МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 539.214; 539.374

© 1996 г. А. А. МАРКИН, С. С. ЯКОВЛЕВ

ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ОРТОТРОПИИ НА ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

При описании неустановившихся процессов деформирования жестко пластического, ортотропного материала возникает вопрос об ориентации осей ортотропии относительно пространственной (эйлеровой) системы отсчета. Полагая оси ортотропии фиксированными в эйлеровой системе, приходим к противоречию при рассмотрении неоднородных процессов, когда жесткие области двинутся как абсолютно твердое тело вместе с «вмороженными» осями ортотропии. Более сложная ситуация возникает в областях, где наряду с деформированием имеет место вихревое движение. Такого типа процессы возможны и при однородном состоянии, например, простой сдвиг [1].

В публикуемой статье принимается предположение о совпадении скорости тензора поворота осей ортотропии с тензором вихря. Таким образом, оси ортотропии фиксируются относительно вихревого базиса [1].

Рассматривается влияние изменения ориентации осей ортотропии поверхности текучести Хилла [2] на процессы однородного деформирования в условиях плоского напряженного состояния.

1. Кинематические соотношения. Рассмотрим процесс обобщенного плоского деформирования несжимаемого, идеально-пластического слоя. Декартов базис отсчетной системы координат задается векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, причем, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ располагаются в плоскости слоя. Компоненты тензора деформации скорости W и тензора вихря ω в отсчетном базисе выражаются через координаты вектора скорости $\mathbf{v}$ по следующим формулам [3]:

$$W_{11} = v_{1,1}, \quad W_{22} = v_{2,2}, \quad W_{12} = 1/2\,(v_{1,2} + v_{2,1})$$

$$W_{13} = W_{23} = 0, \quad W_{33} = (\ln \lambda_3) \tag{1.1}$$

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = 1/2\,(v_{2,1} - v_{1,2}), \quad \omega_{13} = \omega_{23} = 0 \tag{1.2}$$

где $\lambda_3 = h/h_0$ — отношение текущей толщины слоя к начальной толщине.

Пусть $\mathbf{k}_i$ — орты декартова базиса главных осей ортотропии поверхности текучести Хилла. Полагаем, что $\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ расположены в плоскостях слоя. Связь между векторами $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{k}_i$ задается ортогональным тензором Q, при этом

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{e}_i \cdot Q \tag{1.3}$$

Обозначим угол между $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{k}_1$, через φ, тогда из (1.3) получим следующие выражения компонент Q в отсчетном базисе:

$$Q_{11} = Q_{22} = \cos\varphi, \quad Q_{12} = -Q_{21} = \sin\varphi, \quad Q_{13} = Q_{23} = Q_{33} = 0 \tag{1.4}$$

Соответствующий ортогональному тензору Q антисимметричный тензор $\varphi = \ln Q$ имеет в отсчетном базисе компоненты

$$\varphi_{12} = -\varphi_{21} = \varphi, \quad \varphi_{13} = \varphi_{23} = 0 \tag{1.5}$$

2. Определяющие соотношения. Условие идеальной пластичности при плоском напряженном состоянии в базисе главных осей ортотропии $\mathbf{k}_i$ имеет следующий вид [2]:

$$(G + H)\,\sigma_{11}^2 - 2H\sigma_{11}\sigma_{22} + (H + F)\,\sigma_{22}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \tag{2.1}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора истинных напряжений σ в главных осях ортотропии; G, H, F, N — постоянные материала.

Ассоциированный с (2.1) закон пластического течения связывает компоненты тензора деформации скорости a_{ij} в базисе главных осей ортотропии с σ_{ij}, при этом

$$a_{11} = \lambda\,[(H + G)\,\sigma_{11} - H\sigma_{22}],\quad a_{12} = \lambda N\sigma_{12},\quad a_{13} = 0$$

$$a_{22} = \lambda\,[-H\sigma_{11} + (F + H)\,\sigma_{22}],\quad a_{23} = 0$$

$$a_{33} = W_{33} = -\lambda\,(G\sigma_{11} + F\sigma_{22}) \tag{2.2}$$

Пусть процесс нагружения задан компонентами s_{ij} тензора истинных напряжений σ в отсчетной системе координат, тогда связь между s_{ij} и σ_{ij} определяется по формулам

$$\sigma_{11} = s_{11}\cos^2\varphi + s_{12}\sin 2\varphi + s_{22}\sin^2\varphi$$

$$\sigma_{12} = -\tfrac{1}{2}s_{11}\sin 2\varphi + s_{12}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}s_{22}\sin 2\varphi$$

$$\sigma_{22} = s_{11}\sin^2\varphi + s_{12}\sin 2\varphi + s_{22}\cos^2\varphi \tag{2.3}$$

Аналогичным образом связаны компоненты W_{ij} и a_{ij} тензора.

Известно, что характер анизотропии материала в процессе пластического деформирования может изменяться [4]. В рамках идеально пластического ортотропного материала изменение анизотропии возможно лишь за счет изменения ориентации главных осей ортотропии. Будем полагать, что скорость тензора поворота главных осей ортотропии совпадает с тензором вихря, тогда

$$\dot\varphi = \omega \tag{2.4}$$

Возникает вопрос о следствиях из гипотезы (2.4), когда процессы нагружения и деформирования однородны в слое.

3. Сжатие слоя абсолютно гладкими плитами. Рассмотрим процессы нагружения, в которых главные оси тензора напряжений неизменно ориентированы относительно отсчетной системы координат. Простейшим является случай одноосного нагружения, когда компоненты тензора истинных напряжений имеют вид

$$|s_{11}| = s,\quad s_{12} = s_{23} = s_{22} = s_{13} = 0 \tag{3.1}$$

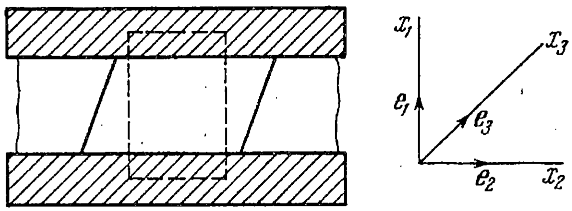
Полагаем ориентацию материальных плоскостей слоя параллельных в начальный момент отсчетной плоскости $x_1 = 0$ неизменной в процессе деформирования. Данная схема соответствует процессу сжатия (растяжения) слоя абсолютно гладкими плитами. Схема нагружения показана на фигуре, где штриховыми линиями выделен прямоугольный в начальный момент материальный элемент. Этот же элемент в процессе деформирования показан сплошными линиями.

В соответствии с данной схемой нагружения поле скоростей должно удовлетворять условию

$$v_{1,2} = 0 \tag{3.2}$$

Из выражений (2.1), (2.3), находим условие пластичности для случая (3.1):

$$s^2\,(F\sin^4\varphi + G\cos^4\varphi + H\cos^2 2\varphi + \tfrac{1}{2}N\sin^2 2\varphi) = 1 \tag{3.3}$$



Из определяющих соотношений ассоциирование закона (2.2) и связей (2.3) между компонентами тензора деформаций скорости находим связь между смешанной компонентой $W_{1,2}$ и параметрами нагружения s:

$$W_{12} = \tfrac{1}{2}s\lambda \{ \sin 2\varphi \, [(2H + G) \cos^2 \varphi - (2H + F) \sin^2 \varphi] - \tfrac{1}{2}N \sin 4\varphi\} \tag{3.4}$$

Из (1.1), (1.2), (1.5), (3.2) на основании (2.4) получим

$$\dot\varphi = W_{12} \tag{3.5}$$

В качестве временного параметра (t) принимаем $t = |\ln \lambda_3|$. При таком выборе из (1.1) имеем

$$W_{33} = \pm 1 \tag{3.6}$$

где знак плюс соответствует сжатию, а минус — растяжению. Из (3.6) и выражения для W_{33} из (2.2) получим

$$s\lambda = (G \cos^2 \varphi + F \sin^2 \varphi)^{-1} \tag{3.7}$$

Подставляя (3.5) и (3.7) в (3.4), получаем дифференциальное уравнение относительно угла поворота главных осей ортотропии

$$\dot\varphi = \tfrac{1}{2} (G \cos^2 \varphi + F \sin^2 \varphi)^{-1} \{\sin 2\varphi \, [(2H + F) \cos^2 \varphi -$$

$$- (2H + F) \sin^2 \varphi] - \tfrac{1}{2}N \sin 4\varphi\} \tag{3.8}$$

Для многих сплавов установлено, что $F \simeq G$ [5]. В этом случае, полагая в (3.8) $F = G$, имеем

$$\dot\varphi = -K \sin 4\varphi, \quad K = \tfrac{1}{4} [N/F - (1 + 2H/F)] \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) легко интегрируется и закон изменения угла поворота главных осей ортотропии принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = e^{-4kt} \operatorname{tg} 2\varphi_0 \tag{3.10}$$

где φ_0 — угол начальной ориентации ортотропии относительно отсчетного базиса. Характер решения (3.10) определяется знаком постоянной K. Для всех сплавов у которых $F \simeq G$, значения K, подсчитанные по экспериментальным данным приведенным в [5], положительны. Например, для стали 12Х18Н9 $H/F = 0{,}759$, $G/F = 0{,}988$, $N/F = 3{,}286$, $4K = 0{,}768$. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. С ростом степени деформации (параметра t) главные оси ортотропии стремятся совместиться с главными осями тензора напряжений ($\varphi \to 0$), причем скорость сближения осей пропорциональна степени анизотропии, определяемой постоянной K (в изотропном материале $K = 0$).

2. Поворот осей ортотропии меняет характер процесса деформирования. Действительно, из (2.2) и аналога (2.3) для компонент W в отсчетном базисе получим

$$\frac{W_{11}}{W_{22}} = \frac{KF(1+\cos 4\varphi) + (F+N)/2}{F - KF(1+\cos 4\varphi) - (F+N)/2} \qquad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что при неизменной ориентации осей деформирования процесс будет простым. Если же оси поворачиваются, то отношение (3.11) изменяется. Однако, отклонение процесса деформирования от простого существенно на начальной стадии. При $t \to \infty$ отношение компонент тензора W стремится к постоянным значениям, следовательно, траектория деформирования стремится к лучевой. Таким образом, вращение главных осей ортотропии прекращается и происходит совмещение главных осей тензора деформации скорости с главными осями тензора напряжений.

3. Зависимость осевого напряжения от ориентации осей ортотропии определяется из формулы (3.3) при $F = G$ следущим выражением:

$$s_{11} = [F + H + KH(1 - \cos 4\varphi)]^{-1/2} \qquad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что если вращение осей ортотропии отсутствует, то напряжение остается неизменным в процессе деформирования. Если же допустить поворот осей, то напряжение будет неизменным лишь когда угол φ_0 принимает значения $0, \pi/4, \pi/2$. В этих случаях ориентация осей ортотропии, согласно (3.10), не изменяется и $\varphi \equiv \varphi_0$. В остальных случаях напряжение будет изменяться. Например, при $\varphi_0 = \pi/8$ получим

$$(F + H + KF)^{-1/2} \le s_{11} < (F + H)^{-1/2}$$

Для рассматриваемого материала ($F = G$) пределы текучести при сжатии (растяжении) вдоль осей ортотропии имеют равные и максимальные значения. Поэтому, если в начальный момент ось сжатия не совпадает с осью ортотропии, то течение начинается при значении s_{φ_0} меньшем, чем $s_0 = (F + H + KF)^{-1/2}$. В дальнейшем при $\varphi \to 0$, $s_\varphi \to s_0$ и следовательно возрастает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркин А. А., Толоконников Л. А.* Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования//Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всес. межвуз. сб. Горький: Горьк. ун-т., 1987. С. 32—37.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.
3. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 390 с.
5. *Яковлев С. П., Кухарь В. Д.* Штамповка анизотропных заготовок. М.: Машиностроение, 1986. 186 с.

Тула

Поступила в редакцию
25.VIII.1993