

УДК 539.3

© 1996 г. К. С. СУЛТАНОВ, Б. Э. ХУСАНОВ

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН НА КОНУСЕ

Задачи дифракции плоских акустических и упругих волн на конусе исследованы многими авторами [1—6]. В [1, 5, 6] получены аналитические решения с применением интегральных преобразований. С помощью численных и асимптотических методов решены задачи в [2—4]. Точные решения упругих задач нестационарной дифракции волн на жестком конусе получены при одновременном выполнении двух условий: наличие осевой симметрии и смешанных граничных условий. Тогда, следуя [6], легко удастся разделить граничные условия для потенциалов и получить аналитическое решение задачи. Нарушение хотя бы одного из этих условий приведет к существенному затруднению, и в настоящее время получение точных аналитических решений представляет значительные трудности. С применением численных методов можно получить решения задач для неразделяющихся граничных условий.

В публикуемой работе методом конечных разностей численно решается нестационарная задача о падении плоской продольной упругой волны на абсолютно жесткий и неподвижный конус при наличии осевой симметрии. Метод решения обосновывается решением тестовой задачи, имеющей точное решение.

**1. Постановка задачи.** Пусть в безграничной упругой среде с начальной плотностью  $\rho_0$  и со скоростями распространения продольных и поперечных волн  $c_1$  и  $c_2$  находится бесконечный круговой жесткий конус с углом раствора  $2\alpha$  ( $0 < 2\alpha < \pi$ ), ось которого совпадает с осью симметрии  $x$  в цилиндрической системе координат  $x, y, \theta$ , а вершина его находится на расстоянии  $x_0$  ( $x_0 > 0$ ) от начала координат (фиг. 1). Рассмотрим падение плоской продольной упругой волны на этот конус.

Плоская продольная волна создается в начальном сечении  $x = 0$  заданием скорости частиц среды в направлении оси  $x$  и изменяющейся по закону

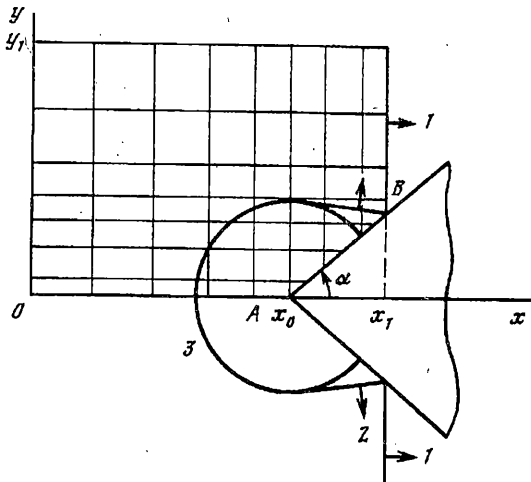
$$v_x = v_{\max} \text{ при } 0 \leq t \leq T \quad (1.1)$$

$$v_x = 0 \text{ при } t > T$$

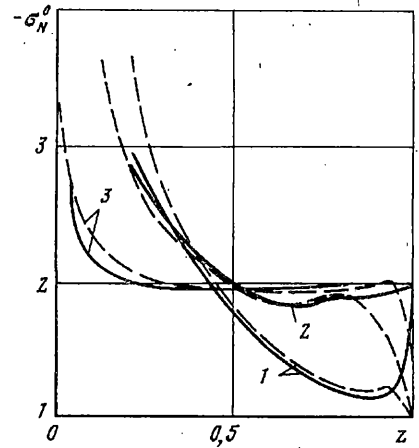
где  $v_{\max} = \text{const}$  — значение задаваемой скорости,  $T$  — время ее действия.

В этом случае фронт падающей волны будет перпендикулярен к оси конуса и задача становится осесимметричной (достаточно рассмотреть процесс на верхней половине меридионального сечения на фиг. 1). Тогда величины, описывающие движения среды, не зависят от угла  $\theta$ , кольцевая скорости  $v_\theta \equiv 0$ , компоненты тензора напряжений  $\tau_{x\theta} \equiv \tau_{\theta x} \equiv 0$ . В качестве неизвестных возьмем компоненты вектора скорости и тензора напряжений, что позволяет представить систему уравнений, описывающих движение, в наиболее простом и удобном виде для численного интегрирования.

Уравнения движения упругой среды окружающей конус в принятой системе координат имеют вид



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\tau_{xy}}{y}, \quad \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{\theta\theta}}{y} \quad (1.2)$$

$$\sigma_{xx} = S_{xx} - (P + q), \quad \sigma_{yy} = S_{yy} - (P + q), \quad \sigma_{\theta\theta} = S_{\theta\theta} - (P + q)$$

где  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений;  $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$ ,  $S_{\theta\theta}$  — компоненты дивергента напряжений;  $P$  — объемное напряжение;  $q$  — искусственная вязкость;  $\rho$  — плотность;  $v_x$  и  $v_y$  — скорости в направлении  $x$  и  $y$ , соответственно.

К уравнениям движения (1.2) следует добавить еще уравнения состояния и неразрывности в виде

$$\dot{S}_{xx} = 2\mu (\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{V}/3V), \quad \dot{S}_{yy} = 2\mu (\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{V}/3V), \quad \dot{S}_{\theta\theta} = 2\mu (\dot{\epsilon}_{\theta\theta} - \dot{V}/3V)$$

$$\dot{\tau}_{xy} = \mu \dot{\epsilon}_{xy}, \quad P = -K\dot{V}/V \quad (1.3)$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \dot{V}/V, \quad V = \rho_0/\rho \quad (1.4)$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \partial v_x / \partial x, \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \partial v_y / \partial y, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = v_y / \partial y \quad (1.5)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = (\partial v_y / \partial x + \partial v_x / \partial y)$$

Здесь  $V$  — относительный объем,  $K = \lambda + 2\mu/3$  — модуль объемного сжатия,  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе. Точка над параметрами означает производную по времени. Начальные условия предполагаются нулевыми (среда находится в состоянии покоя).

На границе раздела упругой среды с конусом принимаются классические граничные условия [7], т. е. вдоль образующей конуса условия жесткого контакта

$$\mathbf{v} \equiv 0 \quad (v_x \equiv 0, v_y \equiv 0) \quad (1.6)$$

или условия скользящего контакта

$$\tau = 0, \quad v_n = 0 \quad (1.7)$$

где  $v_n$  и  $\tau$  — нормальная скорость и касательное напряжение вдоль образующей конуса. Задачи с граничными условиями (1.6) и (1.7) считаются соответственно второй и третьей краевыми задачами.

В окрестности вершины конуса (неподвижной сингулярной точки) накладывается ограничение на поведение вектора скорости

$$v = 0 [y^2 + (x - x_0)^2]^{1/2}, \quad \varepsilon > -1/2, \quad y \rightarrow \operatorname{tg} \alpha (x - x_0), \quad x \rightarrow x_0 \quad (1.8)$$

обеспечивающее единственность решения [6].

2. Метод решения. Рассматриваемая задача решается численно, метод конечных разностей по обобщенной схеме Уилкинса [8]. Расчетную область выбираем таким образом, чтобы можно было рассмотреть времена проявления фронтов отраженной и дифрагированной волны (фиг. 1). Эту область разбиваем на ячейки по координатам  $x$  и  $y$  неравномерными шагами — близлежащая часть области к конусу дискретизируется более мелкими шагами, чем на отдаленных расстояниях от конуса. Схематическое разбиение области показано на фиг. 1 (кривые 1—3 соответствуют фронтам падающей, отраженной и дифрагированной волны). Замкнутая система уравнений (1.2)—(1.5) заменяется конечно-разностными соотношениями на лагранжевой сетке с четырехугольными ячейками, а на границе раздела среды с конусом треугольными ячейками. На границах расчетной области требуется выполнение следующих условий: на грани и вершине конуса соответственно условия (1.6) или (1.7) и (1.8); по оси  $x$  ( $y = 0$ ) — условия симметрии задачи; в сечении  $x = 0$  задается скорость частиц, изменяющейся по закону (1.1); на остальных границах введением фиктивных ячеек ставятся условия протекания волн без отражения.

При численной реализации метода на ЭВМ искусственная вязкость в уравнении (1.2) выбиралась в квадратичном виде

$$q = \begin{cases} c_0^2 \rho_0 A (\dot{V}/V)^2 / V & \text{при } \dot{V}/V < 0 \\ 0 & \text{при } \dot{V}/V \geq 0 \end{cases}$$

которая допускает «сквозной» счет параметров волн, имеющих слабые разрывы по одному алгоритму и при надлежащем подборе безразмерного постоянного  $c_0$  хорошо сглаживает осцилляции решения [9] (здесь  $A$  — площадь ячейки). Шаг по времени осуществляется автоматическим выбором из условия устойчивости Куранта и точности в процессе счета [8—10].

Для апробирования алгоритма и программы решения в качестве тестовой рассмотрим задачу нестационарной дифракции плоской упругой продольной волны сжатия на гладком твердом конусе произвольного угла раствора, приведенную в [5, 6]. На фиг. 2 приведены кривые распределения нормального напряжения ( $-\sigma_N^0$ ) вдоль образующей конуса  $AB$  (фиг. 1) как функции от  $z$ , когда фронт падающей волны достигает точки  $B$ . Здесь  $\sigma_N^0$  нормировано с помощью множителя  $c_1/v_{\max} (\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha)$ , а переменная  $z$  есть отношение расстояния от рассматриваемой точки до вершины конуса, к длине  $AB$  (фиг. 1). Физико-механические и геометрические характеристики среды, для которой проводились расчеты, принимались следующими:  $c_1 = 1000$  м/сек,  $c_2 = 500$  м/сек,  $\rho_0 = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $x_0 = OA = 0,3$  м,  $x_1 = 0,6$  м,  $y_1 = \operatorname{tg} \alpha (x_1 - x_0) = 0,15$  м,  $c_0 = 40$ ; в формуле (1.1)  $v_{\max} = 1$  м/сек и  $T \rightarrow \infty$ . Размеры ячеек подбирались оптимальными по точности, объему памяти ЭВМ и расхода машинного времени: расчетная область (фиг. 1) по координате  $x$  и  $y$  разбито соответственно на 90 и 60 отрезков (максимальная сторона ячеек 0,01 м). На фиг. 2 кривые 1—3 соответствуют углам раствора конуса  $2\alpha = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6$ . Сплошные линии относятся к точным решениям, полученные в [6], а штриховые — численным решениям. Как видно из фиг. 2, результаты численного расчета дают хорошее совпадение с точными решениями за фронтом волн. Отклонение от точного решения при  $z \rightarrow 1$  (в окрестности фронта падающей волны) объясняется тем, что конечно-разностный метод размывает сильные разрывы, т. е. фронта падающей волны, в то время как в точном решении  $\sigma_N^0$  принимает сдвоенный скачок с учетом отражения в линейно упругой среде. Это отклонение можно уменьшить за счет измельчения шагов по координате в окрестности фронта падающей волны. Размывание сильных

$N$	$v_{\max}$	$T$	$2\alpha$	$\rho_0$	$c_1$	$c_2$
1	1	0,1	$\pi/2$	2000	1000	500
2	1	0,1	$5\pi/6$	2000	1000	500
3	1	0,1	$\pi/6$	2000	1000	500
4	1	0,2	$\pi/2$	2000	1000	500
5	1	$\infty$	$\pi/2$	2000	1000	500
6	0,5	0,1	$\pi/2$	2000	1000	500
7	5	0,1	$\pi/2$	2000	1000	500
8	1	0,1	$\pi/2$	3000	1000	500
9	1	0,02	$\pi/2$	2000	1000	500
10	1	0,02	$\pi/2$	7800	5000	2500

разрывов при решении осесимметричных волновых задач методом конечных разностей также наблюдалось в работе [11].

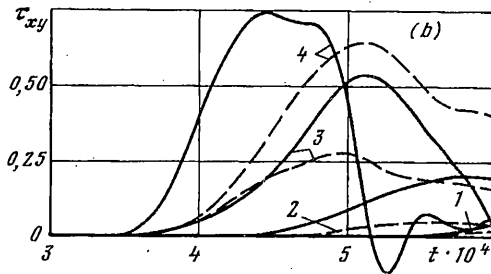
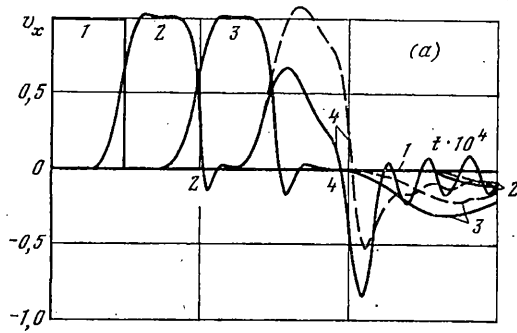
Сопоставление результатов численных и точных решений тестовой задачи (фиг. 2) показывают удовлетворительную пригодность применяемого метода решения для рассматриваемых классов задач.

3. Результаты численных решений и их анализ. На основе составленного алгоритма и программы решения представлены в виде графиков изменения параметров волны по времени для фиксированных точек области решения (фиг. 1) вдоль линии симметрии  $OA$  ( $y=0$ ), вдоль сечений  $y=0,1$  м и  $x=0,3$  м, а также вдоль образующей конуса. Выполнены серии расчетов при различных длинах прямоугольного импульса по времени  $T$  и амплитуды скорости  $v_{\max}$ , физико-механических характеристик среды  $\rho_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ , углах раствора конуса  $2\alpha$  как для жесткого контакта (1.6), так и для скользящего контакта (1.7) между средой и конусом. Варианты для расчетов  $N$  приведены в таблице. Во всех вариантах расчетов на ЭВМ вершина конуса находилась в точке  $(x_0, 0)$ , а геометрические характеристики расчетной области и количество ячеек остались неизменными.

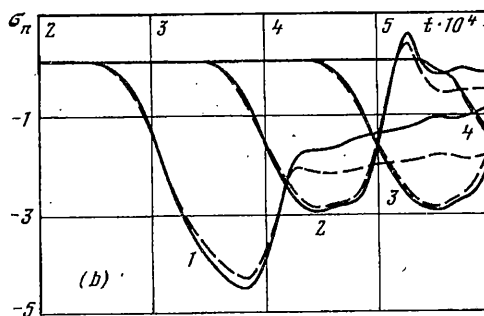
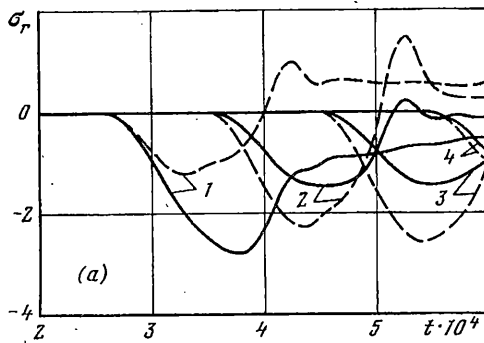
Изменения параметров волн по времени в сечении  $y=0$  во всех вариантах за передним фронтом падающей волны до прихода отраженной и дифрагированной волны от образующей и вершины конуса качественно и количественно аналогичны как при распространении упругих волн в безграничной среде для соответствующего варианта. На фиг. 3, а представлены скорости частиц среды в этом сечении в точках  $x=0; 0,1$  м;  $0,2$  м;  $0,297$  м (соответственно кривые 1—4) изменяющиеся по времени. Из фиг. 3, а видно, что через некоторый момент времени у частицы среды возникают отрицательные скорости за счет дифрагированной и отраженной волны от конуса. Здесь сплошные линии относятся к результатам расчетов варианта 1 с граничными условиями (1.6), а штриховые — (1.7). Отметим, что напряжение  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  свои максимальные значения в сечении  $y=0$  получают вблизи вершины конуса. Касательное напряжение  $\tau_{xy}$  отлично от нуля лишь за фронтом дифрагированной и отраженной волны, а скорость  $v_y \equiv 0$ .

Аналогичную картину можно наблюдать в фиксированных точках сечения  $y=0,1$  м. Здесь касательное напряжение имеет более существенное значение, чем в сечении  $y=0$  (фиг. 3, в: кривые 1—4 соответствуют точкам  $x=0,1$  м,  $0,2$  м,  $0,3$  м и  $0,398$  м сечения  $y=0,1$  м), а частицы среды под действием дифрагированной и отраженной волны начинают перемещаться и в вертикальном направлении, т. е.  $v_y \neq 0$ .

Во всех рассматриваемых фиксированных точках в сечении  $x=0,3$  м, кроме окрестности вершины конуса, изменения параметров волн по времени за фронтом



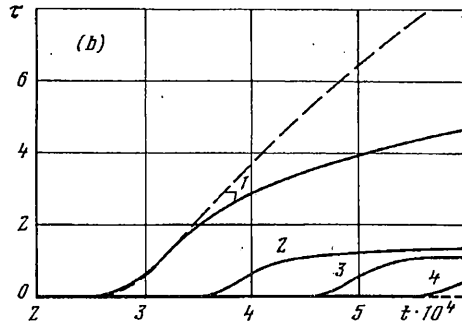
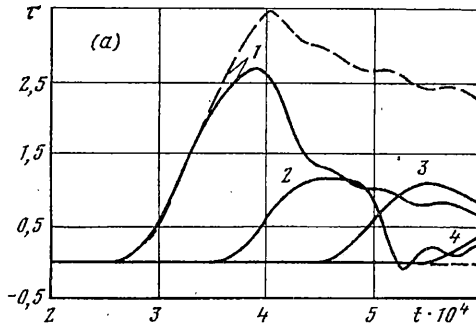
Фиг. 3



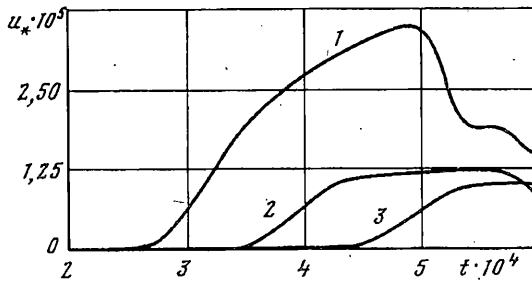
Фиг. 4

падающей волны до прихода дифрагированной волны от вершины конуса и отраженных волн от образующей конуса качественно одинаковы по оси  $Oy$ . За фронтом двух последних волн они начинают отличаться, параметры  $\tau_{xy}$  и  $v_y$  начинают принимать значения отличными от нуля.

При численном анализе величин  $\sigma_{xx}(t)$ ,  $\sigma_{yy}(t)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(t)$ ,  $\tau_{xy}(t)$ ,  $v_x(t)$  и  $v_y(t)$ ,



Фиг. 5



Фиг. 6

относящихся к точкам среды на определенных расстояниях от вершины и образующей конуса в сечениях  $y = 0$ ,  $y = 0,1$  м и  $x = 0,3$  м (фиг. 1) наблюдается влияние падающей, отраженной и дифрагированной волн (фиг. 3). Изменения параметров волн на расстояние более  $0,5$  ОА от конуса в обоих видах граничных условий (1.6) и (1.7) практически совпадают. Качественное влияние дифрагированной волны, согласно результатам расчетов зависит от параметров нагрузки ( $v_{\max}$  и  $T$  в формуле (1.1)) и от угла раствора конуса.

Наиболее характерными являются изменения параметров волны по времени и координате возле вершины и вдоль образующей конуса  $y = \operatorname{tg} \alpha (x - x_0)$ ,  $x > x_0$  (линия АВ, фиг. 1). При этом изменения напряжений и скорости частиц среды рассматриваются в новой системе координат  $r, n$ , направленные вдоль и перпендикулярно к образующей конуса. Используя найденные значения напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\tau_{xy}$  вычислялись значения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_n$  и  $\tau$  в системе координат  $r, n$  по известным формулам

$$\sigma_r = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \sin^2 \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha$$

где  $\sigma_r$  — напряжение в среде, действующее вдоль образующей конуса,  $\sigma_n$  — нормальное напряжение к образующей конуса.

На фиг. 4, 5 приведены изменения напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_n$  и  $\tau$  по времени для фиксированных точек вдоль образующей конуса для варианта 1 (см. таблицу). Кривые 1—4 относятся соответственно к фиксированным точкам вдоль образующей конуса с координатами  $x$ ,  $y$ : (0,297; 0,003), (0,398; 0,098), (0,498; 0,198) и (0,598; 0,298) м. Сплошные кривые относятся к результатам расчетов с условиями на границе контакта конуса со средой (1.6) (жесткий контакт), а штриховые кривые — с условиями (1.7) (скользящий контакт).

В случае жесткого контакта между конусом и средой напряжение  $\sigma_r$  достигает своего максимального значения перед вершиной конуса (кривая 1, фиг. 4, а). Далее по мере удаления от вершины конуса вдоль образующей, максимальное напряжение  $\sigma_r$  убывает. В этом случае растягивающие напряжения вдоль образующей конуса в среде практически не возникают (сплошные кривые 1—4).

При отсутствии силы трения между конусом и средой (скользящий контакт) изменение  $\sigma_r$  вдоль образующей конуса качественно и количественно отличаются. В этом случае максимум сжимающих напряжений вдоль образующей конуса по мере удаления от вершины конуса увеличиваются. Далее напряжения сжатия с ростом времени убывают и в среде появляются растягивающие напряжения (штриховые кривые 1—4, фиг. 4, а). В рассматриваемых фиксированных точках среды вдоль образующей конуса максимальные значения растягивающих напряжений  $\sigma_r$  в 1,5—2 раза меньше, чем сжимающие напряжения. Из-за отсутствия трения на контакте, конус не оказывает сопротивления перемещению и деформированию частиц среды вдоль образующей, поэтому амплитуда сжимающих напряжений всегда превосходит те же напряжения, получаемые при жестком контакте. Этим объясняется также появление растягивающих напряжений.

Значение нормальных напряжений  $\sigma_n$  по образующей конуса существенно не зависит от условия контакта конуса со средой (фиг. 4, в). При жестком контакте конуса со средой (сплошные кривые 2—4), а также при скользящем контакте (штриховые кривые 2—4) изменение  $\sigma_n$  по времени вдоль образующей конуса на незначительных расстояниях от вершины практически совпадают. Однако с удалением от вершины конуса в среде появляются растягивающие нормальные напряжения (кривые 2). Значение растягивающих нормальных напряжений достигает до 1 МПа (в вариантах 2, 8, 9, а варианте счета 7 до 5 МПа). Если при этом физические свойства контакта таковы, что он не выдерживает растягивающих напряжений, или растягивающие напряжения превосходят предел прочности среды (характеристики среды в рассмотренных вариантах соответствуют грунтам) на растяжение, то в результате может происходить отрыв среды от конуса. Это указывает на то, что при решении задачи необходимо учесть возможность отрыва среды от образующей конуса.

На фиг. 5 приведены изменения касательных напряжений  $\tau$  вдоль образующей конуса в приконтактном слое среды (фиг. 5, а для варианта 1, а фиг. 5, в для варианта 5) в тех же точках, что и  $\sigma_r$ ,  $\sigma_n$  на фиг. 4. При падении продольной волны прямоугольного импульса при жестком контакте конуса со средой максимальные значения касательных напряжений вдоль образующей конуса, после удаления от вершины на незначительное расстояние, практически остаются без изменения (кривые 2, 3, фиг. 5, а). Наибольшее значение касательных напряжений достигается в среде у вершины конуса (кривая 1). Значения максимума  $\tau$  у вершины конуса в 1,5—2 раза больше, чем на поверхности конуса (кривые 1—4,

фиг. 5, а). При скользящем контакте на поверхности конуса касательное напряжение отсутствует согласно условию (1.7). Однако у вершины конуса в среде максимальное значение касательного напряжения в 1,2—1,3 раза превышает то же значение  $\tau$  при жестком контакте (кривые 1, фиг. 5, а). Значение максимального касательного напряжения согласно результатам расчетов достигает 1—3,5 МПа. С увеличением времени действия нагрузки (1.1) максимальные значения касательного напряжения на поверхности конуса увеличиваются (варианты счета 4,5). При  $T \rightarrow \infty$   $\tau_{\max}$  у вершины конуса меняется от 1 до 7 МПа (фиг. 5, в). Здесь касательное напряжение, достигая своего наибольшего значения, с течением времени монотонно возрастает у вершины конуса, причем при скользящем контакте намного (более чем в два раза) больше, чем при жестком контакте. Далее вдоль образующей конуса, при скользящем контакте конуса со средой, значение касательного напряжения равно нулю.

Зависимость касательного напряжения от времени, в случае  $T > 0,0002$  с, качественно совпадает с изменением  $\tau(t)$ , полученным в экспериментальных исследованиях по динамическому взаимодействию твердых тел с грунтами [12—14]. Количественное расхождение объясняется тем, что грунтовая среда в этой задаче моделируется только упругой.

На фиг. 6 приведены изменение относительного смещения частиц  $u_*$  по времени вдоль образующей конуса в фиксированных точках среды при жестком контакте на границе раздела. Кривые 1—3 относятся соответственно к точкам  $x = 0,3$  м, 0,4 м и 0,5 м линии  $y = 0,002 + \operatorname{tg} \alpha (x - 0,3)$  (вариант 4). Наибольшее значение относительных смещений здесь тоже достигается вблизи вершины конуса, и они в 2—3 раза превышают максимальные значения относительных смещений вдоль образующей конуса (кривые 2, 3, фиг. 6). Изменение относительного смещения качественно аналогично изменениям относительного смещения по времени, полученным в экспериментальных исследованиях продольных взаимодействий подземного трубопровода с грунтом при распространении взрывных волн вдоль оси трубопровода [14].

Качественное совпадение изменений касательного напряжения и относительного смещения по времени при жестком контакте конуса со средой, свойства которого ближе к грунтам, с результатами опытов [12—14] показывает, что при расчетах волновых процессов в неводонасыщенных грунтах, включающих различные конструкции, целесообразно использовать условие (1.6) на поверхностях контакта грунт-конструкция или альтернативные граничные условия (законы сдвигового взаимодействия), предложенные в [12, 13].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поручиков В. В. Решение задачи о дифракции акустической волны на конусе//ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 2. С. 319—322.
2. Ting L. On the diffraction of an arbitrary pulse by a wedge of a cone//Quart. Appl. Math. 1960. V. 18. № 1. P. 89—92.
3. Сагомоян А. Я. Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. М.: Изд-во МГУ, 1962. 80 с.
4. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. 456 с.
5. Поручиков В. В. Дифракция упругой волны на конусе//Инж. ж. МТТ. 1968. № 6. С. 126—127.
6. Поручиков В. В. Методы динамической теории упругости. М.: Наука. 1986. 328 с.
7. Петрашень Г. И. Основы математической теории распространения упругих волн//Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1978. Вып. 18. С. 5—248.
8. Wilkins M. L. Calculation of elastic-plastic Flow//Methods Computat. Phys. New-York; London. Acad. Press, 1964. V. 3. P. 211—263.
9. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики/Под ред. К. И. Бабенко. М.: Наука. 1979. 296 с.



10. *Neumann J., Richtmyer R. D.* A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks//J. Appl. Phys. 1950. V. 21. № 3. P. 232—237.
11. *Григорян С. С., Евсеев Л. С.* Расчет двумерной осесимметричной задачи о сильном контактном взрыве//Отчет Ин-та механики МГУ. 1974. № 1565. 40 с.
12. *Султанов К. С.* Математическая модель взаимодействия твердых тел с грунтом при их относительном сдвиге//ПМТФ. 1993. № 1. С. 40—48.
13. *Султанов К. С.* Закономерности взаимодействия подземных сооружений с грунтом при их относительном сдвиге//Прикл. механика. 1993. Т. 29. № 3. С. 60—67.
14. *Султанов К. С., Юсупов Т. Э.* Экспериментальное исследование продольных взаимодействий трубопровода с грунтом при динамических воздействиях//Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1986. № 3. С. 44—48.

Ташкент

Поступила в редакцию  
11.X.1993