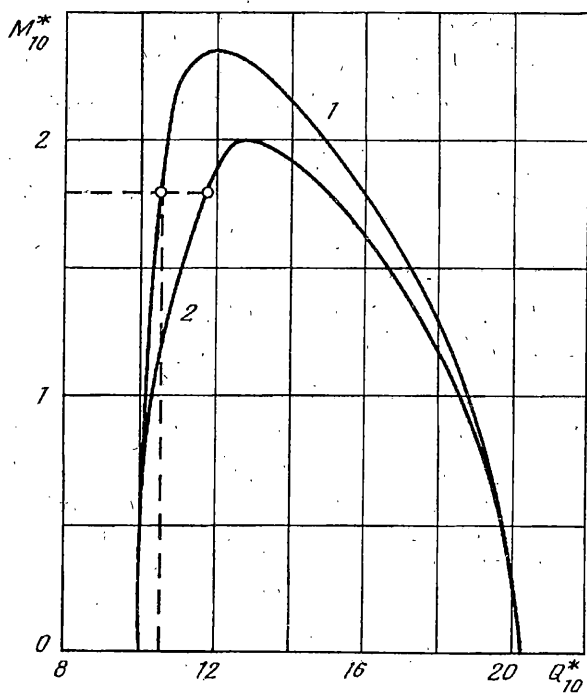
$$Z = K(\varepsilon, Q_{10}^*, M_{10}^*) C, \quad K(0) = E \quad (8)$$

Так как при $\varepsilon = 0$, $Z_5 = Z_6 = Z_7 = Z_8 = 0$, то $c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = 0$.

Для «мертвой» силы и «мертвом» моменте при $\varepsilon = 1$ имеем следующие крайние условия:



Фиг. 2



Фиг. 3

$$Q_2(1) = (Q_{10}^* \cdot e_2(1)) = -Q_{10}^* (i_1 \cdot e_2(1))$$

$$Q_3(1) = (Q_{10}^* \cdot e_3(1)) = -Q_{10}^* (i_1 \cdot e_3(1)) \quad (9)$$

$$M_2(1) = M_{10}^* (i_1 \cdot e_2(1)), \quad M_3(1) = M_{10}^* (i_1 \cdot e_3(1))$$

При малых углах поворота связанных осей матрица преобразования L базисов $\{i_j\}$ и $\{e_j\}$ равна

$$L = \begin{array}{c|ccc} & i_1 & i_2 & i_3 \\ \hline e_1 & 1 & \vartheta_3 & -\vartheta_2 \\ e_2 & -\vartheta_3 & 1 & \vartheta_1 \\ e_3 & \vartheta_2 & -\vartheta_1 & 1 \end{array}$$

Поэтому из (9) получаем

$$Q_2(1) = Q_{10}^* \vartheta_3(1), \quad Q_3(1) = -Q_{10}^* \vartheta_2(1) \quad (10)$$

$$M_2(1) = -M_{10}^* \vartheta_3(1), \quad M_3(1) = M_{10}^* \vartheta_2(1)$$

Из (8) при $\varepsilon = 1$ получаем систему однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^4 (k_{1j} - Q_{10}^* k_{6j}) c_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 (k_{2j} + Q_{10}^* k_{5j}) c_j = 0 \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^4 (k_{3j} + M_{10}^* k_{6j}) c_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 (k_{4j} - M_{10}^* k_{5j}) c_j = 0$$

Задавшись численным значением M_{10}^* , находим Q_{10}^* , при котором определитель системы (11) обращается в нуль. В результате получаем критические значения M_{10}^* и Q_{10}^* . На фиг. 2 приведены графики безразмерных критических значений M_{10}^* и Q_{10}^* для случая, когда начальное скручивание стержня не учитывается ($\chi_{10}^* = 0$ (кривая 1)), и когда начальное скручивание учитывается ($\chi_{10}^* \neq 0$ (кривая 2)), при $A_{22}/A_{33} = 0,5$.

Крутящий момент, как следует из графиков, увеличивает первое критическое значение сжимающей силы и уменьшает второе. Например, (кривая 1) при значении крутящего момента $M_{10}^* = 0,58$ критическое значение силы Q_{10}^* равно 1,7, что на 20% больше критического значения при $\chi_{10}^* \neq 0$.

На фиг. 3 приведены аналогичные графики критических значений M_{10}^* и Q_{10}^* для шарнирного закрепления стержня (при $\varepsilon = 1$). В этом случае, например, с учетом скручивания ($\chi_{10}^* \neq 0$) при моменте $M_{10}^* = 1,8$ критическое значение первой силы Q_{10}^* равно 11,6, в то время как без учета скручивания ($\chi_{10}^* = 0$) значение первой критической силы меньше ($Q_{10}^* = 10,2$) на 12%.

Из приведенных результатов следует, что сжато-скрученный прямолинейный стержень, нагруженный мертвой силой и мертвым (или следящим) моментом, может потерять устойчивость по Эйлеру, т. е. «парадокса Николаи» [1] при численном решении полной системы уравнений нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николаи Е. А. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 285 с.
2. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.
3. Исии Т. Мехатроника. М.: Мир, 1988. 314 с.
4. Светлицкий В. А. Механика стержней. Т. 1. М.: Высш. шк., 1987. 316 с.