

УДК 539.214; 539.374

© 1996 г. Б. А. РЫЧКОВ

КОНЦЕПЦИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ И МЕХАНИКА ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

В начально анизотропном материале пластическая деформация происходит так, что даже при пропорциональном нагружении в условиях однородного напряженно-деформированного состояния вектор приращения пластической деформации не совпадает по направлению с вектором напряжений [1]. Большинство металлов и их сплавов представляет собой ортотропные или трансверсально изотропные материалы. Для них классическое квадратичное условие текучести Мизеса — Хилла [2, 3] достаточно удовлетворительно подтверждается экспериментальными данными только [4] при нагружениях вдоль главных направлений ортотропии. До сих пор почти не исследовано поведение анизотропных материалов при сложном нагружении. В данной работе дается обобщение модели твердого тела [5, 6], которое позволяет отразить изменение прочностных свойств ортотропного материала при сложной упругопластической деформации.

1. Упругая деформация и условие текучести. В опытах на растяжение (сжатие) с внутренним давлением тонкостенных трубчатых образцов (результаты которых рассматриваются ниже) траектории нагружения задаются в пространстве главных напряжений σ_z и σ_φ ($\sigma_r = 0$; z , φ , и r — направления соответственно вдоль оси, по касательной к цилиндрической образующей и по радиусу трубки).

В теории пластичности анизотропных сред часто предполагается упругая изотропия материала [7], в противном случае он должен удовлетворять обобщенному закону Гука. Согласно этому закону в рассматриваемом случае напряженно-деформированного состояния компоненты тензора упругих деформаций определяются по формулам [8]:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_z} \sigma_z - \frac{\nu_{\varphi z}}{E_\varphi} \sigma_\varphi, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E_\varphi} \sigma_\varphi - \frac{\nu_{z\varphi}}{E_z} \sigma_z, \quad (E_z, E_\varphi, \nu_{z\varphi}, \nu_{\varphi z} - \text{const}) \quad (1.1)$$

Для ортотропного материала (если главные направления анизотропии совпадают с направлениями главных напряжений) должно выполняться условие симметрии [8]:

$$E_z \nu_{\varphi z} = E_\varphi \nu_{z\varphi} \quad (1.2)$$

Условие текучести Мизеса — Хилла для данного напряженного состояния представляется в виде

$$H_0 (\sigma_z - \sigma_\varphi)^2 + F_0 (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + G_0 (\sigma_r - \sigma_z)^2 = 1 \quad (1.3)$$

где H_0 , F_0 , G_0 — параметры начальной анизотропии материала, которые определяются по известным пределам текучести σ_i^T в направлении главных осей ($i = z, \varphi, r$).

В рассматриваемом случае предел текучести σ_r^T экспериментально определить невозможно. Как показано в [9], можно воспользоваться ассоциированным с условием (1.3) законом текучести Хилла, из которого вытекает:

$$(\sigma_r^T)^{-2} = (\sigma_\varphi^T)^{-2} + (1 - 2\nu_{z\varphi}) (\sigma_z^T)^{-2} \quad (1.4)$$

Здесь $v_{z\varphi}$ означает [9] отношение приращений поперечной к продольной пластической деформации при осевом растяжении в момент возникновения текучести. Однако экспериментальное определение этого отношения по испытаниям стандартных образцов дает [10] большой разброс в его значениях, что обусловлено, как показывают исследования металловедов [11], значительной неоднородностью начальной пластической деформации растягиваемых образцов и неустойчивостью процесса ее развития. Вместе с тем известно, что коэффициент поперечной деформации за пределами упругости изменяется непрерывно, начиная от его упругого значения (коэффициента Пуассона). Поэтому с достаточным, по-видимому, основанием можно полагать, что в формуле (1.4) параметр $v_{z\varphi}$ — это соответствующий коэффициент, входящий в обобщенный закон Гука (1.1).

Обзор разнообразных критериев текучести для начально анизотропных материалов содержится в [12]. Поиск наиболее приемлемого критерия в каждом конкретном случае продолжается. Например, Р. Хилл недавно предложил [4] использовать вместо квадратичной функции вида (1.3) однородную функцию произвольной дробной степени. Однако во всех этих случаях или ничего не говорится, или реализуются недостаточно сведения о характере пластической деформации в начальной ее стадии развития и о ее физической природе. Между тем, как выяснилось при испытании¹ образцов анизотропного в исходном состоянии циркониевого сплава Э110, почти при всех видах напряженного состояния (за исключением некоторых особых) при пропорциональном нагружении в момент возникновения текучести происходит плоскопластическая деформация. Эту плоскую деформацию можно интерпретировать (исходя из основного механизма явления пластичности) как результат скольжений по площадкам главных касательных напряжений τ_{ij} ($i, j = z, \varphi, r$). Причем в зависимости от изменения вида напряженного состояния (характеризуемого здесь отношением $k_\sigma = \sigma_z/\sigma_\varphi$) деформация чистого сдвига от скольжений по одной из «площадок скольжения» (T_{ij}) сменяется подобной деформацией от скольжений по другой из этих (трех) площадок. Следовательно, существуют напряженные состояния, когда в момент возникновения пластической деформации оказываются задействованными одновременно две из указанных площадок. Этот вывод подкрепляется экспериментальными данными для алюминиевого сплава Д16Т, для которого обнаружено [13] следующее: сплав является трансверсально изотропным материалом, для него пропорциональному пути нагружения соответствует пропорциональная траектория деформаций вплоть до разрушения, а для напряженного состояния при $k_\sigma = 1,17$ разрушение происходит одновременно по площадкам $T_{\varphi r}$ и T_{zr} .

Введем, следуя Р. Хиллу [3], понятие эквивалентного касательного напряжения:

$$\tau_* = 1/\sqrt{3} (H_0 + F_0 + G_0)^{-1/2} [H_0 (\sigma_z - \sigma_\varphi)^2 + F_0 (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + G_0 (\sigma_r - \sigma_z)^2]^{1/2} \quad (1.5)$$

При $H_0 = F_0 = G_0$ последняя формула выражает собой октаэдрическое касательное напряжение (τ_0).

Для начально изотропных пластических материалов приемлемым является условие пластичности М. Я. Леонова [5], которое отражает существующую при наступлении текучести в этих материалах зависимость между максимальным и октаэдрическим касательными напряжениями (B и k — постоянные):

$$\tau_{\max} = B - k\tau_0 \quad (1.6)$$

По аналогии с этим, учитывая вышеизложенное, будем считать, что для ортотропного материала начальное условие текучести в каждой плоскости симметрии можно представить в виде

¹ Опыты провел в Институте горного дела СО РАН В. М. Жигалкин, он любезно предоставил автору все первичные данные.

σ_z	e_z	$-e_\varphi$	Γ_z	$-\Gamma_\varphi$
8,47	0,107	0,0066	0,066	0,001
16,42	0,250	0,162	0,172	0,147
22,25	0,413	0,330	0,307	0,310
23,31	0,487	0,382	0,376	0,361
24,34	0,533	0,430	0,417	0,408
27,55	1,300	0,980	1,169	0,955
30,19	1,920	1,413	1,776	1,385
32,98	2,730	2,040	2,573	2,010
35,76	4,013	3,000	3,843	2,967
37,98	4,950	3,660	4,769	3,625
38,67	6,380	4,770	6,196	4,735

$$\tau_{ij} = B_{ij} - k\tau_* \quad (i, j = z, \varphi, r) \quad (1.7)$$

где τ_{ij} — главные касательные напряжения, B_{ij} и k — постоянные.

Введение условия (1.7) требует конкретизации нормальных напряжений текучести по отношению к площадкам скольжения T_{ij} . Поясним это в следующем разделе на примерах пропорционального нагружения образцов различных материалов.

2. Экспериментальная проверка условия текучести. Образцы циркониевого сплава Э110 изготавливались из серийно выпускаемых труб, представляющих собой тонкостенные цилиндры. Данные опытов при простых нагружениях указывают² на значительную исходную анизотропию этого сплава, являющуюся следствием технологии изготовления трубы. Это проявляется в различной сопротивляемости и разномодульности в осевом и окружном направлениях. Установлено, что упругие константы материала, входящие в обобщенный закон Гука (1.1), удовлетворяют условию ортотропии (1.2). По усредненным данным можно принять: $E_z = 21000 \cdot 9,81$ МПа, $E_\varphi = 13000 \cdot 9,81$ МПа, $\nu_{z\varphi} = 0,19$, $\nu_{\varphi z} = 0,118$. В табл. 1 приведены опытные данные осевого растяжения ($\sigma_z > 0$, $\sigma_\varphi = 0$) одного из образцов и вычисленные по ним значения компонент пластической деформации Γ_z и Γ_φ (e_z и e_φ — замеренные в опыте компоненты упругопластической деформации, размерность напряжений — $9,81^{-1}$ МПа, деформаций — %). Как видно из этой таблицы, в отличие от начально изотропного материала соотношение между компонентами Γ_z и Γ_φ у данного сплава при $\sigma_z > \sigma_z^T$ характеризуются тем, что до относительного удлинения порядка 0,4% пластическая деформация в осевом направлении (Γ_z) по модулю равна пластической деформации в окружном направлении (Γ_φ), т. е. чисто пластическая деформация в начальной ее стадии при растяжении является деформацией чистого сдвига. Такая закономерность наблюдается и при других напряженных состояниях в интервале $1 \leq k_\sigma \leq \infty$. Это можно объяснить тем, что в рассматриваемых случаях локальные сдвиги (перемещения дислокаций и других дефектов кристаллической структуры) происходят вначале, в основном, по площадкам $T_{z\varphi}$. Следовательно, для определенности нормальному пределу текучести при растяжении (σ_z^T) можно приписать индексы «включающей в работу» площадки скольжения с указанием вида напряженного состояния: $(\sigma_z^T)_{z\varphi}$ при $k_\sigma = \infty$.

По табл. 1 нетрудно также определить (по приращению разности компонент

² Жигалкин В. М. Деформационное упрочнение конструкционных материалов при сложном нагружении на основе анализа анизотропии пластического состояния. Автореферат диссертации на соиск. уч. ст. д.ф.м.н. Новосибирск. 1992.

№	σ_z	σ_φ	$\bar{\sigma}_z$	k_σ	k
1	41,0	32,5	37,5	1,25	0,77
2	22,5	13,5	—	—	0,077
3	398	328	410	2	0,91
4	35,5	32,5	25	0,64	3,07
5	50,5	42,5	—	—	0
6	90,7	87,2	59,8	0,5	2,16
7	335	311	365	3,65	7,78

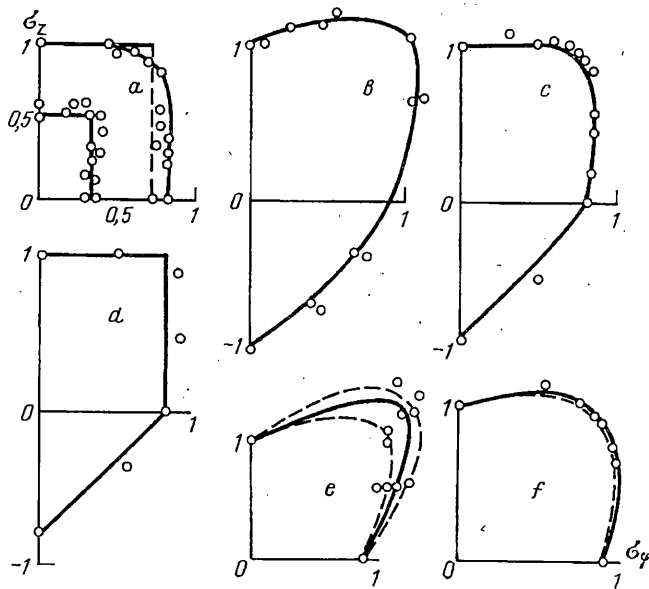
Γ_z и Γ_φ), что вслед за площадкой $T_{z\varphi}$ далее включается площадка T_{zr} . Подобным образом можно выявить последовательность скольжений по разным площадкам T_{ij} при различных напряженных состояниях.

Обращаясь к опытам А. М. Жукова [14], можно заметить, что у испытанного им сплава Д16Т упругая анизотропия менее значительна, чем у сплава Э110, но условие ортотропии (1.2) тоже выполняется: $E_z = 7650 \cdot 9,81$ МПа, $\nu_{z\varphi} = 0,265$, $E_\varphi = 8100 \cdot 9,81$ МПа, $\nu_{\varphi z} = 0,28$. Пределы текучести этого сплава при различных напряженных состояниях определялись по допуску 0,2% на наибольшую главную пластическую деформацию. (Такой способ экспериментального определения поверхности текучести считается наиболее целесообразным [15], ввиду отсутствия у анизотропных материалов «единой» диаграммы упрочнения в каких-либо обобщенных координатах.)

Из приведенных в [14] диаграмм упрочнения $\sigma_z(e_z)$ и $\sigma_\varphi(e_\varphi)$ следует, что при напряженных состояниях, близких к осевому растяжению, вначале (в малой окрестности условного предела текучести) компонента $\Gamma_\varphi \approx 0$. Это можно отнести на счет скольжений по площадке T_{zr} . А при напряженных состояниях, близких к растяжению в окружном направлении, в начальной стадии $|\Gamma_z| \rightarrow \Gamma_\varphi$, т. е. $\Gamma_\varphi \approx -\Gamma_z$ и, следовательно, действует площадка $T_{\varphi z}$. При изменении вида напряженного состояния от $k_\sigma = 0$ до $k_\sigma = \infty$ соотношение между Γ_z и Γ_φ постоянно меняется. При $k_\sigma \approx 1,17$ они оказываются равными ($\Gamma_z = \Gamma_\varphi$). Принимая в качестве исходных данных пределы текучести при указанных трех видах напряженного состояния и при $k_\sigma = 1,25$, определим все параметры материала, необходимые для построения расчетной поверхности текучести по условию (1.7). Этой поверхности соответствует еще одно особое напряженное состояние — $k_\sigma = 0,092$, при котором площадки $T_{\varphi z}$ и $T_{\varphi r}$ включаются одновременно. Следует также отметить, что в интервале $0 < k_\sigma \leq 0,092$ и $1,17 \geq k_\sigma \geq 1$ пластическая деформация, согласно изложенным модельным представлениям, возникает не от скольжений по площадке максимального касательного напряжения, а от скольжений по площадкам двух других главных касательных напряжений. Такая же особенность присуща и условию Треска для анизотропных материалов, которое [13] не всегда можно трактовать как условие максимальных касательных напряжений.

Всего подобным образом рассмотрено семь различных материалов. Для них кривые текучести показаны на фиг. 1. Далее (см. табл. 2) им присвоены следующие порядковые номера: 1 — алюминиевый сплав Д16Т [14] (фиг. 1, а), 2 — магниевый сплав МА2 [16] (фиг. 1, а), 3 — алюминиевый сплав Д16Т в другом состоянии поставки [13] (фиг. 1, б), 4 — нержавеющая сталь [15] (фиг. 1, с), 5 — алюминиевый сплав 2024—Т351 [7] (фиг. 1, д), 6 — титановый сплав [10] (фиг. 1, е), 7 — сталь 45 [17] (фиг. 1, ф).

В табл. 2 в первых двух колонках приведены пределы текучести при осевом ($\sigma_z \equiv \sigma_z^T$) и окружном ($\sigma_\varphi \equiv \sigma_\varphi^T$) растяжении, рядом — одно из напряжений теку-



Фиг. 1

части ($\bar{\sigma}_z$) при двухосном растяжении, характеризуемом параметром k_σ (окружное напряжение в этом случае равно $\bar{\sigma}_z/k_\sigma$). Выявлено, что у материалов № 1, 2, 3, 5 скольжения при осевом растяжении ($k_\sigma = \infty$) возникают по площадке T_{zr} , у материалов № 4, 6, 7 — по $T_{z\phi}$, а при $k_\sigma = 0$ для № 1, 3, 4, 6 и 7 — скольжения по площадке $T_{\phi z}$, для № 2 — по $T_{\phi r}$. (Поведение сплава № 5 рассмотрено ниже подробнее). Кроме того в отдельных случаях при необходимости в расчет принимались некоторые особые напряженные состояния, когда удавалось определить, что при этом скольжения возникают одновременно по двум площадкам скольжения T_{ij} . Так у сплавов № 1 и 3 при $k_\sigma = 1,17$, а также у сплава № 2 ($k_\sigma = 1,68$) и стали № 7 ($k_\sigma = 1,2$) это площадки $T_{\phi r}$ и T_{zr} ; для стали № 4 при $k_\sigma = 1,3$ и стали № 7 при $k_\sigma = 1,5$ — площадки $T_{z\phi}$ и T_{zr} . Все только что перечисленное (включая табл. 2) — это совокупность исходных данных, которые позволяют построить поверхности текучести для данных материалов по условию (1.7).

Расчетное значение параметра k в (1.7) дано в последней колонке табл. 2. Размерность напряжений — МПа с коэффициентом 9,81 для сплавов № 1 и 2, который еще умножается на 0,7 для стали № 4 и сплава № 5.

Расчетные кривые текучести показаны на фиг. 1 сплошными линиями; точки — экспериментальные данные. Для каждого материала пределы текучести отнесены к его пределу текучести при осевом растяжении σ_z^T ($\bar{\sigma}_z = \sigma_z/\sigma_z^T$, $\bar{\sigma}_\phi = \sigma_\phi/\sigma_z^T$) за исключением сплава № 2 (фиг. 1, а, «внутренняя» кривая), у которого для этой цели использовано значение σ_z^T сплава № 1 (для него на фиг. 1, а — «внешняя» кривая). Штриховые прямые линии на фиг. 1, а соответствуют критерию Треска.

Приведем еще некоторые разъяснения и дополнения.

Ввиду отсутствия в [15] диаграмм упрочнения и сведений об упругих константах материала, в расчетах по условию (1.7) он считался трансверсально изотропным (из-за малой разницы между пределами текучести σ_z^T и σ_ϕ^T), т. е. в выражении (1.3), а, значит, и в формуле (1.5) полагалось $H_0 = G_0$.

Для трансверсально изотропного материала в случае двухосного растяжения условие (1.3) преобразуется (при $H_0 = G_0$) к виду

$$F(\sigma_z, \sigma_\varphi) = 2H_0(\sigma_z - \sigma_\varphi)\sigma_z + (H_0 + F_0)\sigma_\varphi^2 = 1 \quad (2.1)$$

Для такого материала было предложено условие текучести [13], которое является «промежуточным» между критериями Мизеса — Хилла и Треска:

$$\eta\Sigma + (1 - \eta)t_{nl} = 1 \quad (0 \leq \eta \leq 1) \quad (2.2)$$

$$\Sigma = \sqrt{F(\sigma_z, \sigma_\varphi)}, \quad t_{nl} = \frac{|\sigma_k - \sigma_l|}{\sigma_k^T} \quad (k = 1, 2; l = 2, 3; k \neq l) \quad (2.3)$$

Сравнение выражений (1.7) и (2.2) показывает, что последнее условие накладывает более жесткие ограничения на коэффициенты линейной зависимости между главными касательными напряжениями и эквивалентным напряжением. Преимущество условия (1.7) проявляется для материалов с сильно выраженной начальной анизотропией как, например, у листовых материалов и при существенном превышении двухосной прочности по сравнению с одноосной.

Количественная оценка степени анизотропии листовых материалов при одноосном растяжении в направлении прокатки (направлении приложенной нагрузки) производится иногда [10], как указывалось выше, по отношению приращения деформации по ширине (de_2) к приращению деформации по толщине (de_3):

$$R = de_2/de_3 = H_0/G_0 \quad (2.4)$$

Для титанового сплава испытывались [10] трубчатые образцы, которые формовались прокаткой (с последующей специальной сваркой) так, что направление прокатки совпадало с направлением кольцевого (или иначе — окружного) напряжения. Кривые текучести были построены на основании (2.1), когда $R = 2,6$ рассчитано по одноосному и двухосному пределу текучести при $k_\sigma = 0$ и $k_\sigma = 1$ (на фиг. 1, e — внешняя штриховая линия) и когда $R = 1,7$ по данным для $k_\sigma = 0$ и $0,5$ (на фиг. 1, e — внутренняя линия). Как видно из фиг. 1, e , этот метод не дает удовлетворительного результата, что признают и авторы работы [10]. Более предпочтительным является расчет по условию (1.7) (сплошная линия на фиг. 1, e).

Соответствие расчетных (по предлагаемой модели) экспериментальным данным для алюминиевого сплава 2024—Т351 [7] достигается (фиг. 1, d), если считать (как подсказывают полученные в опыте диаграммы упрочнения $\sigma_z(e_z)$ и $\sigma_\varphi(e_\varphi)$), что начальные скольжения в этом материале происходят (при $0 < k_\sigma < \infty$), в основном, либо только по площадке $T_{\varphi r}$, либо — по T_{zr} . При удовлетворении таким требованиям условие (1.7) обращается (когда $k = 0$) в условие Треска, причем имеем (см. табл. 2): $(\sigma_z^T)_{zr}$ при $k_\sigma = \infty$ больше $(\sigma_\varphi^T)_{\varphi r}$ при $k_\sigma = 0$. Кроме того, это условие дает предел текучести $(\sigma_\varphi^T)_{\varphi z}$ при сжатии ($k_\sigma = -\infty$), который равен по модулю пределу текучести $(\sigma_\varphi^T)_{\varphi r}$ при $k_\sigma = 0$. Последнее также соответствует опытным данным, из чего, в свою очередь, следует, что при растяжении в окружном направлении скольжения должны возникать по площадкам $T_{\varphi r}$ и $T_{\varphi z}$ одновременно, а при $\sigma_z < 0$ и $\sigma_\varphi > 0$ — по $T_{\varphi z}$. К сожалению, это не удалось проверить из-за отсутствия в [7] значений обоих компонент деформации e_z и e_φ при одноосных растяжениях и сжатии. Однако, со всей очевидностью можно утверждать, что разница между пределами текучести при осевом растяжении и сжатии начально анизотропного пластического (не разрыхляющегося и не дилатирующего) материала не является результатом влияния гидростатического давления (т. е. первого инварианта тензора напряжений), а обуславливается либо тем, что скольжения в том и другом случае возникают по разным площадкам T_{ij} , либо (если площадка скольжения

одна и та же) — эффектом Баушингера. Этот вывод подтверждается опытными данными для стали [15] и сплава Д16Т [13] (см. фиг. 1, в, с).

Заметим, что в случае когда материал подчиняется критерию текучести Мизеса — Хилла (пунктир на фиг. 1, ф), условие (1.7) дает близкий результат (сплошная линия на фиг. 1, ф).

3. Сопротивление сдвигу и тензор пластической деформации. Будем считать, что в каждой из площадок скольжения T_{ij} сопротивление сдвигу (S_{kl}) непосредственно зависит только от интенсивности скольжений (r_{kl}) по данной площадке, когда величина S_{kl} превосходит касательное напряжение τ_{kl} (направления k, l лежат в плоскости T_{ij} , угол между осью i и k равен $\pi/4$). По аналогии с изотропным случаем [6, 18] будем полагать

$$S_{kl} = \psi(\tau_*, \tau_{ij}) + \Psi(\tau_*, \tau_{ij}) r_{kl} + A_{ij}(1 - \cos \hat{m}l), \quad A_{ij} = \text{const} \quad (3.1)$$

$$\psi(\tau_*, \tau_{ij}) = [B_{ij} - (k - \Pi_{ij}\tau_{ij}/\tau_*)\tau_*]/(1 + \Pi_{ij})$$

$$\Psi(\tau_*, \tau_{ij}) = p_{ij}[B_{ij}^{-1}(\tau_{ij} + k\tau_*) - 1]^{c_{ij}}$$

где m — направление действия соответствующего главного касательного напряжения, p_{ij} и c_{ij} — постоянные.

Роль каждого из слагаемых (3.1) полностью повторяет ранее описанную для подобного представления сопротивления сдвигу [6, 18]. Величина констант A_{ij} принимается равной удвоенному нормальному пределу текучести, вызывающему скольжения по соответствующей площадке T_{ij} . Для параметров Π_{ij} прототипом является параметр a [18], который зависит от вида напряженного состояния. Например, на основании данных пропорционального нагружения образцов циркониевого сплава для основных задействованных площадок T_{ij} можно принять

$$\Pi_{z\varphi} = 0, \quad \Pi_{zr} = 3(1 - \tau_{z\varphi}/\tau_{zr})$$

$$\Pi_{\varphi z} = 0, \quad \Pi_{\varphi r} = 4(1 - \tau_{\varphi z}/\tau_{\varphi r})k_{\sigma}^{1,1} \cos(2\pi k_{\sigma})$$

Направление l в плоскости T_{ij} определяется углом β , который отсчитывается от направления m .

Из условия равенства сопротивления сдвигу действующему в его направлении касательному напряжению находится интенсивность скольжений $r(\beta) \equiv r_{kl}(\beta)$. Суммируя элементарные сдвиги по отдельным площадкам скольжения T_{ij} , найдем составляющие компонент тензора пластической деформации в главных осях. Например, от скольжений по площадке $T_{z\varphi}$ будем иметь

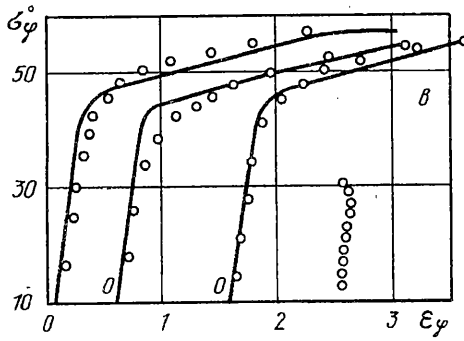
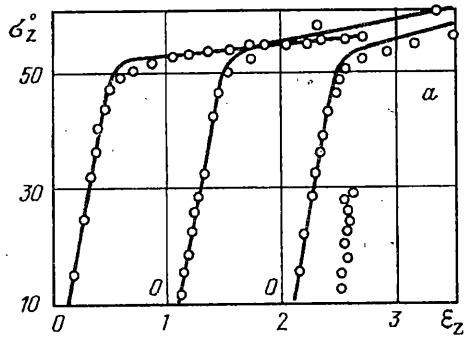
$$\Gamma_z = -\Gamma_{\varphi} = \frac{1}{2} \int_{-\theta_{z\varphi}}^{\theta_{z\varphi}} r(\beta) \cos 2\beta d\beta \quad (3.2)$$

Складывая компоненты (3.2) с им подобными от скольжений по другим главным площадкам, получим искомые деформации при заданном напряженном состоянии. Границы веера скольжений $\pm \theta_{ij}$ определяются из условия непрерывности скольжений, т. е. из условия $r(\pm \theta_{ij}) = 0$, что дает

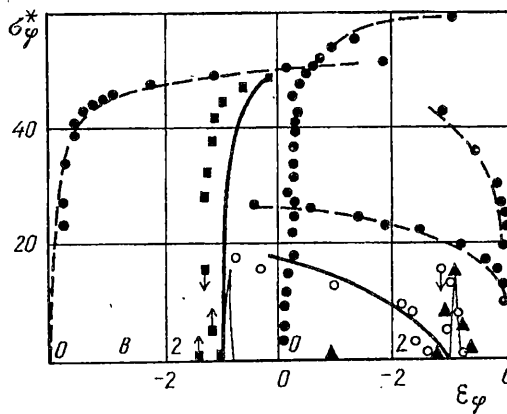
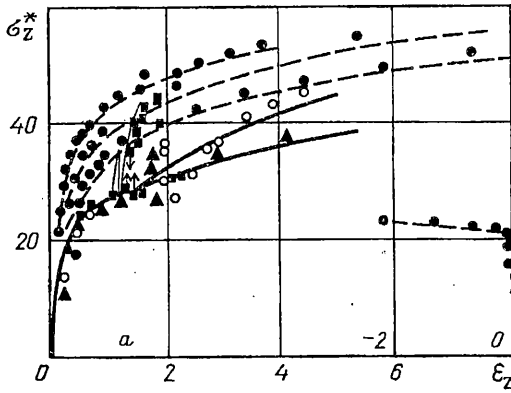
$$\cos 2\theta_{ij} = [\psi(\tau_*, \tau_{ij}) + A_{ij}](\tau_{ij} + A_{ij})^{-1} \quad (3.3)$$

На фиг. 2 приведено сопоставление полученных на основе развиваемой модели расчетных (сплошные линии) и экспериментальных (точки) диаграмм упрочнения алюминиевого сплава 2024—Т351 [7] при пропорциональном нагружении. Введены обозначения $\sigma_z^{\circ} = \sigma_z \times 0,7 \times 9,81$ МПа, $\sigma_{\varphi}^{\circ} = \sigma_{\varphi} \times 0,7 \times 9,81$ МПа. Размерность деформации — [%].

На фиг. 2, а представлены слева направо диаграммы при k_{σ} , равном ∞ , 2, 1 и 0,5 на фиг. 2, в соответственно при k_{σ} , равном 1, 0, 0,5 и 2. Для проведения



Фиг. 2



Фиг. 3

расчетов исходными служили диаграммы при $k_\sigma = 2$ и $0,5$, по ним определены (полагая $\Pi_{ij} = 0$) параметры материала: $p_{\varphi r} = 15,45$, $c_{\varphi r} = -0,706$, $p_{\varphi z} = 385$, $c_{\varphi z} = 1,164$, $p_{zr} = 10,95$, $c_{zr} = -0,439$, $p_{z\varphi} = 101,8$, $c_{z\varphi} = 0,96$ (p_{ij} с такой же размерностью, как у напряжений). Другие осуществленные в опыте [7] случая нагружения ($k_\sigma = 0, \infty, 1$) использованы для проверки модели. Она, как видно из представленной картины, достаточно удовлетворительно отражает изменение прочностных свойств данного материала с изменением вида напряженного состояния, чего не достигалось при использовании других теорий [7].

Для циркониевого сплава Э110 была реализована траектория сложного нагружения в условиях монотонной [18] деформации (для осуществления которой необходимо, чтобы ни в одном из направлений происшедших скольжений не возникала разгрузка). Вначале задавалось осевое растяжение до напряжения $\sigma_z = 28 \cdot 9,81$ МПа, а затем двухосное растяжение с отношением приращения $\Delta\sigma_z$ к σ_φ , равном $0,44$. В этом случае, согласно модели, раствор всера скольжений по площадке $T_{z\varphi}$ при догрузке растет мало, а по площадке T_{zr} «замораживается» вплоть до напряжения $\sigma_z^k = 35 \cdot 9,81$ МПа, т. е. соответствующее приращение пластической деформации (причем, подчеркиваем, деформации чистого сдвига, когда $\Delta\Gamma_z = -\Delta\Gamma_\varphi$) также должно быть малым. Далее предусматривалась разгрузка в угловую точку траектории, после чего повторное нагружение по лучам, исходящим из этой точки, при отношении $k_{\Delta\sigma} = \Delta\sigma_z/\sigma_\varphi$ больше и меньше $0,44$. При этом, как следует из условия монотонности деформации, диаграммы упрочнения должны стремиться к подобным диаграммам от пропорционального нагружения при соответственно одинаковом в том и другом случае виде напряженного состояния. По данной программе было испытано 5 образцов; эксперимент проведен, как и ранее, в ИГД СО РАН В. М. Жигалкиным. На фиг. 3 приведены, в качестве примера, полученные результаты трех из этих образцов в сопоставлении с диаграммами пропорционального нагружения (эксперимент — точки, расчет — линии).

Обозначения: $\sigma_z^* = \sigma_z \times 9,81$ МПа, $\sigma_\varphi^* = \sigma_\varphi \times 9,81$ МПа. Размерность деформаций — [%]. Параметры материала: $p_{z\varphi}^* = 2317$, $c_{z\varphi}^* = -1,7$, $p_{zr}^* = 1113$, $c_{zr}^* = -3,5$, $p_{\varphi r}^* = 317$, $c_{\varphi r}^* = -2,2$, $p_{\varphi z}^* = 27$, $c_{\varphi z}^* = -0,42$ ($p_{ij}^* = p_{ij} \times 9,81^{-1}$ МПа).

На фиг. 3, а штриховыми линиями представлены (см. сверху вниз) три диаграммы упрочнения $\sigma_z(\varepsilon_z)$ при k_σ , соответственно равном $1, 4/3$ и 2 , а в правом нижнем углу рамки при $k_\sigma = 0,42$ (в этом случае $\varepsilon_z < 0$). Нижняя сплошная линия — осевое растяжение ($k_\sigma = \infty$). Исходящий от этой линии (из точки $\sigma_z = 28 \cdot 9,81$ МПа) N -образный «всплеск» по напряжению соответствует описанной выше программе сложного нагружения, частичной разгрузки и повторной догрузки при $k_{\Delta\sigma} = 0,18$ до напряжения σ_z^k , а далее $k_\sigma \rightarrow 1$. При таком нагружении экспериментальные данные нанесены темными квадратиками, стрелками показан переход от точки к точке при догрузках и разгрузке. Светлые кружочки отражают догрузку при $k_{\Delta\sigma} = 1$, а треугольники — при $k_{\Delta\sigma} = \infty$.

Для указанных двух случаев догрузки и для случая $k_{\Delta\sigma} = 0,18$ диаграммы $\sigma_\varphi(\varepsilon_\varphi)$ на фиг. 3, в разнесены в разные квадраты координатной сетки для удобства изображения. Диаграммы упрочнения $\sigma_\varphi(\varepsilon_\varphi)$ при пропорциональном нагружении (штриховые линии), при котором $\varepsilon_\varphi > 0$, для случаев $k_\sigma = 0,42$ (слева на фиг. 3, в) и $k_\sigma = 1$ (посередине на фиг. 3, в) также разнесены между собой. При пропорциональном нагружении, когда $\varepsilon_\varphi < 0$, диаграммы $\sigma_\varphi(\varepsilon_\varphi)$ исходят из правого нижнего угла рамки, верхняя (штриховая) кривая — $k_\sigma = 4/3$, вторая подобная кривая — $k_\sigma = 2$. Остальные графические приемы и их смысловые значения такие же, как на фиг. 3, а.

Некоторое расхождение между расчетными и экспериментальными данными около точки излома траектории нагружения объясняется запаздыванием векторных свойств пластической деформации и наличием в действительности некоторой доли деформации ползучести, которая в теории пластичности не учитывается. В целом ожидаемая картина поведения материала при сложном нагружении в условиях монотонной деформации подтвердилась: в таких условиях связь между напряжениями и упругопластическими деформациями не зависит от истории нагружения и определяется конечными значениями компонент тензора напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косарчук В. В., Ковальчук Б. И. К формулировке закона запаздывания векторных свойств начально анизотропных материалов//Проблемы прочности. 1986. № 11. С. 3—6.
2. Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen//ZAMM. 1928. Bd. 8. H. 3. S. 161—185.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
4. Hill R. Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals//J. Mech. and Phys. Solids. 1990. V. 38. № 3. P. 405—417.
5. Леонов М. Я., Нисневич Е. Б., Рычков Б. А. Плоская теория пластичности, основанная на синтезе скольжений//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 43—49.
6. Рычков Б. А. Сложная деформация пластических материалов при нагружениях без поворота главных осей тензора напряжений//Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 112—119.
7. Фредеркинг, Сайдботтом. Экспериментальная проверка теорий пластичности анизотропных металлов//Прикл. механика. Тр. америк. о-ва инж.-механиков. 1971. № 1. С. 14—21.
8. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
9. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.
10. Бабел, Эйтман, Макайвер. Двухосное упрочнение анизотропных титановых сплавов//Теоретические основы инженерных расчетов. 1967. № 1. С. 15—23.
11. Иванова В. С. О природе деформации на площадке текучести металлов//Докл. АН СССР. 1954. Т. 94. № 2. С. 217—220.
12. Dafalias Y. F. Anisotropic hardening of initially orthotropic materials//ZAMM. 1979. Bd. 59. H. 9. S. 437—446.
13. Лебедев А. А., Косарчук В. В., Ковальчук Б. И. Исследование скалярных и векторных свойств анизотропных материалов в условиях сложного напряженного состояния. Об условии текучести анизотропных материалов//Проблемы прочности. 1982. № 3. С. 25—31.
14. Жуков А. М. Прочность и пластичность сплава Д16Т при сложном напряженном состоянии//Изв. АН СССР. ОТН. 1954. № 6. С. 61—70.
15. Дилламор И. Л., Хейзел Р. Дж., Уотсон Т. В., Хэдден П. Экспериментальное изучение механической анизотропии некоторых общеупотребительных металлов//Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1972. № 5. С. 134—147.
16. Жуков А. М. Механические свойства сплава МА2 при двухосном растяжении//Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 9. С. 56—65.
17. Бастун В. Н., Черняк Н. И. О применимости некоторых условий пластичности для анизотропной стали//Прикл. механика. 1966. Т. 2. Вып. 1. С. 92—98.
18. Жигалкин В. М., Рычков Б. А. Анизотропия от скольжений//ПМТФ. 1994. № 3. С. 136—144.

Бишкек

Поступила в редакцию
3.VIII.1994