МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 539.214;539.374

 Д. Д. ИВЛЕВ, Л. Б. ШИТОВА

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ

В [1] рассмотрена плоская задача для материала, условие предельного состояния которого можно записать в виде $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$, где σ_1, σ_2 — главные напряжения. Ниже рассматривается общая пространственная модель предельного состояния тел, для которой плоская деформация приводит к соотношениям, рассмотренным в [1].

1. В статике сыпучей среды используется условие предельного состояния [2]:

$$|\tau_{\max}| = k + \sigma \operatorname{tg} \rho \ (k, \rho - \text{const}), \quad \tau^{1/2}_{\max} = (\sigma_i - \sigma_j)$$

$$\sigma = 1/3\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{1.1}$$

где σ_i — главное напряжение.

В частном случае, при $\rho = 0$ из (1.1) следует условие текучести Треска.

В [3, 4] А. Ю. Ишлинский предложил условие текучести предельного приведенного напряжения

$$|s_{\max}| = k, \quad s = \sigma_i - \sigma \tag{1.2}$$

Обобщая условие пластичности (1.2) на случай статики сыпучей среды, аналогично (1.1) можно записать

$$|s_{\max}| = k + \sigma \operatorname{tg} \rho \tag{1.3}$$

Очевидно, условия (1.1), (1.3) определяют в пространстве главных напряжений шестигранные пирамиды с вершиной в точке $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma = -k/\operatorname{tg}\rho$. В сечении девиаторной плоскостью $\sigma = \text{const}$ шестиугольники, определяемые соотношениями (1.1), (1.3), показаны на фиг. 1.

Рассмотрим уравнения противоположных граней условия (1.3) в пространстве главных напряжений, в дальнейшем положим $k = 1$:

$$\sigma_i - \sigma = 1 + \sigma \operatorname{tg} \rho, \quad \sigma_i - \sigma = -1 - \sigma \operatorname{tg} \rho \tag{1.4}$$

Соотношения (1.4) перепишем в виде

$$\sigma_i - \sigma\,(1 + \operatorname{tg} \rho) = 1, \quad \sigma_i - \sigma\,(1 - \operatorname{tg} \rho) = -1 \tag{1.5}$$

Уравнения ребра двух смежных граней

$$\sigma_i - \sigma\,(1 + \operatorname{tg} \rho) = 1, \quad \sigma_j - \sigma\,(1 - \operatorname{tg} \rho) = -1 \tag{1.6}$$

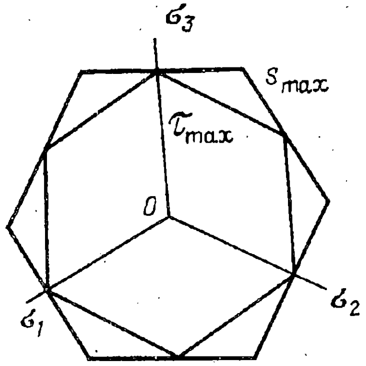
могут быть переписаны в виде

$$\sigma_i - 2\sigma = 0, \quad \sigma_i\,(1 - \operatorname{tg} \rho) - \sigma_j = 2 \tag{1.7}$$

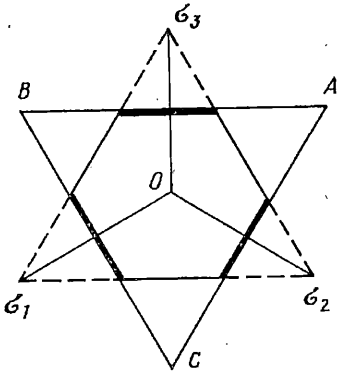
Далее рассмотрим первое из представлений (1.5). Предположим, что $\operatorname{tg} \rho = 2$, тогда первое из уравнений (1.5) примет вид

$$\sigma_j + \sigma_k = -1 \tag{1.8}$$

В качестве предельного условия могут быть рассмотрены три уравнения (1.9),



Фиг. 1



Фиг. 2

в этом случае предельное условие (1.9) интерпретируется трехгранной пирамидой, на фиг. 2 показано ее сечение ABC девиаторной плоскостью.

Рассмотрим ребро, образованное пересечением смежных граней (1.8), для определенности положим

$$\sigma_1 + \sigma_3 = -1, \; \sigma_2 + \sigma_3 = -1 \tag{1.9}$$

Из (1.9) следует

$$\sigma_1 = \sigma_2, \; \sigma_3 = -(1 + \sigma_1) \tag{1.10}$$

Используем далее соотношения

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \ldots$$

$$\tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2, \ldots \tag{1.11}$$

где σ_x, τ_{xy} — компоненты напряжений в декартовой системе координат xyz; l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы углов, которые образуют направления главных напряжений с осями декартовой системы координат.

Из (1.10), (1.11) получим

$$\sigma_x = 1 + 3\sigma - (1 + 6\sigma)\, n_1^2, \ldots, \sigma_1 = 3\sigma + 1$$

$$\tau_{xy} = -(1 + 6\sigma)\, n_1 n_2, \ldots, \quad \sigma = 1/3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{1.12}$$

Из (1.12) получим три условия пластичности:

$$(\sigma_x - 1 - 3\sigma)(\sigma_y - 1 - 3\sigma) - \tau_{xy}^2 = 0 \; (xyz) \tag{1.13}$$

Недостающие выражения в (1.13) получаются круговой перестановкой индексов (xyz).

Из (1.12) можно получить также

$$(\sigma_x - 1 - 3\sigma)\,\tau_{yz} - \tau_{xy}\tau_{xz} = 0 \; (xyz) \tag{1.14}$$

Согласно (1.12) задача является статически определимой, соотношения для скоростей деформации можно получить, используя соотношения (1.13) или (1.14) в качестве обобщенного пластического потенциала.

В [3] исследован общий случай свойства уравнений теории идеальной пластичности при произвольной зависимости $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = \Phi(\sigma_1)$. В данном случае $\Phi = -(1 + \sigma_1)$, $d\Phi/d\sigma_1 = -1$. Из результатов [1] следует, что система уравнений, определяющих напряженное и деформированное состояние при условиях пластичности (1.10), принадлежит к эллиптическому типу.

2. В случае плоской задачи рассмотрим грань, определяемую уравнением (1.8):

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -1 \tag{2.1}$$

На фиг. 2 жирной линией выделены отрезки, совпадающие для граней предельного условия обобщенного приведенного напряжения (1.3) и условия (1.8).

Рассматривая (2.1) в качестве пластического потенциала, получим

$$\varepsilon_1 = \lambda, \ \varepsilon_2 = \lambda, \ \varepsilon_3 = 0 \tag{2.2}$$

где ε_i — главные компоненты скорости деформации.

Запишем соотношения, вполне аналогичные (1.11), справедливые для изотропного тела

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2, \ldots \\ &\varepsilon_{xy} = \varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2, \ldots \end{aligned} \tag{2.3}$$

где ε_x, ε_{xy} — компоненты скорости деформации в декартовой системе координат.

Направляя ось z вдоль третьего главного направления, из (2.3) согласно (2.2) будем иметь

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \lambda(\lambda_1^2 + m_1^2), \ \varepsilon_{xz} = \lambda(l_1 l_3 + m_1 m_3) = 0 \\ &\varepsilon_y = \lambda(l_2^2 + m_2^2), \ \varepsilon_{yz} = \lambda(l_2 l_3 + m_2 m_3) = 0 \\ &\varepsilon_{xy} = \lambda(l_1 m_1 + l_2 m_2), \ \varepsilon_z = \lambda(l_3^2 + m_3^2) = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует

$$l_3 = m_3 = n_1 = n_2 = 0, \ n_3 = 1 \tag{2.5}$$

Согласно (2.5) выражения (2.4) примут вид

$$\varepsilon_x = \lambda, \ \varepsilon_y = \lambda, \ \varepsilon_{xy} = 0 \tag{2.6}$$

Из (1.11), (2.5) следует

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2, \ \sigma_y = \sigma_1 \lambda_2^2 + \sigma_2 m_2^2 \tag{2.7}$$

Из (2.7), (2.1) получим искомое условие предельного состояния в декартовой системе координат

$$\sigma_x + \sigma_y = -1 \tag{2.8}$$

Теория плоского предельного состояния при соотношениях (2.8), (2.6) рассматривалась в [1, 5].

Отметим, что условие пластичности вида (2.1) может быть получено из (1.3) при самых общих условиях. Запишем (1.3) в виде

$$\sigma_3 - \sigma = k + \sigma \operatorname{tg} \rho \tag{2.9}$$

Для случая плоской деформации положим

$$\sigma_3 = 1/2\,(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{2.10}$$

Тогда из (2.9), (2.10) сразу следует

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -2k/\operatorname{tg} \rho - \mathrm{const} \tag{2.11}$$

Из (2.11) и ассоциированности закона течения получим

$$\sigma_x + \sigma_y = \mathrm{const}, \ \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0, \ \varepsilon_{xy} = 0$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 013-16520).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д. Д.* К теории предельного состояния пластических пористых тел//Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 163—166.
2. *Соколовский В. В.* Статика сыпучей среды. М.: Гостехиздат, 1954. 276 с.
3. *Ишлинский А. Ю.* Гипотеза прочности формоизменения//Учен. зап. МГУ. 1940. Вып. 46. С. 117—124.
4. *Ишлинский А. Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 1. М.: Наука, 1986. С. 104—114.
5. *Горбунов А. А.* Некоторые задачи теории идеально вязкой среды//Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: Чуваш. ун-т. 1985. С. 37—45.

Чебоксары

Поступила в редакцию
13.XII.1993