МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 539.3:534.1

 А. В. КОНОНОВ, А. В. МЕТРИКИН

ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ДВУМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Динамические процессы, протекающие в упругих системах, взаимодействующих с движущимися объектами, возбуждают в последнее время все более пристальный интерес исследователей [1—5]. Это связано, в первую очередь, с появлением скоростного наземного транспорта и внедрением технологий, использующих быстродействующие машины и механизмы. В таких конструкциях скорость движения объекта становится сравнимой со скоростью распространения волн, что ведет к резкому возрастанию интенсивности процессов волнообразования, обусловленных движущимся объектом. Типичным является случай, когда упругая конструкция неоднородна, и именно ее неоднородность приводит к возбуждению объектом упругих волн. В работах [6, 7] было рассмотрено переходное излучение упругих волн, возникающее при пересечении равномерно движущимся объектом области неоднородности упругой системы. Как показано в данной работе, процесс волнообразования происходит не только при переходе объекта через область неоднородности, но и при его движении вблизи таких областей. По аналогии с электродинамикой [8], возникающее при этом излучение названо дифракционным.

В настоящей работе исследуется равномерное и прямолинейное движение постоянной нагрузки вблизи закрепления. В качестве модели упругой системы выбрана подпружиненная мембрана, закрепленная по полупрямой. В интегральной форме получено точное решение задачи. Показано, что при движении нагрузки вблизи закрепления возникает дифракционное излучение упругих волн. Получено выражение для спектрально-угловой плотности энергии излучения и исследована зависимость диаграммы направленности излучения от параметров задачи.

1. Рассмотрим неограниченную мембрану, лежащую на упругом основании жесткости k и закрепленную по полупрямой $\xi: \{y = 0,\ x > 0\}$. Пусть вдоль мембраны, со скоростью $\mathbf{v} = (v_x,\ v_y) = \mathrm{const}$, равномерно и прямолинейно движется постоянная нагрузка P (фиг. 1). Согласно [9], краевая задача, описывающая малые колебания мембраны, в этом случае запишется в виде

$$\Delta U - U_{tt}/c^2 - \mu^2 U = F\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a} - \mathbf{v}t) \tag{1.1}$$

$$U(x, y, t)|_{\xi} = 0 \quad (-\infty < t < +\infty,\ -\infty < x \text{ и } y < +\infty)$$

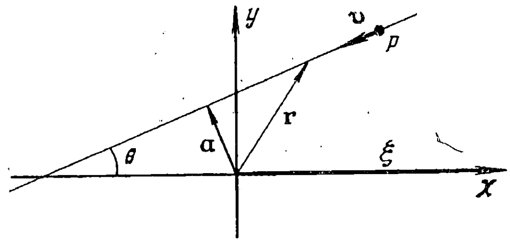
Здесь Δ — двумерный лапласиан, $c^2 = N/\rho$, $\mu^2 = k/N$, N — натяжение мембраны, ρ — ее поверхностная плотность, $\mathbf{a}$ — расстояние от начала координат до траектории движения нагрузки, $\delta(\ldots)$ — дельта функция, $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор.

Решение (1.1) будем искать в виде $U = U^f + U^r$, где U^f описывает стационарный прогиб мембраны, движущийся вместе с нагрузкой в случае, когда мембрана не закреплена (в дальнейшем — собственное поле нагрузки), а U^r описывает поле дифракционного излучения, возникающее при движении нагрузки вблизи закрепления. Выражение для U^f является решением следующей задачи:

$$\Delta U^f - U^f_{tt}/c^2 - \mu^2 U^f = F\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a} - \mathbf{v}t)$$

$$U^f \to 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{a} - \mathbf{v}t| \to \infty \tag{1.2}$$

Соответственно, краевая задача для U^r будет иметь вид



Фиг. 1

$$\Delta U^r - U^r_{tt}/c^2 - \mu^2 U^r = 0 \tag{1.3}$$

$$U^r(x, y, t)|_\xi = -U^f(x, y, t)|_\xi$$

$$U^r(x, y, t) \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to \infty$$

Найдем собственное поле нагрузки $U^f(\mathbf{r}, t)$. Применяя к (1.2) интегральное преобразование Фурье, получим выражение, описывающее собственное поле в пространстве изображений

$$V^f_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{2\pi F\delta(\omega - \mathbf{kv})}{(-|\mathbf{k}|^2 + (\omega/c)^2 - \mu^2)} \exp(-i\mathbf{ka})$$

$$V^f_{\omega, \mathbf{k}} = \int\limits_{+\infty}^{-\infty}\!\!\int U^f(\mathbf{r}, t) \exp(i(\omega t - \mathbf{kr}))\, d\mathbf{r}dt$$

где $\mathbf{ab}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Соответственно оригинал для $U^f(\mathbf{r}, t)$, после интегрирования по ω, будет иметь вид

$$U^f(\mathbf{r}, t) = -\frac{F}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\exp(i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{a} - \mathbf{v}t))}{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2 - (\mathbf{kv}/c)^2}\, d\mathbf{k} \tag{1.4}$$

$$d\mathbf{k} = dk_x dk_y$$

Вводя в (1.4) новые переменные интегрирования по правилу $\omega = \mathbf{kv}$, $\eta = \mathbf{ka}/|\mathbf{a}|$, перепишем (1.4) в виде

$$U^f(\mathbf{r}, t) = -\frac{F}{4\pi^2 v} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\exp(i(\omega(\mathbf{vr}/v^2 - t) + \eta(\mathbf{ar}/a - a)))}{\eta^2 + \mu^2 + (\omega^2(1 - \beta^2)/v^2)}\, d\omega d\eta$$

$$\beta = v/c \tag{1.5}$$

Интегрируя (1.5) по η, получим искомое выражение для U^f:

$$U^f(\mathbf{r}, t) = -\frac{F}{4\pi v} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i(\omega t + (\omega(\mathbf{vr})/v^2) - i\lambda(\omega)\,|(\mathbf{ar})/a - a|))}{\lambda(\omega)}\, d\omega$$

$$\lambda(\omega) = \left(\mu^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - \beta^2)\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

Перейдем к отысканию поля дифракционного излучения $U^r(\mathbf{r}, t)$. Применяя к (1.3) интегральное преобразование Фурье по координате x и времени t, получим в изображениях

$$\frac{d^2}{dy^2} V^r_{q, \omega} - \left(q^2 + \mu^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) V^r_{q, \omega} = 0 \tag{1.7}$$

$$V^r_{q, \omega}(q, y, \omega)|_\xi = -V^f_{q, \omega}(q, y, \omega)|_\xi \tag{1.8}$$

$$V^{r,f}_{q,\omega} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\omega t - qx))\, U^{r,f}(x, y, t)\, dt dx$$

Решение (1.7) найдем, используя следующее условие излучения: поток энергии дифракционного излучения должен быть направлен от закрепления ξ. Этому условию удовлетворяет решение (1.6) вида

$$V^r_{q,\omega} = A(q, \omega) \exp(-\gamma |y|) \tag{1.9}$$

$$\gamma = (q - b)^{1/2} (q + b)^{1/2}, \quad b = (\omega^2/c^2 - \mu^2)^{1/2}$$

$$\operatorname{Re} \gamma > 0 \quad \forall q$$

Разрезы плоскости комплексного переменного q, обеспечивающие выполнение условия $\operatorname{Re}\gamma > 0 \quad \forall q$, проведены от точек $\pm b$ до бесконечности вдоль лучей α_+: $\{\operatorname{Im} q = \operatorname{Im}(+b), \ \operatorname{Re} q \geq \operatorname{Re}(+b)\}$ и α_-: $\{\operatorname{Im} q = \operatorname{Im}(-b), \ \operatorname{Re} q \leq \operatorname{Re}(-b)\}$ соответственно.

Для отыскания неизвестной функции $A(q, \omega)$ воспользуемся методом, предложенным в [10], следуя которому запишем систему интегральных уравнений относительно $A(q, \omega)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(iqx)\, A(q, \omega)\, dq = \frac{F}{2v\lambda(\omega)} \exp\left(-i \frac{\omega}{v} \cos\theta x - \lambda(\omega) (\sin\theta x + a) \right)$$

$$\text{при } y = 0, \quad x > 0 \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(iqx)\, \gamma A(q, \omega)\, dq = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x < 0 \tag{1.11}$$

Уравнение (1.10) получено путем применения обратного преобразования Фурье по координате x к граничному условию (1.8). Уравнение (1.11) является следствием непрерывности нормальной производной на полупрямой ($y = 0$, $x < 0$), которая принадлежит свободной поверхности мембраны.

Из (1.11) следует, что функция $\gamma A(q, \omega)$ регулярна в нижней полуплоскости q ($\operatorname{Im} q < 0$) и не имеет там полюсов. Поэтому $A(q, \omega)$ должна иметь вид

$$A(q, \omega) = CL(q) \frac{1}{\gamma} \tag{1.12}$$

Здесь C — константа, не зависящая от q, $L(q)$ — регулярная функция, не имеющая полюсов в нижней полуплоскости q. Подбирая вид функции $L(q)$ таким образом, чтобы удовлетворить уравнению (1.10), найдем

$$L(q) = \frac{(q - b)^{1/2}}{q - k_0}, \quad k_0 = i\lambda(\omega) \sin\theta - \frac{\omega}{v} \cos\theta \tag{1.13}$$

Находя C путем подстановки (1.12), (1.13) в (1.10), получим выражение для $A(q, \omega)$:

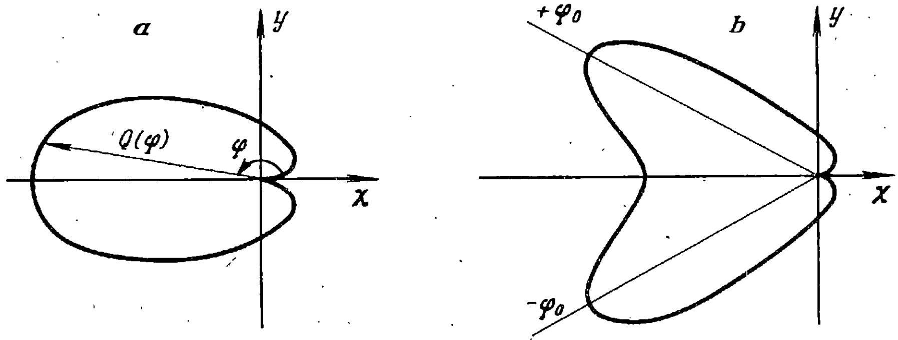
$$A(q, \omega) = -\frac{iF (k_0 c + (\omega^2 - h^2)^{1/2})^{1/2} \exp(-\lambda(\omega) a/c)}{2\beta\lambda(\omega) (q - k_0) (qc + (\omega^2 - h^2)^{1/2})^{1/2}} \tag{1.14}$$

$$h^2 = \mu^2 c^2 = \frac{k}{\rho}, \quad \lambda(\omega) = \left(h^2 + \omega^2 \left(\frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \right) \right)^{1/2}$$

Таким образом, согласно (1.9) решение задачи (1.3) будет иметь вид

$$U^r(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(qx - \omega t) - \gamma |y|)\, A(q, \omega)\, dq d\omega \tag{1.15}$$

где $A(q, \omega)$ определяется выражением (1.14).



Фиг. 2

Согласно теореме существования и единственности решения линейной краевой задачи для уравнений гиперболического типа [10], выражение (1.15) является единственным решением задачи (1.3).

2. Найдем энергию дифракционного W^r излучения, воспользовавшись гамильтоновским методом, изложенным в [11]. Согласно этому методу, излученный волновой пакет рассматривается при больших временах t $(t \to +\infty)$, когда он отошел далеко от закрепления, и в среднем по пространству поле излучения и собственное поле практически не интерферируют. Следовательно, выражение для W^r может быть записано в виде:

$$W^r = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon dxdy \tag{2.1}$$

где $\varepsilon = (\rho\,(U_t^r)^2 + N\,(U_x^r)^2 + (U_y^r)^2) + k\,(U^r)^2)/2$ — плотность энергии поля излучения.

Для вычисления (2.1) используем представление U^r в виде (1.15). Подставляя (1.15) в (2.1), получим

$$W^r = \frac{\rho}{32\pi^4} \int \underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\cdots}} \int \{(-i\omega)\,(-i\Omega) + c^2\,(iq)\,(i\varkappa) + c^2\,(\gamma\alpha) + h^2\}$$

$$A\,(q, \omega)\,A\,(\varkappa, \Omega)\,\exp\,(-i\,(\Omega + \omega)\,t + i\,(q + \varkappa)\,x - (\gamma + \alpha)\,|y|)\,dqd\varkappa d\omega d\Omega dxdy$$

$$\alpha = (\varkappa^2 - ((\Omega^2/c^2) - \mu^2))^{1/2} \tag{2.2}$$

Интегрирование этого выражения по x дает δ-функцию $2\pi\delta\,(\varkappa + q)$, позволяющую вычислить интеграл по $\varkappa$. Интегрируя затем по y и по Ω, получим

$$W^r = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \{\rho c\,(\omega^2 - q^2c^2 - h^2)^{1/2}\,A\,(q, \omega)\,A\,(-q, -\omega)\}\,dqd\omega \tag{2.3}$$

Введем угол φ между волновым вектором излучения $\mathbf{k} = (q, p)$ и положительным направлением оси x. В этом случае

$$\cos\varphi = \frac{q}{|\mathbf{k}|} = \frac{qc}{(\omega^2 - h^2)^{1/2}}, \quad \sin\varphi = \frac{p}{|\mathbf{k}|} = \frac{(\omega^2 - q^2c^2 - h^2)^{1/2}}{(\omega^2 - h^2)^{1/2}}$$

Учитывая эти соотношения, перепишем (2.3) в виде

$$W^r = \int\limits_h^\infty \int\limits_0^\pi Q\,(\omega, \varphi, \theta)\,d\omega d\varphi$$

$$Q\,(\omega, \varphi, \theta) = \frac{\rho F^2 c^2 \omega f\,(\omega - \beta f\cos\theta)\,(\sin\,(\varphi/2))^2\,\exp\,(-2a\,(h^2 + \omega^2\nu)/c)}{4\pi^2\,(h^2 + \omega^2\nu)\,((\omega\cos\theta + \beta f\cos\varphi)^2 + (\omega^2 - \beta^2 f)\,(\sin\theta)^2)\beta}$$

$$f = (\omega^2 - h^2)^{1/2}, \quad \nu = (1 - \beta^2)/\beta^2 \tag{2.4}$$

Функция $Q(\omega, \varphi, \theta)$ описывает спектрально-угловое распределение энергии дифракционного излучения в зависимости от угла θ. Анализ (2.4) показал, что качественный вид диаграммы направленности излучения (зависимости $Q(\varphi)$ при $\omega = \text{const}$, $\theta = \text{const}$), зависит от параметров задачи. При скоростях движения нагрузки, удовлетворяющих условию $\beta = v/c < \beta_0 = \omega(2 + \cos\theta)/(3 + (\sin\theta)^2) \times \times (\omega^2 - h^2)^{1/2}$ излучение носит дипольный характер $Q(\omega, \varphi, \theta) \sim (\sin(\varphi/2))^2$ (фиг. 2, *а*), а при $\beta > \beta_0$ излучение имеет два максимума (фиг. 2, *в*) под углами

$$\varphi_0 = \pm \arccos\left\{1 - \frac{\omega + \beta(\omega^2 - h^2)^{1/2}\cos\theta}{\beta(\omega^2 - h^2)^{-1/2}}\right\}$$

При $\beta \to 1$, $\omega \to \infty$ максимумы излучения смещаются к углам $\varphi = \pm(\pi + \theta)$. Этим углам соответствует излучение в направлении движения нагрузки (излучение вперед) и излучение в зеркально симметричном относительно закрепления направлении.

В настоящей работе дифракционное излучение рассмотрено на примере равномерного и прямолинейного движения нагрузки вдоль мембраны, закрепленной по полупрямой. Данная модель позволила выявить, что причиной возникновения излучения является рассеяние собственного поля нагрузки на закреплении, а также изучить спектральный состав излучения. На примере рассмотренной задачи было показано, что излучение возникает не только при пересечении равномерно и прямолинейно движущимся объектом закрепления, но и при его движении вблизи закрепления. Серьезным недостатком модели с точки зрения механики является бесконечный прогиб упругой системы под объектом. Устранить данный недостаток можно двумя способами: учесть конечность размеров объекта либо ввести в рассмотрение изгибную жесткость направляющей. На этом пути появится возможность ответить на следующие, актуальные для практики вопросы, связанные с дифракционным излучением упругих волн: каковы динамические напряжения в процессе излучения, велика ли реакция излучения, действующая на движущийся объект, и может ли в процессе излучения быть нарушен контакт объекта и направляющей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fryba L.* Vibration of solids and structures under moving loads.— Prague: Academia, 1972. 484 p.
2. *Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 232 с.
3. *Cai C. W., Cheung Y. K., Chan H. C.* Dynamic response of infinite continuous beams subjected to a moving forse — an exact method.//J. Sound and Vibrat. 1988. V. 123. No. 3. P. 461—472.
4. *Duffy D. G.* The response of an ifinite railroad track to a moving, vibrating mass.//Trans. Asme. J. Appl. Mech. 1990. V. 57. No. 1. P. 66—73.
5. *Весницкий А. И.* Волновые эффекты в упругих системах//Волновая динамика машин. М.: Наука, 1991. С. 15—30.
6. *Весницкий А. И., Метрикин А. В.* Переходное излучение в одномерных упругих системах//ПМТФ. 1992. № 2. С. 62—67.
7. *Кононов А. В., Метрикин А. В.* Эффект переходного излучения в двумерной упругой системе//Изв. АН. МТТ. 1994. № 6. С. 95—100.
8. *Болотовский Б. М., Воскресенский Т. В.* Дифракционное излучение//Успехи физ. наук. 1966. Т. 88. Вып. 2. С. 209—251.
9. *Маланов С. Б.* Постановка задачи согласованного движения сосредоточенного объекта вдоль двумерной направляющей//Волновые задачи механики. Н. Новгород: Изд-е Нф ИМАШ АН СССР, 1991. С. 11—18.
10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
11. *Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.* Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.

Н. Новгород

Поступила в редакцию 15.IX.1994