МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 531.36:351.53

© 1996 г. А. П. МАРКЕЕВ

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ДЕМПФИРОВАННОГО МАЯТНИКА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Исследуются нелинейные колебания маятника, точка подвеса которого совершает гармонические колебания вдоль вертикали. Амплитуда колебаний точки подвеса маятника мала по сравнению с его длиной. К маятнику приложен малый демпфирующий момент сил вязкого трения. Предполагается, что удвоенная частота собственных колебаний маятника равна или близка частоте колебаний точки подвеса. При помощи канонических преобразований и методов Ляпунова и Пуанкаре решена задача о существовании и устойчивости колебаний маятника с периодом, равным удвоенному периоду колебаний его точки подвеса. Некоторые исследования субгармонических колебаний рассматриваемого маятника проводились ранее в [1—4].

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Пусть маятник представляет собой абсолютно твердый невесомый стержень длины l, вращающийся вокруг одного своего конца и несущий на другом конце точечную массу m. Все нижеследующие уравнения и результаты применимы и для физического маятника; необходимо только величину l заменить на его приведенную длину, равную ρ^2/d, где ρ — радиус инерции, d — расстояние от центра тяжести до точки подвеса.

Движение маятника описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{\alpha} + 2k\dot{\alpha} + (\omega_0^2 - \ddot{z}_0/l)\sin\alpha = 0 \tag{1.1}$$

где точками обозначено дифференцирование по времени t, k — коэффициент демпфирования, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ — частота малых колебаний маятника в окрестности его устойчивого равновесия $\alpha = 0$ при отсутствии демпфирования и вибраций точки подвеса, z_0 — смещение точки подвеса O от некоторого фиксированного положения O_* (фиг. 1).

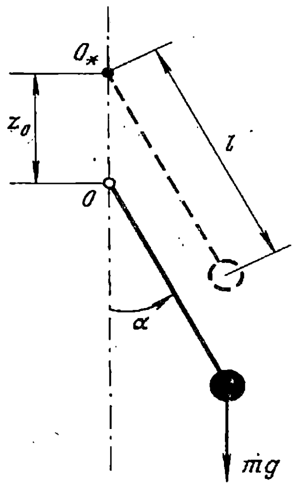
Пусть колебания точки подвеса вдоль вертикали происходят по гармоническому закону с амплитудой a и частотой Ω: $z_0 = a\cos\Omega t$. Цель данной работы состоит в исследовании нелинейных колебаний маятника в предположении, что отношение ω_0/Ω близко или равно ½. Основное внимание уделено устойчивости решения $\alpha = 0$ уравнения (1.1), отвечающего равновесию маятника на вертикали и задаче о существовании и устойчивости периодических колебаний маятника с частотой ½ Ω. При этом предполагается, что амплитуда колебаний точки подвеса и коэффициент демпфирования малы.

Введем обозначения $\varepsilon = al^{-1}$, $\delta = kla^{-1}\Omega^{-1}$, $\omega = \omega_0\Omega^{-1}$ и перейдем к новой независимой переменной $\eta = \Omega t$. Уравнение (1.1) можно записать в виде следующей эквивалентной ему системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

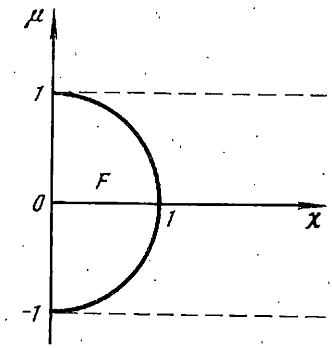
$$d\alpha/d\eta = \partial H/\partial p_\alpha, \quad dp_\alpha/d\eta = -\partial H/\partial\alpha - 2\varepsilon\delta p_\alpha \tag{1.2}$$

$$H = ½\, p_\alpha^2 - (\omega^2 + \varepsilon\cos\eta)\cos\alpha$$

Величина ε — малый параметр задачи.



Фиг. 1



Фиг. 2

Если сделать каноническую замену переменных $\alpha = \sqrt{\varepsilon/\omega}\, q$, $p_\alpha = \sqrt{\varepsilon\omega}\, p$, то уравнения движения (1.2) примут вид

$$dq/d\eta = \partial H/\partial p, \quad dp/d\eta = -\partial H/\partial q - 2\varepsilon\delta p \tag{1.3}$$

$$H = {}^1\!/_2\, \omega\, (q^2 + p^2) + \varepsilon\, ({}^1\!/_2\, \omega^{-1} \cos \eta q^2 - {}^1\!/_{24}\, q^4) + O\,(\varepsilon^2)$$

2. Преобразование уравнений движения. Пусть $\omega = {}^1\!/_2 + \varepsilon\beta$. Используя классическую теорию возмущений [5], сделаем следующую каноническую замену переменных $q, p \to x, y$, приводящую уравнения (1.3) к простейшей форме, отражающей резонансный характер рассматриваемой задачи:

$$q = x + {}^1\!/_{96}\, \varepsilon\, (48 \sin \eta y + 5x^3 + 9xy^2) + O\,(\varepsilon^2)$$

$$p = y - {}^1\!/_{32}\, \varepsilon\, (48 \sin \eta x + 5x^2 y + y^3) + O\,(\varepsilon^2)$$

В переменных x, y уравнения движения (1.3) приобретают вид

$$dx/d\eta = \partial H/\partial y + O\,(\varepsilon^2), \quad dy/\partial\eta = -\partial H/\partial x - 2\varepsilon\delta y + O\,(\varepsilon^2) \tag{2.1}$$

$$H = {}^1\!/_2\, \omega\, (x^2 + y^2) + \varepsilon\, [-{}^1\!/_{64}\, (x^2 + y^2)^2 + {}^1\!/_4 \cos \eta\, (x^2 - y^2) - {}^1\!/_2 \sin \eta xy]$$

Величины $O\,(\varepsilon^2)$ в (2.1) — ряды, начинающиеся с первых степеней x, y.

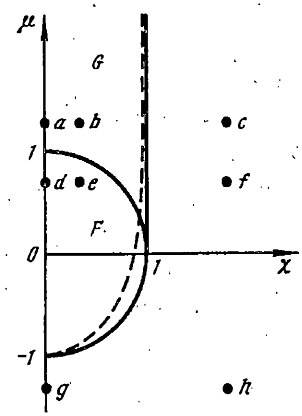
В канонически сопряженных переменных φ, r, вводимых равенствами $x = \sqrt{2r} \sin \varphi$, $y = \sqrt{2r} \cos \varphi$, уравнения (2.1) записываются более компактно

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{\partial H}{\partial r} + \varepsilon\delta \sin 2\varphi + O\,(\varepsilon^2), \quad \frac{dr}{d\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} - 4\varepsilon\delta r \cos^2 \varphi + O\,(\varepsilon^2) \tag{2.2}$$

$$H = \omega r - {}^1\!/_{16}\, \varepsilon\, [r^2 + 8r \cos\,(2\varphi - \eta)]$$

Каноническая замена переменных $\varphi_* = \varphi + \varepsilon\delta \cos 2\varphi + O\,(\varepsilon^2)$, $r_* = r + 2\varepsilon\delta r \sin 2\varphi + O\,(\varepsilon^2)$ уничтожает быстро осциллирующую составляющую в диссипативных членах правых частей уравнений (2.2), имеющих порядок ε. При этом гамильтонова часть уравнений сохраняет свою форму, диссипативные же члены изменяются так, что в первом уравнении они уничтожаются, а во втором принимают вид $(-2\varepsilon\delta r_*)$.

Перейдя еще к вращающейся системе координат по формулам $\varphi_* = {}^1\!/_2\, \eta - \theta$, $r_* = 8\rho$ и введя новую независимую переменную $\tau = \varepsilon\eta/2$, получаем окончательно уравнения движения в следующей форме:



Фиг. 3

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\frac{\partial\gamma_0}{\partial\rho}+O(\varepsilon),\quad \frac{d\rho}{d\tau}=-\frac{\partial\gamma_0}{\partial\theta}-2\chi\rho+O(\varepsilon) \tag{2.3}$$

$$\gamma_0=-\mu\rho+\rho\cos 2\theta+\rho^2,\quad \mu=2\beta,\quad \chi=2\delta$$

Величины $O(\varepsilon)$ в (2.3) имеют период $2\pi\varepsilon$ по τ (или $4\pi\Omega^{-1}$ по t).

В декартовых канонических сопряженных переменных $x_1=\sqrt{2\rho}\cos\theta$, $x_2=\sqrt{2\rho}\sin\theta$ уравнения (2.3) принимают вид

$$\frac{dx_1}{d\tau}=\frac{\partial H_0}{\partial x_2}-\chi x_1+O(\varepsilon),\quad \frac{dx_2}{\partial\tau}=-\frac{\partial H_0}{\partial x_1}-\chi x_2+O(\varepsilon) \tag{2.4}$$

$$H_0=\tfrac12(\mu-1)x_1^2+\tfrac12(\mu+1)x_2^2-\tfrac14(x_1^2+x_2^2)^2$$

Величины $O(\varepsilon)$ в (2.4) — это ряды, начинающиеся с членов первых степеней относительно x_1, x_2.

Если в (2.3) и в (2.4) отбросить величины $O(\varepsilon)$, то получим две формы «невозмущенной» системы:

$$d\theta/d\tau=-\mu+\cos 2\theta+2\rho,\quad d\rho/d\tau=2\rho(\sin 2\theta-\chi) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} dx_1/d\tau&=-\chi x_1+(\mu+1)x_2-(x_1^2+x_2^2)x_2\\ dx_2/d\tau&=-(\mu-1)x_1-\chi x_2+(x_1^2+x_2^2)x_1\end{aligned} \tag{2.6}$$

Полученная невозмущенная система важна не только в рассматриваемой задаче о движении маятника с вибрирующим подвесом. Система (2.5) (или (2.6)) типична для задач о нелинейных колебаниях близкой к гамильтоновой периодической по времени системе с одной степенью свободы, когда диссипативные силы являются силами вязкого трения и имеет место параметрический резонанс. Алгоритм приведения этих задач к рассмотрению системы (2.5) (или (2.6)) аналогичен изложенному выше алгоритму преобразования системы (1.2) (см. также [6]).

3. Анализ невозмущенной системы. Движение, описываемое невозмущенной системой при отсутствии диссипации ($\chi=0$) подробно исследовано в [7]. Здесь рассмотрим случай $\chi>0$. Сразу отметим, что в этом случае у невозмущенной системы нет замкнутых фазовых траекторий. Это следует из критерия Бендиксона [8], так как дивергенция вектора, первая и вторая компоненты которого совпадают с правыми частями соответствующих уравнений системы (2.6), равна $-2\chi\neq 0$. Периодическими движениями невозмущенной системы могут быть только ее положения равновесия.

а). Равновесие $x_1 = x_2 = 0$. При любых χ и μ невозмущенная система (2.6) имеет положение равновесия $x_1 = x_2 = 0$. Из характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2\chi\lambda + \chi^2 + \mu^2 - 1 = 0 \tag{3.1}$$

линеаризованной системы (2.6) следует, что для значений параметров χ, μ, лежащих внутри полукруга $\chi > 0$, $\chi^2 + \mu^2 < 1$ (область F на фиг. 2), равновесие $x_1 = x_2 = 0$ неустойчиво, а вне этого полукруга, где $\chi > 0$, $\chi^2 + \mu^2 > 1$, имеет место асимптотическая устойчивость. В фазовой плоскости x_1, x_2 начало координат будет седлом внутри полукруга F, а вне F — фокусом при $\chi > 0$, $|\mu| > 1$ и устойчивым узлом при $\chi > 0$, $|\mu| \leq 1$.

В предельном случае гамильтоновой системы ($\chi = 0$) особая точка $x_1 = x_2 = 0$ будет (см. [7, 9]) центром при $\mu > 1$ или $\mu \leq -1$, сложным седлом при $\mu = 1$ и седлом при $|\mu| < 1$.

Рассмотрим еще граничные значения параметров χ, μ, лежащие на дуге окружности $\chi > 0$, $\chi^2 + \mu^2 = 1$. В этом случае уравнение (3.1) имеет корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -2\chi$. Для выяснения характера особой точки $x_1 = x_2 = 0$ нужно рассмотреть полную нелинейную систему (2.6). Сделав в этой системе замену переменных $x_1 = (\mu + 1)(x + y)$, $x_2 = \chi(x - y)$, приведем ее к виду, удобному для исследования устойчивости в критическом случае одного нулевого корня [10]:

$$dx/d\tau = 2(\mu + 1)\chi^{-1}(\mu x + y)(x^2 + \mu xy + y^2)$$

$$dy/d\tau = -2\chi y - 2(\mu + 1)\chi^{-1}(x + \mu y)(x^2 + \mu xy + y^2)$$

Приравняв нулю правую часть второго уравнения и разрешив полученное соотношение относительно y, получим ряд по степеням x: $y = -(\mu + 1)\chi^{-2}x^3 + \ldots$. Подставив это значение y в правую часть первого уравнения, получим ее в виде ряда $\Delta_3 x^3 + \Delta_5 x^5 + \ldots$, где $\Delta_3 = 2\mu(\mu + 1)\chi^{-1}$, $\Delta_5 = -2(\mu + 1)^2(\mu^2 + 1)\chi^{-3}$. Величина Δ_3 положительна на верхней части ($\mu > 0$) рассматриваемой полуокружности и отрицательна на нижней ее части ($\mu < 0$). В первом случае особая точка $x_1 = x_2 = 0$ является сложным седлом, а во втором — сложным устойчивым узлом [11]. При $\mu = 0$ ($\chi = 1$) особая точка $x_1 = x_2 = 0$ также будет сложным устойчивым узлом, так как в этом случае величина $\Delta_3 = 0$, а $\Delta_5 = -2 < 0$. Таким образом [10], на части граничной кривой, где $\chi > 0$, $\mu > 0$, $\chi^2 + \mu^2 = 1$, равновесие $x_1 = x_2 = 0$ неустойчиво, а на той части, где $\chi > 0$, $\mu \leq 0$, $\chi^2 + \mu^2 = 1$ — асимптотически устойчиво.

б). Другие равновесия. Теперь рассмотрим положения равновесия невозмущенной системы, отличные от начала координат. Соответствующие значения величин ρ, θ обозначим через ρ_*, θ_*. Согласно (2.5) они удовлетворяют системе уравнений

$$\sin 2\theta_* = \chi, \quad \cos 2\theta_* = \mu - 2\rho_* \tag{3.2}$$

Следовательно величина ρ_* должна быть положительным корнем уравнения

$$4\rho_*^2 - 4\mu\rho_* + \chi^2 + \mu^2 - 1 = 0 \tag{3.3}$$

При известном ρ_* величина θ_* определяется из (3.2) с точностью до величины, кратной π.

В областях плоскости χ, μ, определяемых системами неравенств $\chi > 1$, $\mu \geq 0$ и $\chi^2 + \mu^2 \geq 1$, $\mu < 0$, уравнение (3.3) не имеет положительных корней. При $\chi = 1$, $\mu > 0$ оно имеет двукратный положительный корень $\rho_* = \mu/2$.

В полукруге F (фиг. 2 и 3) существует один положительный корень (при этом второй корень $\rho_* = \rho_2$ отрицателен):

$$\rho_* = \rho_1 = \tfrac{1}{2}\,(\mu + \sqrt{1 - \chi^2}) \tag{3.4}$$

В области G, определяемой неравенствами $\chi^2 + \mu^2 > 1$, $\mu > 0$, $0 < \chi < 1$ (фиг. 3), уравнение (3.3) имеет два положительных корня ($\rho_1 > \rho_2$):

$$\rho_* = \rho_1 = \tfrac{1}{2}\,(\mu + \sqrt{1 - \chi^2}), \quad \rho_* = \rho_2 = \tfrac{1}{2}\,(\mu - \sqrt{1 - \chi^2}) \tag{3.5}$$

На дуге окружности, разделяющей области F и G, существует один положительный корень $\rho_* = \rho_1 = \mu$.

Для исследования устойчивости равновесий ρ_*, θ_* и выяснения характера соответствующих им особых точек фазовой плоскости сделаем в уравнениях (2.5) замену переменных $\theta = \theta_* + u$, $\rho = \rho_* + v$. Ограничиваясь членами не выше второй степени относительно u, v, имеем следующие уравнения возмущенного движения в окрестности точки $\rho = \rho_*$, $\theta = \theta_*$:

$$du/d\tau = -2\chi u + 2v + \partial H_3/\partial v \tag{3.6}$$

$$dv/d\tau = -4\rho_*\,(2\rho_* - \mu)\,u - \partial H_3/\partial u$$

$$H_3 = \tfrac{4}{3}\,\chi\rho_* u^3 + 2\,(2\rho_* - \mu)\,u^2 v$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\chi\lambda + 8\rho_*\,(2\rho_* - \mu) = 0 \tag{3.7}$$

при $\rho_* = \rho_k$ можно преобразовать к виду

$$\lambda^2 + 2\chi\lambda + (-1)^{k-1}\,8\rho_k\,(\rho_1 - \rho_2) = 0 \quad (k = 1,\,2)$$

Учитывая, что величина $\rho_1 - \rho_2$ положительна как в области F, так и в области G, получаем отсюда, что в области F, где существует один положительный корень уравнения (3.3), равновесие $\rho = \rho_* = \rho_1$, $\theta = \theta_*$ асимптотически устойчиво, а в области G, где уравнение (3.3) имеет два положительных корня ($\rho_1 > \rho_2$), равновесие, отвечающее большему и меньшему из корней, асимптотически устойчиво и неустойчиво соответственно.

В фазовой плоскости x_1, x_2 особые точки, для которых $\rho_* = \rho_2$, являются седлами. Особые точки, для которых $\rho_* = \rho_1$, будут либо устойчивыми фокусами, если $\chi^2 < 8\rho_1\,(\rho_1 - \rho_2)$, либо устойчивыми узлами, если $\chi^2 \geq 8\rho_1\,(\rho_1 - \rho_2)$. Учитывая (3.4), (3.5), уравнение кривой, разделяющей области с различным характером особых точек $\rho = \rho_* = \rho_1$, $\theta = \theta_*$, можно получить в виде

$$\mu = \tfrac{1}{4}\,(5\chi^2 - 4)\,(1 - \chi^2)^{-1/2} \tag{3.8}$$

На фиг. 3 кривая (3.8) изображена штриховой линией. Левее и выше этой кривой особые точки, для которых $\rho_* = \rho_1$, будут устойчивыми фокусами. На самой кривой и правее и ниже нее они будут устойчивыми узлами.

Рассмотрим еще равновесия ρ_*, θ_* для значений параметров, лежащих на бифуркационной кривой — луче $\chi = 1$, $\mu > 0$. В этом случае характеристическое уравнение (3.7) имеет корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -2$.

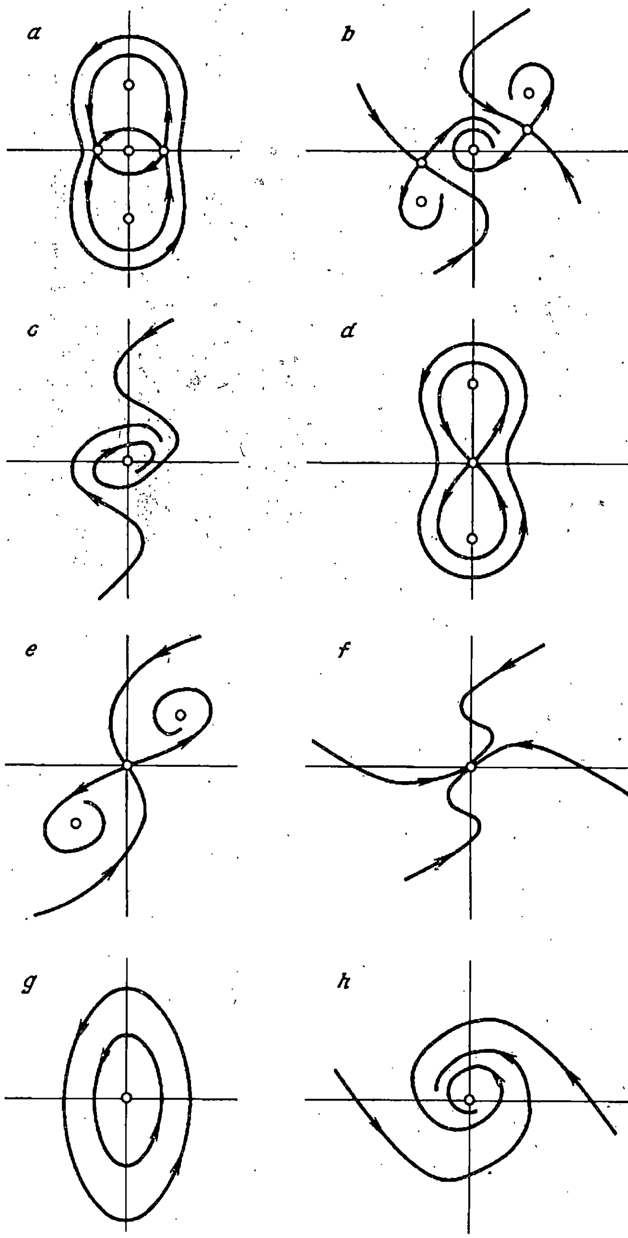
Нелинейные уравнения возмущенного движения (3.6) записываются в виде

$$du/d\tau = -2u + 2v, \quad dv/d\tau = -2\mu u^2$$

В переменных $x = v$, $y = u - v$ они принимают форму, удобную при анализе устойчивости в критическом случае одного нулевого корня:

$$dx/d\tau = -2\mu\,(x + y)^2, \quad dy/d\tau = -2y + 2\mu\,(x + y)^2$$

Приравнивание нулю правой части второго уравнения дает ряд



Фиг. 4

$y = \mu x^2 + \dots$. Для такого y правая часть первого уравнения представляется рядом $-2\mu x^2 + \dots$. Следовательно [10, 11], равновесие неустойчиво. Соответствующая особая точка фазовой плоскости — простейший двукратный седло-узел. Она имеет один устойчивый узловой сектор и два седловых [11].

Проведенный анализ дает полное представление о перестройках фазового портрета невозмущенной системы при изменении параметров χ, μ. Для некоторых типичных значений параметров фазовые портреты в плоскости x_1, x_2 показаны на фиг. 4a—4h. Этим значениям параметров соответствуют точки $a, \dots, h$ на фиг. 3.

4. Субгармонические колебания маятника. Рассмотрим теперь возмущенную систему (2.3) (или (2.4)). Поведение ее решений, вообще говоря, существенно отличается от поведения решений невозмущенной системы. Но для задачи о субгармонических колебаниях маятника достаточно установить соответствие между равновесиями невозмущенной и периодическими движениями возмущенной систем.

Равновесие $x_1 = x_2 = 0$ существует и в возмущенной системе, оно соответствует равновесию маятника на вертикали ($\alpha = 0$). Из непрерывности характеристических показателей и теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению следует, что при достаточно малых ε равновесие маятника $\alpha \equiv 0$ неустойчиво для значений χ, μ из полукруга F (фиг. 2 и 3) и асимптотически устойчиво вне F. Граничные значения параметров χ, μ, лежащие на дуге окружности $\chi > 0$, $\chi^2 + \mu^2 = 1$, при анализе устойчивости равновесия $\alpha \equiv 0$ в возмущенной задаче исключаем из рассмотрения.

Теперь рассмотрим равновесия ρ_*, θ_* невозмущенной системы, не совпадающие с началом координат. Эти равновесия существуют в областях F и G фиг. 3 (луч $\chi = 1$, $\mu > 0$ в возмущенной задаче не рассматриваем). Корни соответствующего характеристического уравнения имеют отличные от нуля вещественные части. Замечая, что члены $O(\varepsilon)$ в системе (2.3) (или (2.4)) имеют период $4\pi\Omega^{-1}$ по времени, на основании теории Пуанкаре периодических движений квазилинейных систем [12] получаем, что при достаточно малых ε в области F существует одно, а в области G — два субгармонических колебания маятника с частотой, равной $1/2\ \Omega$. При $\varepsilon = 0$ они переходят в равновесия $\rho = \rho_*$, $\theta = \theta_*$ невозмущенной системы. Отметим, что особые точки фазовой плоскости фиг. 4, у которых значения ρ_* одинаковы, а значения θ_* отличаются на π, соответствуют одному и тому же $4\pi\Omega^{-1}$ — периодическому движению маятника.

Используя опять непрерывность характеристических показателей по ε и теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению, получаем, что субгармонические колебания маятника, отвечающие значениям $\rho_* = \rho_1$ и $\rho_* = \rho_2$ асимптотически устойчивы и неустойчивы соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16257) и Международного научного фонда (MFG300).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Skalak R., Yarymovych M. I.* Subharmonic oscillations of a pendulum//Trans. ASME. ser. E. J. Appl. Mech. 1960. V. 27. No. 1. P. 159—164.
2. *Caughey T. K.* Subharmonic oscillations of a pendulum//Trans. ASME. ser. E. J. Appl. Mech. 1960. V. 27. No. 4. P. 754—755.
3. *Struble R. A.* On the subharmonic oscillations of a pendulum//Trans. ASME. ser. E. J. Appl. Mech. 1963. V. 30. No. 2. P. 301—303.
4. *Struble R. A.* Oscillation of a pendulum under parametric excitation//Quart. Appl. Math. 1963. V. 21. No. 2. P. 121—131.
5. *Джакалья Г. Е. О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. *Маркеев А. П.* О резонансе третьего порядка в близкой к гамильтоновой системе с одной степенью свободы//Изв. РАН. МТТ. 1995. № 2. С. 48—53.
7. *Маркеев А. П.* Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений//Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 34—44.
8. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
9. *Маркеев А. П.* О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса//ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 569—580.
10. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
11. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
12. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.IX.1994