

УДК 534.1

© 1996 г. Г. В. ЛЯХОВКА

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛА ПРИ СЛУЧАЙНОЙ ОСЕВОЙ НАГРУЗКЕ

Рассматриваются крутильные колебания упругого вала с постоянными жесткостными и инерционными характеристиками при следующих граничных условиях: свободном верхнем конце и моменте сопротивления, приложенном к нижнему концу вала, при условии, что момент сопротивления зависит от осевой нагрузки, меняющейся случайным образом. Особенностью крутильных колебаний является случайный характер этих колебаний. Для осевой нагрузки и крутильных колебаний определены некоторые числовые характеристики случайного процесса.

1. Задача о крутильных колебаниях упругого вала с учетом случайного характера осевой силы связана с анализом крутильных колебаний вала турбобура. В процессе бурения возникают различные виды колебаний бурильного инструмента: продольные, поперечные, крутильные. Наиболее существенная связь наблюдается между продольными и крутильными колебаниями. Исследованию крутильных колебаний бурильных труб, их связи с продольными колебаниями посвящены работы [1—3].

Рассмотрим задачу о крутильных колебаниях вала турбобура, расчетная механическая модель которого изображена на фиг. 1. Вал находится под действием осевой нагрузки P и момента сопротивления M_s . К валу приложен распределенный по его длине момент двигателя, который с учетом потерь на трение моделируется выражением вида $M_g = m - k\partial\varphi/\partial t$.

Уравнение крутильных колебаний вала имеет вид

$$J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + m - k \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.1)$$

где $\varphi(x, t)$ — угол поворота сечения вала с координатой x в момент времени t , $c = GJ_p$ — жесткость вала на кручение, J — погонный момент инерции вала относительно оси вращения. Предполагается, что J, c — постоянные характеристики вала.

Для решения задачи зададим граничные условия

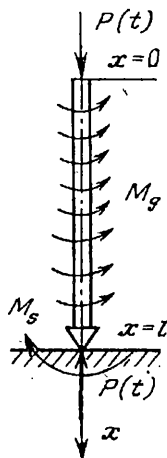
$$c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=l} = -M_s \quad (1.2)$$

В диапазоне малых угловых скоростей момент сопротивления вращению уменьшается с ростом угловой скорости вращения.

Кроме того, увеличение осевой нагрузки вызывает увеличение момента сопротивления [4]. Поэтому для момента сопротивления можно выбрать следующую зависимость от осевой нагрузки P и угловой скорости вала

$$M_s = B + A(P)/(\partial\varphi/\partial t) \quad (1.3)$$

Осевая сила P , равная осевой нагрузке на долото, складывается из двух



Фиг. 1

составляющих. Поскольку долото прижато к забою, то первой составляющей будет статическая составляющая P_0 , равная весу сжатой части колонны буровых труб. Эта составляющая может частично регулироваться в процессе бурения. Вторая составляющая — динамическая составляющая осевой нагрузки $P(t)$ меняется случайным образом

$$P = P_0 + P(t) \quad (1.4)$$

Итак, будем решать дифференциальное уравнение (1.1) крутильных колебаний с граничными условиями вида

$$c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=l} = -B - \frac{A(P)}{\dot{\varphi}(l)} \quad (1.5)$$

2. Представим общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде суммы трех слагаемых

$$\varphi(x, t) = \omega_0 t + Nx^2 + \psi(x, t) \quad (2.1)$$

где первое слагаемое описывает равномерное вращение вала при постоянной осевой нагрузке $P = P_0$, второе слагаемое определяет форму вала при постоянной моментной нагрузке, третье слагаемое характеризует колебания вала около равномерного вращения с угловой скоростью ω_0 .

Принимая во внимание зависимость (1.4), представим коэффициент $A(P)$ в выражении момента сопротивления (1.3) как сумму некоторого среднего значения A_0 и переменной добавки: $A(P) = A_0(1 + Q(t))$. С учетом этого соотношение (1.3) примет вид

$$M_s = B + A_0(1 + Q(t))/\dot{\varphi}(l)$$

или на основании (2.1):

$$M_s = \left(B + \frac{A_0}{\omega_0} \right) - \frac{A_0 \dot{\psi}(l)/\omega_0 - Q(t)}{1 + \dot{\psi}(l)/\omega_0} \quad (2.2)$$

Подставляя общее решение (2.1) в (1.1), (1.5), получим с использованием (2.2) следующую систему алгебраических уравнений для вычисления ω_0 и N :

$$ml = kl\omega_0 + B + A_0/\omega_0 \quad (2.3)$$

$$2Nc + m - k\omega_0 = 0$$

Определение функции $\psi(x, t)$ выделилось в отдельную задачу вида

$$c \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - k \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

$$c \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad c \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{A_0 \dot{\psi}(l)/\omega_0 - Q(t)}{1 + \dot{\psi}(l)/\omega_0}$$

Используя единичную функцию

$$\sigma_1(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_1^*(x, h) \quad (2.5)$$

$$\sigma_1^*(x, h) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < l - h \\ 1/h & \text{при } l - h \leq x \leq l \end{cases}$$

будем вместо задачи (2.4) решать следующую задачу:

$$c \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - k \frac{\partial \psi}{\partial t} + f(t, \psi(l)) \sigma_1(x) = 0$$

$$c \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad c \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \quad (2.6)$$

$$f(t, \psi(l)) = \frac{A_0 \dot{\psi}(l)/\omega_0 - Q(t)}{\omega_0 (1 + \dot{\psi}(l)/\omega_0)}$$

Для решения задачи (2.6) воспользуемся методом разложения по собственным формам колебаний, т. е. представим функцию $\psi(x, t)$ в виде ряда

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (2.7)$$

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \quad (2.8)$$

где $X_n(x)$ — собственные функции соответствующей однородной задачи.

Разложим также по собственным формам колебаний следующие члены:

$$k \frac{\partial \psi}{\partial t} - f \sigma_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \theta_n(t) \quad (2.9)$$

Для определения функций $\theta_n(t)$ умножим обе части выражения (2.9) на X_n и проинтегрируем по длине вала. Тогда с учетом условия ортогональности собственных функций получим систему уравнений для определения $\theta_n(t)$:

$$\theta_0 = k \dot{T}_0 - f/l \quad (2.10)$$

$$\theta_n = k \dot{T}_n - (-1)^n (2/l) f \quad (n \neq 0)$$

Чтобы найти $T_n(t)$ подставим решение (2.7) в (2.6). На основании соотношений (2.9), (2.10) имеем

$$\ddot{T}_0 + \frac{k}{J} \dot{T}_0 = \frac{f}{Jl} \quad (2.11)$$

$$\ddot{T}_n + \frac{k}{J} \dot{T}_n + \Omega_n^2 T_n = \frac{2(-1)^n}{Jl} f \quad (n \neq 0)$$

$$\Omega_n^2 = \lambda_n^2 c/J, \quad \lambda_n = \pi n/l$$

Произведем замену $\dot{T}_0/\omega_0 = \dot{y}_0 + \varepsilon$, $\dot{T}_n/\omega_0 = \dot{y}_n$, тогда функции T_k примут вид

$$T_0 = \omega_0 (b_0 + y_0 + \varepsilon t) \quad (2.12)$$

$$T_n = \omega_0 (b_n + y_n) \quad (n \neq 0)$$

причем параметры ε и b_n выберем следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{A_0}{lk\omega_0^2}, \quad b_n = (-1)^n \frac{2A_0}{Jl\omega_0^2\Omega_n^2} \quad (2.13)$$

где ε — безразмерный малый параметр, который меняется от 0,025 до 0,176 при изменении P_0 от 100 до 180 кН.

Подставим (2.12) в (2.11). Ограничиваясь первыми двумя уравнениями, получим

$$\ddot{y}_0 + \frac{k}{J} \dot{y}_0 = -\frac{k}{J} \varepsilon \frac{1 + Q(t)}{1 + \varepsilon + \dot{y}_0 - \dot{y}_1} \quad (2.14)$$

$$\ddot{y}_1 + \frac{k}{J} \dot{y}_1 + \Omega_1^2 y_1 = \frac{2k}{J} \varepsilon \frac{1 + Q(t)}{1 + \varepsilon + \dot{y}_0 - \dot{y}_1}$$

Будем искать решение системы (2.14) в виде рядов по степеням ε :

$$y_0 = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots \quad (2.15)$$

$$y_1 = \varepsilon w_0 + \varepsilon^2 w_1 + \varepsilon^3 w_2 + \dots$$

где u_i, w_i — неизвестные функции времени.

Разложим правые части уравнений (2.14) в ряд по степеням малого параметра

$$\frac{1}{1 + \varepsilon + \varepsilon(\dot{u}_0 - \dot{w}_0) + \varepsilon^2(\dot{u}_1 - \dot{w}_1) + \dots} = 1 - \varepsilon(1 + \dot{u}_0 - \dot{w}_0) + \varepsilon^2[(1 + \dot{u}_0 - \dot{w}_0)^2 - (\dot{u}_1 - \dot{w}_1)] + \dots$$

Подставляя (2.15) в (2.14) и сравнивая слагаемые при ε , получим систему дифференциальных уравнений для определения u_0, w_0

$$\ddot{u}_0 + \frac{k}{J} \dot{u}_0 = -\frac{k}{J} (1 + Q(t)) \quad (2.16)$$

$$\ddot{w}_0 + \frac{k}{J} \dot{w}_0 + \Omega_1^2 w_0 = \frac{2k}{J} (1 + Q(t))$$

Приравнявая коэффициенты при ε^2 , приходим к следующей системе:

$$\ddot{u}_1 + \frac{k}{J} \dot{u}_1 = \frac{k}{J} (1 + Q(t)) (1 + \dot{u}_0 - \dot{w}_0) \quad (2.17)$$

$$\ddot{w}_1 + \frac{k}{J} \dot{w}_1 + \Omega_1^2 w_1 = -\frac{2k}{J} (1 + Q(t)) (1 + \dot{u}_0 - \dot{w}_0)$$

Решение системы (2.16) с учетом начальных условий $u_0 = a, w_0 = b, \dot{u}_0 = c, \dot{w}_0 = d$ можно представить в форме

$$u_0 = e^{-jt} \left(a \operatorname{ch} jt + \frac{c + ja}{j} \operatorname{sh} jt \right) + \int_0^t F_1(\tau) e^{-j(t-\tau)} \operatorname{sh} j(t-\tau) d\tau \quad (2.18)$$

$$w_0 = e^{-jt} \left(b \cos n_1 t + \frac{d + jb}{n_1} \sin n_1 t \right) + \frac{1}{n_1} \int_0^t F_2(\tau) e^{-j(t-\tau)} \sin n_1(t-\tau) d\tau$$

$$n_1^2 = \Omega_1^2 - j^2, \quad j = k/(2J)$$

где $F_i(\tau)$ — правые части уравнений (2.16).

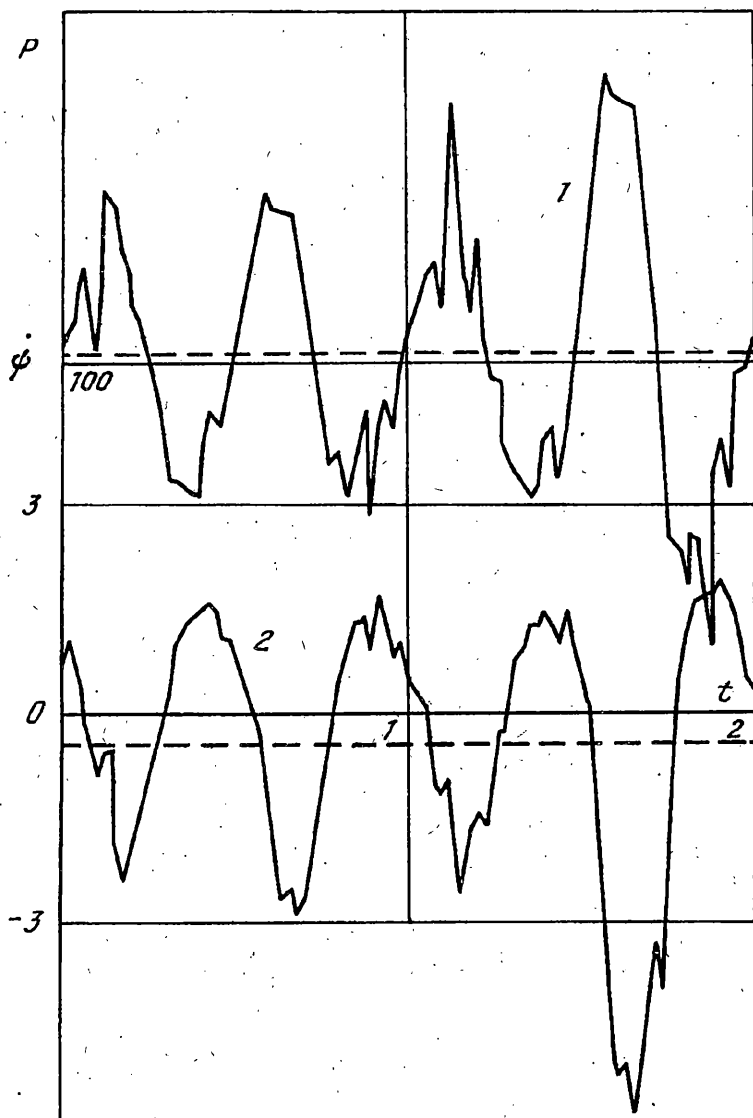
В частном случае, когда правая часть уравнений (2.16) представляет собой гармоническую функцию с заданной частотой p :

$$(k/J) (1 + Q(t)) = h \sin pt \quad (2.19)$$

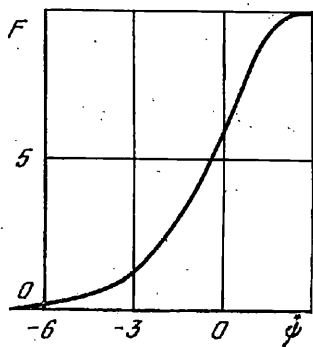
решение системы (2.16), описывающее вынужденные колебания, имеет вид

$$u_0 = A \sin pt + B \cos pt \quad (2.20)$$

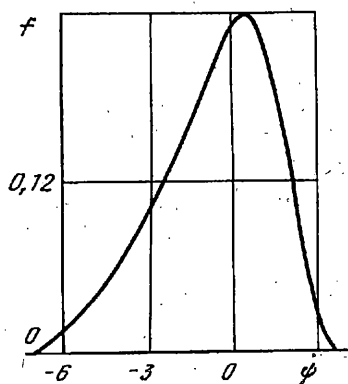
$$w_0 = C \sin pt + D \cos pt$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

P_0	\bar{P}	K_g	δ	$\bar{\psi}$	$\bar{\phi}_*$	D	ϵ	η	α
100	101,7	1,715	1,785	-0,457	60,74	4,111	2,027	0,121	1,26л
120	121,7	1,656	1,331	-0,401	59,60	6,140	2,478	0,154	1,20л
140	141,7	1,563	1,143	-0,461	57,74	8,457	2,908	0,204	1,22л
160	161,7	1,494	1,002	-0,396	55,70	11,945	3,457	0,256	1,18л
180	181,7	1,439	0,892	-0,682	52,64	23,207	4,818	0,364	1,20л

$$A = \frac{h}{p^2 \pm (k/J)^2}, \quad C = \frac{2h(\Omega_1^2 - p^2)}{(\Omega_1^2 - p^2)^2 + (k/J)^2 p^2}$$

$$B = \frac{(k/J)h}{p[p^2 + (k/J)^2]}, \quad D = \frac{-2h(k/J)p}{(\Omega_1^2 - p^2)^2 + (k/J)^2 p^2} \quad (2.21)$$

Решение уравнений (2.17) первого приближения можно представить в форме

$$u_1 = A_1 \sin pt + B_1 \cos pt + E_1 \sin 2pt + G_1 \cos 2pt \quad (2.22)$$

$$w_1 = C_1 \sin pt + D_1 \cos pt + K_1 \sin 2pt + N_1 \cos 2pt + M_1$$

Таким образом, вынужденные колебания вала будут происходить не только с частотой p возмущающей силы, но и с кратной ей частотой np . При совпадении собственной частоты колебаний системы с одной из частот, кратной частоте возмущающей силы, наступит явление резонанса.

3. Для приближения к реальным условиям необходимо учесть случайный характер изменения осевой нагрузки. Частоты изменения осевой нагрузки, действующей на турбобур, обусловлены многими факторами.

Примем во внимание два из них: колебания, связанные с неравномерной подачей насосами промывочной жидкости, частота которых 1—2 Гц; грунтовые колебания, возникающие вследствие волнообразной поверхности забоя. Частота этих колебаний порядка 30 Гц при угловой скорости вращения турбобура 600 об/мин.

Осциллограммы показывают, что основная частота изменения осевой нагрузки совпадает с частотой пульсации жидкости (1—2 Гц); этой частоте соответствует амплитуда осевой нагрузки порядка 50—60 кН. Амплитуда колебаний осевой нагрузки в случае высокой частоты (~25 Гц) составляет величину порядка 2 кН [5]. Поэтому изменение осевой нагрузки можно описать следующей формулой:

$$P = P_0 + a(1 + q) \sin \omega t \quad (3.1)$$

где P_0 — статическая осевая нагрузка; $P_0 = 100, 120, 140, 160, 180$ кН, $\omega = 12,56$ рад/с; a — порядка 50—60 кН. Значения a выбираются из таблицы случайных чисел, распределенных по нормальному закону, который близок к действительному; q представляет собой безразмерный параметр, характеризующий отношение амплитуды высокочастотной составляющей осевой нагрузки к амплитуде колебаний с низкой частотой (q также выбирается из таблицы случайных чисел с нормальным законом распределения, q порядка 0,03—0,04).

Момент двигателя определяется выражением вида

$$M_g = m - k\dot{\varphi}/\dot{\omega} \quad (3.2)$$

в котором коэффициенты m и k зависят от типа турбобура, расхода жидкости и других параметров. По экспериментальным данным для турбобура ЗТСШ-71/2'' при расходе жидкости 30 л/с определены числовые значения этих коэффициентов $m = 6270$ Нм, $k = 90$ Нмс.

Момент сопротивления вращению долота зависит от типа долота, условий бурения, осевой нагрузки, угловой скорости вращения вала турбобура и других

факторов. Для долота Б214—МГЛ при бурении сабунчинской свиты путем обработки данных эксперимента методом наименьших квадратов была найдена зависимость момента сопротивления от осевой нагрузки P и угловой скорости $\dot{\psi}$ вала турбобура

$$M_s = (\alpha P^2 + \beta P + \gamma) / \dot{\psi} + M_0 \quad (3.3)$$

($\alpha = 202 \text{ Н}^{-1} \text{ мс}^{-1}$, $\beta = -1080 \text{ мс}^{-1}$, $\gamma = -966 \text{ Нмс}^{-1}$, $M_0 = 623 \text{ Нм}$). Осевая сила измеряется в Ньютонах, размерность момента — Нм, размерность угловой скорости — рад/с.

Численно решалась система уравнений (2.16) при следующих значениях параметров системы: $J = 0,135 \text{ кгм}$, $c = 5,38 \cdot 10^5 \text{ Нм}^2$, $k/J = 19,6 \text{ с}^{-1}$, $\Omega_1^2 = 34182 \text{ с}^{-2}$. Угловая скорость крутильных колебаний определялась по формуле

$$\dot{\psi} = \varepsilon \omega_0 (1 + \dot{i}_0 - \dot{w}_0). \quad (3.4)$$

Графики изменения осевой нагрузки (кривая 1) и угловой скорости крутильных колебаний (кривая 2) представлены на фиг. 2 ($P_0 = 100 \text{ кН}$).

Также были вычислены следующие характеристики случайной функции: математическое ожидание $\bar{\psi}$, дисперсия D , среднее квадратическое отклонение σ , коэффициент неравномерности угловой скорости крутильных колебаний $\eta = (\psi_{\max} - \psi_{\min}) / \psi_*$ [5].

Для осевой нагрузки был определен коэффициент динамичности $K_g = P_{\max} / P_*$ и коэффициент неравномерности δ . Полученные результаты представлены в таблице (звездочка обозначает среднее значение соответствующей величины).

Для полной характеристики случайной функции необходимо знать закон ее распределения. По результатам счета построены интегральные функции распределения $F(\psi)$, а затем по ним — плотности распределения $f(\psi)$ (фиг. 3, 4).

Отметим некоторые факторы. Среднее значение осевой нагрузки больше статического P_0 . Коэффициент динамичности осевой нагрузки уменьшается с ростом P_0 . Его значения согласуются с экспериментальными данными. Крутильные колебания являются случайной функцией. Средняя величина угловой скорости крутильных колебаний смещена в сторону отрицательных значений. Разброс скорости крутильных колебаний и коэффициент неравномерности растут с увеличением статической осевой нагрузки. Следовательно, наиболее устойчивая работа системы возможна при меньших значениях осевой нагрузки. Колебания угловой скорости отстают от колебаний осевой нагрузки. Сдвиг фаз между ними составляет величину порядка 1,2л. Графики плотности распределения несимметричны.

Результаты вычислений вполне согласуются с данными эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Керимов З. Г. Динамические расчёты бурильной колонны. М.: Недра, 1970. 157 с.
2. Симонов В. В., Юнин Е. К. Влияние колебательных процессов на работу бурильного инструмента. М.: Недра, 1977. 217 с.
3. Варсобию Ю. Е., Кондрашов А. В., Лантев Д. В., Нестеров Н. Б. Управление динамикой работы бурового инструмента. // Нефть. хоз-во. 1994. № 4. С. 23—26.
4. Григорян Н. А., Багиров Р. Е. Анализ процесса турбинного бурения. М.: Недра, 1982. 207 с.
5. Дейли, Деринг, Пафф, Ортлофф, Линн. Измерение сил, действующих на колонну буровых труб, и ее элементов движения в процессе бурения. // Конструирование и технология машиностроения. 1968. № 2. С. 24—34.
6. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979. 496 с.