МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 539.214; 539.374

© 1995 г. В. Д. КЛЮШНИКОВ

К ВОПРОСУ О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Результаты, полученные в [1] на основе функциональной термодинамики для изотермических процессов, обобщаются на случай произвольного неизотермического процесса. Исследована связь прироста пластической деформации с конфигурацией фазового пространства внутренних параметров, расширенного за счет абсолютной температуры T. Показано, что выводы, подобные изотермическому случаю, справедливы в расширенном девиаторном пространстве. Для обобщенной теории изотропного упрочнения остаются в силе методы [2], но, правда, определить все нужные термодинамические функционалы заданием одного, в данном случае — обобщения потенциала Гиббса из [1] не удалось.

1. Влияние температуры на пластическую деформацию обнаруживается уже в простом опыте. Растянутый при постоянной температуре в пластическую область стержень может довольно долго оставаться неподвижным (держать деформацию), но при повышении температуры наращивает необратимую деформацию, которая тут же прекращается при малом сбросе температуры, что отличает это явление от процесса ползучести.

Придерживаясь, как и в [1], концепции предельных поверхностей в расширенном пространстве деформаций, такую поверхность (поверхность деформаций) запишем в виде

$$\psi(\varepsilon, \varepsilon^p, T, N^p[\varepsilon, T]) = 0 \tag{1.1}$$

где $N^p[\varepsilon, T]$ — оператор, отражающий память о процессе деформирования и нагревания, изменяющийся только в активном процессе, когда при $\psi = 0$ имеем

$$\dot\varepsilon\partial\psi/\partial\varepsilon + \dot T\partial\psi/\partial T \geq 0 \tag{1.2}$$

На фигуре представлены сечения поверхности (1.1) плоскостями $T = \text{const}$ для состояния A (ψ_A) и близкого состояния B (ψ_B). Из точки O, вообще, не принадлежащей указанным плоскостям проведем замкнутый по ε и T цикл, проходящий через точки A и B.

Используя неравенство диссипации совместно с уравнением баланса

$$q^* = \sigma\dot\varepsilon/\rho - \dot f - s\dot T \geq 0 \tag{1.3}$$

для замкнутого цикла будем иметь

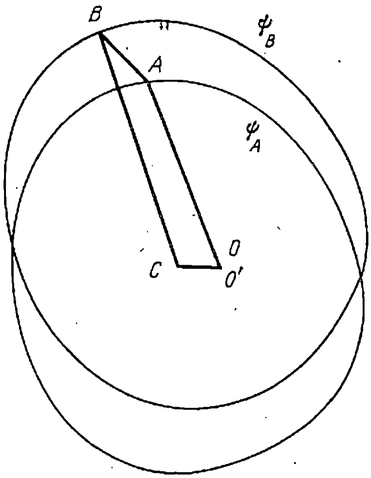
$$\frac{1}{\rho}\oint_{\varepsilon, T}\sigma\dot\varepsilon dt - \oint_{\varepsilon, T} s\dot T dt = \oint_{\varepsilon, T}\dot f dt + \oint_{\varepsilon, T} q^* dt$$

и вследствие гипотезы [1] о неотрицательности свободной энергии в замкнутом цикле

$$\oint_{\varepsilon, T}\dot f dt = \oint_{\varepsilon, T} df = \Delta f \geq 0$$

получим следующее неравенство:

$$J = \frac{1}{\rho}\oint_{\varepsilon, T}\sigma d\varepsilon - \oint_{\varepsilon, T} s dT \geq 0 \tag{1.4}$$



Здесь σ и ε тензоры напряжений и деформаций, ρ — принимаемая за постоянную плотность, q^* — скорость некомпенсированного тепла, s — энтропия. Отметим, что поскольку энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной, то в (1.4) она может отсчитываться от начала цикла.

Разложим, далее, деформацию и энтропию на упругие и пластические составляющие

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p,\ s = s^e + s^p \tag{1.5}$$

Для упругих составляющих имеем

$$\sigma_{ij} = \rho \partial f^e (\varepsilon^e, T)/\partial \varepsilon^e_{ij},\ s^e = -\partial f^e/\partial T \tag{1.6}$$

Подстановка разложения (1.5) в выражения для J из неравенства (1.4) дает

$$J = \frac{1}{\rho} \oint_{\varepsilon,\,T} \sigma d\varepsilon^p - \oint_{\varepsilon,\,T} s^p dT + \frac{1}{\rho} \oint_{\varepsilon,\,T} \sigma d\varepsilon^e - \oint_{\varepsilon,\,T} s^e dT \tag{1.7}$$

Примем, что продолжение траектории за точкой B до замыкания по ε и T идет по упругой области. Тогда вне зависимости от геометрии цикла пластические механизмы срабатывают только на отрезке AB, а интегралы, отвечающие упругим составляющим, в силу (1.6) и однозначности f^e в замкнутом цикле пропадут. Что же касается интегралов с пластическими составляющими, то они на продолжении траектории за точкой B остаются постоянными. Поэтому для замыкания цикла требуется догрузка и догрев (или охлаждение), которые ликвидировали бы эту невязку по ε, равную $-\Delta\varepsilon^p$, и по температуре: $-\Delta T$, т. е. величины, равные с обратным знаком тем, которые накоплены на отрезке AB. А для этого траекторию за точкой B надо вести через точку C (фигура), отстоящую от 0 на вектор $\Delta\varepsilon^e$ упругой деформации, равный $\Delta\varepsilon^p$. Тогда отрезок упругой траектории, лежащий на плоскости $T = \text{const}$, замкнет цикл по деформациям. Замыкание по температуре достигается перемещением изображающей точки по прямой, перпендикулярной чертежу на фигуре и ведущей от точки O' в точку O с упругим изменением энтропии. Как видно, конструкция выражения J такова, что указанные выше способы замыкания по ε и по T независимы и выражение (1.7) с учетом сказанного принимает вид

$$J = \frac{1}{\rho} \int_{AB} \sigma d\varepsilon^p - \frac{1}{\rho} \int_{CO'} \sigma d\varepsilon^e - \int_{AB} s^p dT + \int_{O'O} s^e dT$$

откуда при достаточно малом отрезке AB получим

$$J \cong (\sigma^A - \sigma^\circ)\, \Delta\varepsilon^p/\rho - (\Delta s^p - \Delta s^e)\, \Delta T \tag{1.8}$$

Второй член здесь имеет высший по сравнению с первым порядок малости. Поэтому для бесконечно малого отрезка AB в (1.8) остается лишь первый член, и, следовательно, неотрицательность J сводится к неравенству, совпадающему с основным неравенством изотермической пластичности:

$$(\sigma^A_{ij} - \sigma_{ij}^\circ)\, d\varepsilon^p_{ij} \geq 0 \tag{1.9}$$

Для получения из (1.9) выводов, подобных тем, что имеют место в изотермической пластичности, надо связать (1.9) с предельной поверхностью в пространстве деформаций, для чего надо выразить напряжения σ^A и σ° через деформации. Поскольку оба эти напряжения принадлежат упругой области (σ^A

на границе, а σ° внутри ψ_A), то их разность связана с деформацией законом термоупругости [3]:

$$\sigma_{ij}^A - \sigma_{ij}^\circ = 2\mu\,(\varepsilon_{ij}^A - \varepsilon_{ij}^\circ) + [\lambda\,(\varepsilon_{(1)}^A - \varepsilon_{(1)}^\circ) - \alpha\,(3\lambda + 2\mu)\,(T_A - T_0)\,\delta_{ij}$$

где μ, λ, α — постоянные, и неравенство (1.9) запишется в виде

$$2\mu\,(\varepsilon_{ij}^A - \varepsilon_{ij}^\circ)\,\alpha\varepsilon_{ij}^p + [\lambda\,(\varepsilon_{(1)}^A - \varepsilon_{(1)}^\circ) - \alpha\,(3\lambda + 2\mu)\,(T_A - T_0)]\,d\varepsilon_1^p \geq 0 \tag{1.10}$$

В пластичности обычно используется предположение о пластической несжимаемости $\varepsilon_{(1)}^p = \varepsilon_{ij}^p\delta_{ij} = 0$, как выражение того факта, что пластическая деформация является результатом сдвигов и следовательно, гипотезой кинематического порядка. Поэтому такое предположение должно быть приемлемым и для термопластичности. А тогда условие (1.10) сводится к неравенству

$$(\varepsilon_{ij}^A - \varepsilon_{ij}^\circ)\,d\varepsilon_{ij}^p = (Э_{ij}^A - Э_{ij}^\circ)\,dЭ_{ij}^p \geq 0 \tag{1.11}$$

В этом соотношении $Э_{ij}^A$ девиатор деформаций, отвечающий точке догрузки, обозначаемый в дальнейшем как $Э_{ij}$, а девиатор $Э_{ij}^\circ$ отвечает произвольной точке упругой области. Данное соотношение допускает векторное инвариантное представление

$$(Э - Э^\circ)\,dЭ^p \geq 0 \tag{1.12}$$

Входящие сюда вектора принадлежат девиаторному подпространству расширенного пространства $\boldsymbol{\varepsilon}$, T и, следовательно, выводы из (1.12) относительно векторных (тензорных) свойств прироста пластической деформации и качества предельной поверхности определяются свойствами этого подпространства. Но в указанном смысле эти свойства на основе (1.12) и при пластической несжимаемости совпадают с таковыми в изотермической пластичности. Предельная поверхность в этом подпространстве невогнута, а вектор приращения пластической деформации ортогонален этой поверхности в точке ее гладкости

$$dЭ^p = d\beta\,\mathrm{grad}\,\psi|_{T=\mathrm{const}} = d\beta\,\frac{\partial\psi}{\partial Э}\Big|_{T=\mathrm{const}} \tag{1.13}$$

Обычно (см. [4, 5]) эти положения по аналогии с изотермической пластичностью просто постулируются и не только для девиаторов, но и для самих тензоров.

В активном процессе, т. е. при выполнении (1.2), $\psi = d\psi = 0$ и при заданном операторе N^p, так же как и в изотермическом случае (см., например [6]) легко находится коэффициент $d\beta$. Так при задании

$$dN^p = Q_{ij}\,(Э^p, T)\,dЭ_{ij}^p \tag{1.14}$$

соотношение (1.13) будет представлено формулой

$$Э_{ij}^p = -\frac{(\partial\psi/\partial Э_{mn} dЭ_{mn} + \partial\psi/\partial T\,dT)}{(\partial\psi/\partial Э_{mn} + Q_{mn}\partial\psi/\partial N^p)\dfrac{\partial\psi}{\partial Э_{mn}}}\,\frac{\partial\psi}{\partial Э_{ij}} \tag{1.15}$$

2. Все проведенные выше рассуждения можно дословно повторить применительно к пространству напряжений. Так неизотермический процесс в рамках теории изотропного упрочнения может быть описан заданием предельной поверхности в пространстве напряжений

$$\varphi = p\,(r, T) - M^p = 0,\quad r^2 = S_{ij}S_{ij},\quad dM^p = (dЭ_{ij}^p dЭ_{ij}^p)^{1/2} \tag{2.1}$$

Термодинамический анализ на основе этой теории при $T = \mathrm{const}$ был проведен в [1] на основе совмещенного уравнения баланса и неравенства диссипации, представленного через потенциал Гиббса χ:

$$q^* = -\dot{\chi} - \varepsilon\dot{\sigma}/\rho - s\dot{T} \geq 0 \quad (\chi = f - \sigma\varepsilon/\rho) \tag{2.2}$$

Используя принцип градиентальности

$$d\text{Э}^p_{ij} = d\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial S_{ij}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial S_{ij}} = \frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial S_{ij}} = \frac{\partial p}{\partial r}\frac{S_{ij}}{r} \tag{2.3}$$

и условие $d\varphi = 0$ вместе с коэффициентом $d\alpha$ найдем

$$d\text{Э}^p = dp\frac{\mathrm{S}}{r}, \quad dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial T}dT \tag{2.4}$$

Введем новую функцию

$$m = m(r, T) = \int \frac{dp}{r} \tag{2.5}$$

с помощью которой представим (2.4) в виде

$$\text{Э}^p = \int \mathrm{S}dm = \mathrm{S}m - \int m d\mathrm{S} \tag{2.6}$$

В пластичности вместо естественного времени в качестве параметра нагружения можно взять любой монотонно возрастающий в активном процессе скаляр. В данном случае в качестве такового естественно принять параметр p, так что в любом конкретном процессе надо полагать $r = r(p)$, $T = T(p)$, $\cdots$ и понимать точку над буквой как производную по параметру p. Обозначим

$$\text{Э}^{0*} = m\mathrm{S}, \quad \text{Э}^* = -\int m d\mathrm{S} \tag{2.7}$$

и заметим, что Э^{0*} представляет некоторую дополнительную к Э^0 упругость, так что для суммы этих членов $q^* = 0$, а энтропия вычисляемая как в термоупругости, превращает уравнение баланса в тождество. Следовательно для выполнения принципа термодинамического согласования надо удовлетворить (2.2) только для части соотношения пластичности, представленным вторым из уравнений (2.7), т. е. условие

$$q^* = -\dot{\chi}^* - \text{Э}^*\dot{\mathrm{S}}/\rho - s^*\dot{T} \geq 0 \tag{2.8}$$

Зададим оставшуюся часть потенциала Гиббса в форме

$$\rho\chi^* = \text{Э}^*\text{Э}^*/2m \tag{2.9}$$

Тогда с учетом того, что на основании (2.7) $\dot{\text{Э}}^* = -m\dot{\mathrm{S}}$, из соотношения (2.9) следует

$$\rho\dot{\chi}^* = \text{Э}^*\dot{\text{Э}}^*/m + \tfrac{1}{2}\text{Э}^*\text{Э}^*(1/m)^{\cdot} = \tag{2.10}$$

$$= -\text{Э}^*\dot{\mathrm{S}} + \tfrac{1}{2}\text{Э}^*\text{Э}^*(1/m)_T'\dot{T} + \tfrac{1}{2}\text{Э}^*\text{Э}^*(1/m)_r'\dot{r}$$

что при подстановке в (2.8) дает

$$\rho(s\dot{T} + q^*) = -\tfrac{1}{2}\text{Э}^*\text{Э}^*(1/m)_T'\dot{T} - \tfrac{1}{2}\text{Э}^*\text{Э}^*(1/m)_r'\dot{r} \tag{2.11}$$

Отсюда, как это напрашивается по аналогии с классическими примерами сред, коэффициент при $\dot{T}$ надо было бы приписать энтропии, а остаток отнести к скорости некомпенсированного тепла. Но тогда нашлись бы процессы, для которых так определенное q^* оказалось отрицательным, поскольку теперь активность процесса определяется не условием $\dot{r} > 0$, а условием $\dot{p} > 0$, которое включает как $\dot{r}$, так и $\dot{T}$. Поэтому разъединять члены таким образом в (2.11) нельзя, и вопрос о долях правой части (2.11), относящихся к энтропии и некомпенсированному теплу, остается открытым, так же как и вопрос о единственности самого термодинамического дополнения. Возможно, что обнаруженный выше дефект связан с выбором потенциала Гиббса для пластичности подобно таковому для соотношения Больцмана [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17658).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клюшников В. Д.* Проблема определяющих соотношений и современная термомеханика//Изв. РАН. МMT. 1995. № 1. С. 52—72.

2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды М.: Наука, 1973. Т. 2. 584 с.

4. *Green A. E., Naghdi P. M.* A general theory of an elastic-plastic continuum/Arch. Ration. Mech. and Analysic 1965. V. 18. No. 4. P. 251—281.

5. *Lehmann Th.* Some thermodynamic considerations of phenomenological theory of non-isotermal elastic-plastic deformations//Arch. Mech. 1972. V. 24. No. 5/6. P. 975—989.

6. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.XI.1994