

УДК 531.391

© 1996 г. В. Г. ВИЛЬКЕ

КАЧЕНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА ПО ДЕФОРМИРУЕМОМУ РЕЛЬСУ

Рассматривается модель деформируемого колеса, катящегося без проскальзывания вдоль деформируемого рельса (балки), лежащего на вязкоупругом основании. Контакт колеса с рельсом предполагается точечным, а реакция в точке контакта сводится к силе. Определяются условия существования стационарного режима (качение колеса с постоянной скоростью в вертикальной плоскости) и сопротивление движению. Задача о колебаниях рельса близка к задаче о колебаниях балки под действием подвижной нагрузки [1]. Задача о качении колеса в различных постановках рассматривалась в [2—10].

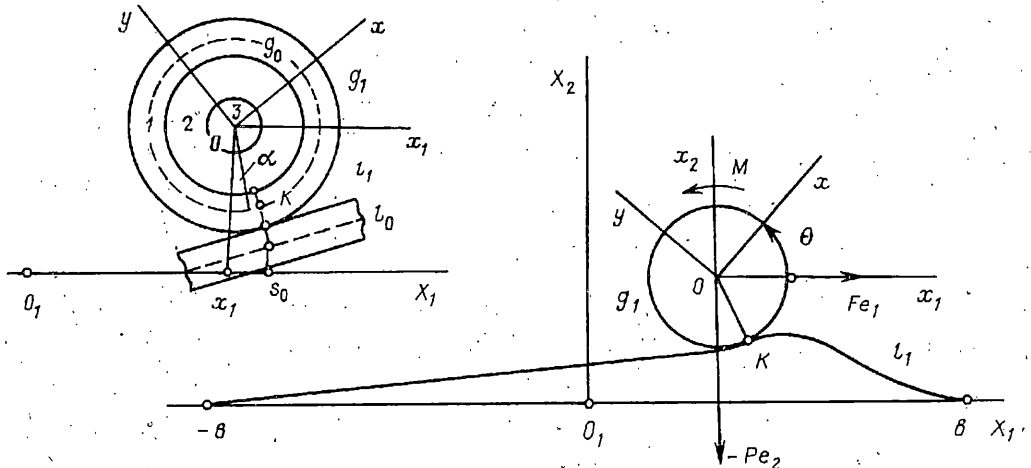
1. Механическая модель системы. Пусть колесо и рельс расположены в вертикальной плоскости $O_1X_1X_2$. Будем считать рельс вязкоупругой балкой, испытывающей изгиб и лежащей на вязкоупругом основании [1] (фигура). Продольными деформациями оси рельса l_0 можно пренебречь, так как рельс обладает значительной продольной жесткостью, а продольные силы (сила трения в точке контакта) намного меньше поперечных сил (нагрузка на рельс в точке контакта). Зададим функционалы кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативных сил, описывающих динамику рельса, в виде

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \rho_1 w'^2 ds, \quad \Pi_1 = \frac{1}{2} \int_{-b}^b (k_1 w'^2 + k_2 w^2) ds$$

$$D_1 = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \chi (d_1 w'^2 + d_2 w^2) ds \quad (1.1)$$

где ρ_1 — линейная плотность материала рельса, $w(s, t)$ ($|s| < b$) — перемещения точек нейтральной оси рельса l_0 , проходящей через центры тяжести его сечений вдоль оси O_1X_2 , k_1 — изгибная жесткость рельса, k_2 — жесткость основания по оси O_1X_2 , d_1 и d_2 — характеристики внутреннего трения рельса и основания (материала Кельвина — Фойхта), χ — малый параметр, точка означает дифференцирование по времени t , а штрих — по s . В определение потенциальной энергии деформаций в формуле (1.1) использована линейная теория изгиба тонких стержней с учетом гипотезы плоских сечений, а в функционале кинетической энергии отброшены члены, определяющие кинетическую энергию поворотов сечений рельса [1].

Колесо железнодорожного вагона представим в виде гибкого нерастяжимого криволинейного стержня (бандажа) (1), жесткой оси колеса (3), и деформируемого диска (2), соединяющего бандаж с осью (см. фигуру). Пусть Ox_1x_2 система координат, начало которой совпадает с центром колеса, а оси Ox_1 , Ox_2 параллельны соответствующим осям неподвижной системы $O_1X_1X_2$. Система координат Oxy жестко связана с осью колеса и вращается с угловой скоростью $\dot{\theta}$. Окружность g_0 проходит через центры тяжести сечений бандажа плоскостями, содержащими ось колеса, и имеет в недеформированном состоянии радиус r_0 . Положения точек окружности g_0 в процессе деформаций относительно системы Oxy зададим в



полярной системе координат в виде $\mathbf{R} = r_0 [(1 + u) \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\varphi]$, где $u(\varphi, t)$, $v(\varphi, t)$ — безразмерные 2π -периодические величины перемещений точек окружности g_0 вдоль осей полярной системы координат, \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ — орты полярной системы координат. Так как бандаж колеса обладает значительной продольной жесткостью, а касательная (продольная) нагрузка в точке контакта значительно меньше поперечной нагрузки, то будем считать, что бандаж в процессе качения колеса испытывает чистый изгиб, а его средняя линия g_0 нерастяжима. Поскольку $\mathbf{e}'_r = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}'_\varphi = -\mathbf{e}_r$ (здесь штрих означает производную по φ), то $d\mathbf{R} = r_0 [(1 + u + v') \mathbf{e}_\varphi + (u' - v) \mathbf{e}_r] d\varphi$ и условие нерастяжимости примет вид

$$u + v' = 0 \quad (1.2)$$

Потенциальная энергия изгиба бандажа с учетом (1.2) согласно [11] определяется функционалом

$$\Pi_2[v] = \frac{n_0}{2} \int_0^{2\pi} (v'' + v')^2 d\varphi, \quad n_0 = \frac{2Ea_1h_2^3}{3r_0} \quad (1.3)$$

Здесь E — модуль упругости материала бандажа, a_1 , $2h_2$ — толщина и ширина бандажа.

Потенциальную энергию деформированного диска найдем в предположении, что в диске имеет место плоское напряженное состояние, а перемещения точек его срединной плоскости в полярной системе координат определяются соотношениями

$$u_1(r, \varphi, t) = f(r) r_0 u(\varphi, t), \quad v_1(r, \varphi, t) = f(r) r_0 v(\varphi, t) \quad (1.4)$$

$$f(r) = (r - r_1)/(r_0 - h_2 - r_1), \quad r_1 < r < r_0 - h_2$$

где r_1 — радиус оси колеса. Из формул (1.4) следует, что на линии контакта диска с осью относительные перемещения точек диска равны нулю, а в остальных точках пропорциональны перемещениям точек средней линии бандажа. Формулы (1.4) можно рассматривать как первые члены разложений в ряды Тейлора функций u_1 и v_1 по переменной $r - r_1$. Согласно (1.2) и (1.4) компоненты тензора деформации равны [12]:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_1}{\partial r} = -r_0 \frac{df}{dr} v'; \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{u_1}{r} = 0$$

$$e_{rp} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{v_1}{r} + \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) = \frac{r_0 f}{2r} \left(\frac{r_1 v}{r - r_1} - v' \right)$$

а потенциальная энергия деформаций диска представляется в форме

$$\Pi_3 [v] = \frac{E a_2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{e_{rr}^2}{1 - \nu^2} + \frac{2e_{r\varphi}^2}{1 + \nu} \right) r dr d\varphi \quad (1.5)$$

где a_2 — толщина диска, $r_2 = r_0 - h_2$ — внешний радиус диска, E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала диска. Выполняя интегрирование по переменной r в (1.5), получим

$$\Pi_3 [v] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (n_1 v'^2 + n_2 v^2 + n_3 v^2) d\varphi \quad (1.6)$$

$$n_1 = \frac{E a_2 r_0^2}{4(1 + \nu)(r_2 - r_1)^2} [3r_1^2 + r_2^2 - 4r_1 r_2 + 2r_1^2 \ln(r_2/r_1)]$$

$$n_2 = E a_2 r_0^2 \left[\frac{r_1(r_2 - r_1 - r_1 \ln(r_2/r_1))}{(1 + \nu)(r_2 - r_1)^2} + \frac{r_2 + r_1}{2(1 - \nu^2)(r_2 - r_1)} \right]$$

$$n_3 = E a_2 r_0^2 r_1^2 \ln(r_2/r_1) / [2(1 + \nu)(r_2 - r_1)^2]$$

Допустим, что относительные скорости точек колеса в системе Oxy отличны от нуля только для точек бандажа, представленного в виде материальной линии с линейной плотностью ρ_2 . Тогда кинетическая энергия колеса представляется выражением

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_S \{x_1 \dot{e}_1 + x_2 \dot{e}_2 + r [(1 + u) \dot{\theta} + v'] e_\varphi + r (u' - v\dot{\theta}') e_r\} d\mu$$

где $d\mu$ — элемент массы колеса, S — плоская область интегрирования, состоящая из оси колеса, диска и бандажа, x_1 и x_2 — координаты центра колеса в системе $O_1 X_1 X_2$, e_1 и e_2 — орты системы координат $O_1 X_1 X_2$. Преобразуя выражение кинетической энергии с учетом (1.2), получим

$$T_2 = \frac{m}{2} (x_1'^2 + x_2'^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}'^2 + \frac{\rho_2 r_0^2}{2} \int_0^{2\pi} \{r_0 [(v' - v'\dot{\theta}')^2 + (v' + v\dot{\theta}')^2 + 2\dot{\theta}' (v' - v'\dot{\theta}')] - 2(x_1' \sin \Phi - x_2' \cos \Phi) \times (v' - v'\dot{\theta}') - 2(x_1' \cos \Phi + x_2' \sin \Phi) (v' + v\dot{\theta}')\} d\varphi \quad (1.7)$$

где m и J — масса и момент инерции недеформированного колеса относительно его оси, а $\Phi = \varphi + \theta$.

При деформациях бандажа и диска будем учитывать малые диссипативные силы пропорциональные скоростям деформаций. Соответственно функционал диссипативных сил представим в виде

$$D_2 [v] = \chi d_3 (\Pi_2 [v] + \Pi_3 [v])$$

где d_3 — параметр, определяющий диссипативные свойства материала колеса (модель Кельвина — Фойхта).

Будем предполагать, что кривизна линии контакта рельса l_1 меньше кривизны линии контакта колеса g_1 , контакт колеса с рельсом реализуется в одной точке K , в которой линии l_1 и g_1 имеют общую касательную (см. фигуру). С учетом (1.2) эти условия представим в форме

$$s_0 - h_1 w_0' = x_1 + (R - r_0 v_0') \sin \alpha + (R v_0 + h_2 v_0'') \cos \alpha$$

$$w_0 + h_1 = x_2 - (R - r_0 v_0') \cos \alpha + (R v_0 + h_2 v_0'') \sin \alpha \quad (1.8)$$

$$w_0' = \alpha + v_0 + v_0''$$

где $w_0 = w(s_0(t), t)$, $v_0 = v(\varphi_0(t), t)$, $R = r_0 + h_2$, $\alpha = \varphi_0 + \theta - 3\pi/2$. Угол α соответствует точке контакта K , отсчитывается от отрицательного направления оси Ox_2 и мал. В дальнейшем функции v , w и их производные также будем считать малыми. В третьем уравнении в (1.8) отброшены члены второго порядка малости и выше. Из первых двух уравнений связей (1.8) получим условия на возможные перемещения:

$$\delta f_1 = h_1 \delta w_0' + \delta x_1 - r_0 \alpha \delta v_0' + R \delta v_0 + h_2 \delta v_0'' + (R - r_0 v_0') \delta \theta = 0 \quad (1.9)$$

$$\delta f_2 = \delta x_2 - \delta w_0 + (R \alpha + R v_0 + h_2 v_0'') \delta \theta + R \alpha \delta v_0 + r_0 \delta v_0' + h_2 \alpha \delta v_0'' = 0$$

Условие качения колеса без проскальзывания получается путем замены в первом соотношении (1.9) вариаций на соответствующие скорости:

$$h_1 w_0' + x_1' - r_0 \alpha v_0' + R v_0 + h_2 v_0'' + (R - r_0 v_0') \theta' = 0 \quad (1.10)$$

Гладкость функций $w(s, t)$, $v(\varphi, t)$ и их вариаций определяется из условия существования функционалов потенциальных энергий (1.1), (1.3), (1.6): функция w принадлежит пространству Соболева $W_2^2([-b, b])$, а функция v — пространству Соболева $W_2^2([0, 2\pi])$. Это означает, что функции w , w' , v , v' , v'' непрерывны в областях определения и, в частности, в точках, соответствующих точке контакта K .

2. Уравнения движения. Стационарный режим. Рассматриваемая система представляет из себя механическую систему с идеальными голономными связями. Уравнения движения и условия сопряжения в точке контакта получим из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta T_1 + \delta T_2 - \delta \Pi_1 - \delta \Pi_2 - \delta \Pi_3 - (\nabla_w D_1, \delta w) - (\nabla_v D_2, \delta v) + F \delta x_1 - P \delta x_2 + M \delta \theta + \mu_1 \delta f_1 + \mu_2 \delta f_2] dt = 0 \quad (2.1)$$

Здесь $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — неопределенные множители Лагранжа, а независимыми величинами являются функции x_1 , x_2 , θ , w , v . Кинематические граничные условия для функции w имеют вид $w(\pm b, t) = w'(\pm b, t) = 0$, а функция $v(\varphi, t)$ 2π -периодична по углу φ . Далее

$$(\nabla_w D_1, \delta w) = \int_{-b}^b \chi (d_1 w''' \delta w'' + d_2 w' \delta w) ds$$

$$(\nabla_v D_2, \delta v) = \int_0^{2\pi} \chi d_3 [n_0 (v'''' + v'') (\delta v''' + \delta v') +$$

$$+ n_1 v''' \delta v' + n_2 v' \delta v' + n_3 v \delta v] d\varphi$$

Область интегрирования в (2.1) для функции w разбивается на две части: $B_1 = \{t_1 \leq t \leq t_2, -b \leq s < s_0\}$ и $B_2 = \{t_1 \leq t \leq t_2, s_0 < s \leq b\}$ и для преобразования соответствующих интегралов используется формула Грина. В результате получим

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta T_1 - \delta \Pi_1 - (\nabla_w D_1, \delta w)] dt =$$

$$= - \int_{B_1 \cup B_2} (\rho_1 w'' + k_1 w^{IV} + k_2 w + \chi d_1 w^{IV} + \chi d_2 w') \delta w ds dt -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} [(k_1 w'''' + \chi d_1 w'''' - \rho_1 w' s_0) \delta w - (k_1 w'' + \chi d_1 w'') \delta w']_0 dt,$$

где $[f]_0 = f(s_0 + 0, t) - f(s_0 - 0, t)$ — скачок функции в точке контакта колеса с рельсом. Приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях δw , δw_0 , $\delta w_0'$ в (2.1) с учетом (1.9), получим уравнения движения и динамические условия сопряжения в точке контакта в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 w'' + k_1 w'' + k_2 w + \chi d_1 w'' + \chi d_2 w' &= 0 \\ [k_1 w'' + \chi d_1 w'' - \rho_1 w' s_0]_0 + \mu_2 &= 0 \\ [k_1 w'' + \chi d_1 w'']_0 + \mu_1 h_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогичным образом поступим с функционалами, содержащими функцию $v(\varphi, t)$ в (2.1). Область интегрирования разобьем на две части: $\{t_1 \leq t \leq t_2, 0 \leq \varphi < \varphi_0\}$ и $\{t_1 \leq t \leq t_2, \varphi_0 < \varphi \leq 2\pi\}$, где $\varphi_0(t)$ соответствует точке контакта K , и после преобразований с использованием формулы Грина получим систему уравнений и условия на скачки

$$\begin{aligned} \rho_2 r_0^2 [r_0 (v'''' - v'' + 2\theta'' v' + 4\theta' v'' + \theta^2 v - \theta^2 v'' - \theta'') + \\ + 2(x_1' \sin \Phi - x_2' \cos \Phi)] + n_0 (v^{(6)} + 2v^{(4)} + v'') + \\ + \chi d_3 n_0 (v^{(6)} + 2v^{(4)} + v'') + n_2 (v'' + \chi d_3 v'') - \\ - n_1 (v^{(4)} + \chi d_3 v^{(4)}) - n_3 (v + \chi d_3 v) = 0 \\ [n_0 (v'' + \chi d_3 v'')]_0 + \mu_1 h_2 + \mu_2 \alpha h_2 = 0 \\ [n_0 (v^{(4)} + \chi d_3 v^{(4)}) - \rho_2 r_0^3 \varphi_0' v']_0 + \mu_1 r_0 \alpha - \mu_2 r_0 = 0 \\ [n_0 (v^{(5)} + 2v'' + \chi d_3 (v^{(5)} + 2v'')) - n_1 (v'' + \chi d_3 v'')] + \\ + \rho_2 r_0^3 (v'' + 2\theta' v + \varphi_0' v)_0 + \mu_1 R + \mu_2 R \alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $[f(\varphi, t)]_0 = f(\varphi_0 + 0, t) - f(\varphi_0 - 0, t)$ — скачок функции в точке контакта.

Наконец, приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях δx_1 , δx_2 , $\delta \theta$ в (2.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} = F + \mu_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial x_2} = \mu_2 - P \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \theta} - \frac{\partial T_2}{\partial \theta} = M + \mu_1 (R - r_0 v_0') + \mu_2 (R \alpha + R v_0 + h_2 v_0'') \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнения (2.2), (2.3), (2.4) совместно с условиями (1.8), (1.10) и кинематическими граничными условиями и условиями сопряжения в точке контакта образуют полную систему уравнений относительно неизвестных x_1 , x_2 , θ , v , w , μ_1 , μ_2 , s_0 и α .

Уравнения движения допускают решение вида $x_1 = c$, $x_2 = \text{const}$, $\theta = \Omega$, $w(s, t) = W(\xi)$, $\xi = s - ct$, $v(\varphi, t) = V(\psi)$, $\psi = \varphi + \Omega t - 3\pi/2$, $\mu_k = \text{const}$, $k = 1, 2$, $s_0 = c$, $\alpha = \text{const}$, если $b = +\infty$. Учитывая правила дифференцирования $w'(s, t) = -cW'(\xi)$ и $v'(\varphi, t) = \Omega V'(\psi)$, представим уравнения, описывающие стационарный режим в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 c^2 W'' + k_1 W^{(4)} + k_2 W - \chi c d_1 W^{(5)} - \chi c d_2 W' = 0 \\ [k_1 W'' - \chi c d_1 W^{(4)}]_0 + \mu_2 = 0, \quad [W^{(n)}]_0 = 0 \quad (n = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [k_1 W'' - \chi c d_1 W''']|_0 + \mu_1 h_1 = 0, \quad W^{(n)}(\pm \infty) = 0 \quad (n = 0, 1) \\
& \rho_2 r_0^3 \Omega^2 (V^{(4)} + 2V'' + V) + n_0 (V^{(6)} + 2V^{(4)} + V'') + \\
& + \chi \Omega d_3 n_0 (V^{(7)} + 2V^{(5)} + V''') - n_1 (V^{(4)} + \chi \Omega d_3 V^{(5)}) + \\
& + n_2 (V'' + \chi \Omega d_3 V''') - n_3 (V + \chi \Omega d_3 V') = 0 \\
& [n_0 (V''' + \chi \Omega d_3 V^{(4)})]_0 + \mu_1 h_2 + \mu_2 \alpha h_2 = 0 \\
& [n_0 (V^{(4)} + \chi \Omega d_3 V^{(5)})]_0 + \mu_1 r_0 \alpha - \mu_2 r_0 = 0 \\
& [n_0 (V^{(5)} + 2V''') + n_0 \chi \Omega d_3 (V^{(6)} + 2V^{(4)}) - \\
& - n_1 (V''' + \chi \Omega d_3 V^{(4)}) - \rho_2 r_0^3 \Omega^2 V''']_0 + \mu_1 R + \mu_2 R \alpha = 0 \\
& [V^{(n)}]_0 = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3) \\
& F + \mu_1 = 0, \quad P = \mu_2, \quad M + \mu_1 (R - r_0 V_0') + \mu_2 (R \alpha + R V_0 + h_2 V_0'') = 0 \\
& h_1 W_0' - \xi_0 + R (\alpha + V_0) + h_2 V_0'' = 0, \quad \xi_0 = -x_1 + s_0 \\
& x_2 = W_0 + h_1 + R - r_0 V_0', \quad W_0' = \alpha + V_0 + V_0'' \\
& c - c h_1 W_0'' + h_2 \Omega (V_0' + V_0''') + R \Omega = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь скачки функции $W(\xi)$ и ее производных вычисляются в точке $\xi = \xi_0$, а функции $V(\psi)$ и ее производных — в точке $\psi = \alpha$. Условия непрерывности функций $W''(\xi_0)$ и $V'''(\alpha)$ следуют из условия существования соответствующих функционалов диссипативных сил и последнее равенство в (2.5) определено корректно. В случае отсутствия диссипации ($\chi = 0$) эти производные имеют разрывы и их значения в точке контакта необходимо определить на основании предельного перехода при $\chi \rightarrow 0$.

3. Определение формы деформированного рельса. Форма деформированного рельса определяется как линейная комбинация $\exp(D_k \xi)$, $k = 1, \dots, 5$, где D_k — корень характеристического уравнения

$$k_1 D^4 + \rho_1 c^2 D^2 + k_2 - \chi c d_1 D^5 - \chi c d_2 D = 0 \tag{3.1}$$

При $\chi = 0$ корни (3.1) имеют вид: $\pm \varepsilon \pm i\omega$, если $0 \leq c < c^* = (4k_1 k_2 / \rho_1^2)^{1/4}$ и $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$, если $c > c^*$. Критическая скорость c^* разделяет области качественно различного поведения колеса при качении по нему рельса [1]. В случае $\chi \neq 0$ возникает пятый корень

$$D_5 = k_1 / (\chi c d_1) + \rho_1 c^3 d_1 \chi / k_1^2 + o(\chi)$$

а вышеуказанные корни получают малые поправки порядка χ :

$$\Delta_k = \frac{\chi c (d_1 D_{k0}^4 + d_2)}{4k_1 D_{k0}^2 + 2\rho_1 c^2} + o(\chi) \quad (k = 1, \dots, 4)$$

где D_{k0} — корень характеристического уравнения (3.1) при $\chi = 0$. С учетом граничных условий при $\xi = \pm \infty$ найдем форму деформированного рельса в докритическом случае в виде

$$W(\xi) = \begin{cases} \sum_{k=1,2} C_k \exp(D_k \eta), & \eta = \xi - \xi_0 > 0 \\ - \sum_{k=3}^5 C_k \exp(D_k \eta), & \eta < 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Здесь $D_1 = \bar{D}_2 = -\varepsilon - i\omega + \Delta_1$, $D_3 = \bar{D}_4 = \varepsilon + i\omega + \Delta_3$. Коэффициенты C_k определяются из системы алгебраических уравнений, вытекающих из условий сопряжения в точке контакта в (2.5):

$$\sum_{k=1}^5 C_k D_k^n = p_3 \delta_{3n} + p_4 \delta_{4n}, \quad n = 0, 1, \dots, 4 \quad (3.3)$$

$$p_3 = -h_1 F / (\chi c d_1), \quad p_4 = (k_1 p_3 + P) / (\chi c d_1)$$

где δ_{3n} , δ_{4n} — символы Кронекера. Решение системы (3.3) представим в форме

$$C_k = \left[\prod_{i=1, i \neq k}^5 (D_i - D_k) \right]^{-1} \left(p_4 - p_3 \sum_{i=1, i \neq k}^5 D_i \right), \quad k = 1, \dots, 5$$

В пределе при $\chi \rightarrow 0$ функция (3.2) и ее производные в точке $\xi = \xi_0$ имеют вид

$$W(\xi) = -\zeta_1^{-1} \exp(-q\eta) [P(\omega \cos \omega\eta + q \sin \omega\eta) + h_1 F (q^2 + \omega^2) \sin \omega\eta] \quad (3.4)$$

$$W_0 = W(\xi_0) = -P\omega / \zeta_1, \quad W_0' = W'(\xi_0) = -h_1 F / (4k_1 \varepsilon)$$

$$W_0'' = W''(\xi_0) = (P + 2h_1 \varepsilon F) / (4k_1 \varepsilon), \quad \zeta_1 = 4k_1 \varepsilon \omega (\varepsilon^2 + \omega^2)$$

где $q = \varepsilon$ при $\eta = \xi - \xi_0 > 0$ и $q = -\varepsilon$ при $\eta < 0$.

Значения ε и ω определяются из биквадратного уравнения (3.1) при $\chi = 0$ в виде

$$\varepsilon = [1/2\gamma_0 (1 - u^2)]^{1/2}, \quad \omega = [1/2\gamma_0 (1 + u^2)]^{1/2}$$

$$\gamma_0 = (k_2/k_1)^{1/2}, \quad u = c/c^* < 1$$

В случае движения со скоростями превышающими критическую примем

$$D_1 = \bar{D}_2 = i\omega_1 + \Delta_1, \quad D_3 = \bar{D}_4 = i\omega_2 + \Delta_3,$$

$$\omega_{1,2}^2 = \gamma_0 [u^2 \pm (u^4 - 1)^{1/2}], \quad \omega_1 > \omega_2 > 0, \quad u > 1$$

$$\Delta_{2j-1} = \bar{\Delta}_{2j} = \frac{(-1)^j \chi (d_1 \omega_j^4 + d_2)}{4k_1 \gamma_0 (u^4 - 1)^{1/2}} + o(\chi), \quad j = 1, 2$$

Форма деформированного рельса также представляется в виде (3.2). При переходе к пределу при $\chi \rightarrow 0$ получим

$$W(\xi) = \zeta_2^{-1} (P\omega_i^{-1} \sin \omega_i \eta - h_1 F \cos \omega_i \eta) \quad (3.5)$$

$$W_0 = -h_1 F / \zeta_2, \quad W_0' = P / \zeta_2$$

$$W_0'' = h_1 \omega_1^2 F / \zeta_2, \quad \zeta_2 = k_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

где $i=1$ при $\eta > 0$ и $i=2$ при $\eta < 0$.

Заметим, что функция $W(\xi)$ в (3.5) не удовлетворяет граничным условиям при $\xi = \pm \infty$. Решение (3.5) описывает незатухающие волны, бегущие в рельсе со скоростью $c > c^*$. В практических важных случаях критическая скорость c^* имеет порядок 1500 км/час [1].

4. Определение формы деформированного колеса. Поскольку функция $V(\psi)$ в (2.5) 2π -периодична, то, заменяя аргумент ψ на $\psi + \alpha$ и сохраняя прежние обозначения, получим, что функция $V(\psi)$ определена на отрезке $[0, 2\pi]$, а скачок $[V^{(n)}]_0 = V^{(n)}(0) - V^{(n)}(2\pi)$. Как и в предыдущем пункте функция $V(\psi)$ определяется из уравнений (2.5) в виде

$$V(\psi) = \sum_{k=1}^7 E_k \exp(\Lambda_k \psi) \quad (4.1)$$

где E_k — постоянные, а Λ_k — корень характеристического уравнения

$$(\Lambda^2 + 1)^2 (n_0 \Lambda^2 + \kappa n_0 \Lambda^3 + g) = (n_1 \Lambda^4 - n_2 \Lambda^2 + n_3) (1 + \kappa \Lambda) \quad (4.2)$$

$$g = \rho_2 r_0^3 \Omega^2, \quad \kappa = \chi \Omega d_3 < 0$$

Если в уравнении (4.2) принять $\kappa = 0$, то оно сводится к кубическому уравнению относительно Λ^2 и его корни можно найти с помощью формулы Кардано. При $|\Omega| < \Omega^* = [n_3 / (\rho_2 r_0^3)]^{1/2}$ его корни имеют вид $\pm z$, $\pm x \pm iy$, где x , y , z — действительные числа; при $|\Omega| = \Omega^*$ корни $\pm z$ обращаются в нуль, а при $|\Omega| > \Omega^*$ становятся чисто мнимыми.

Когда $\kappa \neq 0$, уравнение (4.2) имеет корень $\Lambda_7 = -\kappa^{-1} - \kappa g / n_0 + o(\kappa)$, а остальные корни невозмущенного уравнения получают малые добавки порядка κ . Уравнение (4.2) не имеет чисто мнимых корней за исключением нулевого корня при $g = n_3$.

Условия сопряжения в (2.5) с учетом (4.1) представляются в форме

$$\sum_{k=1}^7 \Lambda_k^n Z_k = q_4 \delta_{n4} + q_5 \delta_{n5} + q_6 \delta_{n6} \quad (n = 0, \dots, 6) \quad (4.3)$$

$$q_4 = A/\kappa, \quad q_5 = B/\kappa - A/\kappa^2, \quad q_6 = C/\kappa - B/\kappa^2 + A/\kappa^3$$

$$A = (F - \alpha P) h_2 / n_0, \quad B = (\alpha F + P) r_0 / n_0$$

$$C = (F - \alpha P) R / n_0 - (2 - n_1 / n_0) A, \quad Z_k = E_k [1 - \exp(2\pi \Lambda_k)].$$

Соотношения (4.3) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных Z_k , решение которой имеет вид

$$Z_k = \left[\prod_{i=1}^7 (\Lambda_i - \Lambda_k) \right]^{-1} \left(q_6 - q_5 \sum_{i=1}^7 \Lambda_i + q_4 \sum_{\nu=j=1}^7 \Lambda_i \Lambda_j \right) \quad (4.4)$$

Здесь штрих у знаков произведения и суммы означает, что переменные индексы не принимают значения k . Коэффициенты E_k определяются однозначно, если $\exp(2\pi \Lambda_k) \neq 1$. Последнее невозможно, если $|\Omega| = \Omega^*$ и один из корней характеристического уравнения обращается в нуль. Это явление можно классифицировать как резонанс, в окрестности которого функция $V(\psi)$ становится бесконечно большой и нарушаются гипотезы, заложенные в модель. В практически важных случаях резонансу соответствует линейная скорость колеса порядка 700 км/час.

Для дальнейшего потребуются значения функции $V(0)$ и ее производных до третьего порядка включительно. Вычислим эти величины на основе формул (4.1), (4.4) и найдем их предельные значения при $\kappa \rightarrow 0$:

$$V_0^{(n)} = - \sum_{k=1}^6 \left\{ \left(C_0 - B \sum_{i=1}^6 \Lambda_{i0} + A \sum_{\nu=j=1}^6 \Lambda_{i0} \Lambda_{j0} \right) \Lambda_{k0}^n \times \right. \\ \left. \times \left[(1 - \exp(2\pi \Lambda_{k0})) \prod_{i=1}^6 (\Lambda_{i0} - \Lambda_{k0}) \right]^{-1} \right\} \\ n = 0, 1, 2, 3, \quad C_0 = C - gA/n_0 \quad (4.5)$$

В дальнейшем опустим индекс ноль у корней Λ_{i0} и, учитывая равенства, вытекающие из свойств корней характеристического уравнения

$$\sum_{i=1}^6 \Lambda_i = -\Lambda_k, \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 \Lambda_i \Lambda_j = \Lambda_k^2 + (2n_0 + g - n_1) n_0^{-1}$$

$$\prod_{i=1}^6 (\Lambda_i - \Lambda_k) = -2\Lambda_k \Phi'(\lambda_k), \quad \lambda_k = \Lambda_k^2$$

где $\Phi(\Lambda_k^2) = 0$ — характеристическое уравнение (4.2) при $x = 0$, представим выражение (4.5) в виде

$$V_0^{(n)} = \sum_{k=1}^6 \frac{A(R/h_2 + \lambda_k) \Lambda_k^{n-1} + B \Lambda_k^n}{2(1 - \exp(2\pi\lambda_k)) \Phi'(\lambda_k)} \quad (4.6)$$

Разобьем шесть корней характеристического уравнения на пары $(\Lambda_k, \Lambda_{k+3})$, где $\Lambda_k = -\Lambda_{k+3}$ и $k = 1, 2, 3$, и найдем суммы в (4.6), соответствующие каждой паре. В результате получим

$$V_0^{(n)} = - \sum_{k=1}^3 \frac{(R/h_2 + \lambda_k) \Lambda_k^{n-1} \operatorname{cth} \pi \Lambda_k}{2\Phi'(\lambda_k)} A(n=0, 2) \quad (4.7)$$

$$V_0^{(n)} = - \sum_{k=1}^3 \frac{\Lambda_k^n \operatorname{cth} \pi \Lambda_k}{2\Phi'(\lambda_k)} B + \frac{1}{2} A \delta_{3n}(n=1, 3)$$

При преобразованиях (4.6) учитывались свойства корней кубического уравнения

$$\sum_{k=1}^3 \lambda_k^n / \Phi'(\lambda_k) = \delta_{2n} \quad (n=0, 1, 2)$$

5. Сопротивление движению. Найденные в разд. 3 и 4 формулы позволяют определить остальные характеристики движения, в частности, угол α и связь между поступательной и угловой скоростями колеса. Согласно предпоследнему равенству в (2.5) с учетом (3.4), (3.5) и (4.7) получим

$$\alpha = \begin{cases} F[\gamma - h_1/(4k_1\varepsilon)](1 + \gamma P)^{-1}, & c < c^* \\ (F\gamma + P/\zeta_2)(1 + \gamma P)^{-1}, & c > c^* \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\gamma = \frac{h_2}{2n_0} \sum_{k=1}^3 [\Lambda_k + \Lambda_k^3 + (\Lambda_k^{-1} + \Lambda_k) R/h_2] \operatorname{cth} \pi \Lambda_k / \Phi'(\lambda_k)$$

Из последнего равенства в (2.5) с точностью до малых второго порядка следует

$$R\Omega = -c [1 - h_1 W_0'' - (V_0' + V_0''') h_2/R] \quad (5.2)$$

Вопрос о сопротивлении движению в стационарном режиме может быть решен на основе теоремы об изменении полной энергии системы

$$d(T_1 + T_2 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3)/dt - Fc - M\Omega = -2c^2 D_1 [W'] - 2\Omega^2 D_2 [V']$$

Поскольку в стационарном режиме энергия $T_1 + T_2 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$ постоянна, то мощность, затрачиваемая на поддержание стационарного режима

$$N = Fc + M\Omega = 2c^2 D_1 [W'] + 2\Omega^2 D_2 [V'] \quad (5.3)$$

Определение значений функционалов диссипативных сил представляет из себя довольно громоздкую задачу. Поэтому воспользуемся первым выражением для определения мощности в (5.3). Используя выражения момента в (2.5) и угловой скорости (5.2), получим

$$N/c = F(h_1 W_0'' + V_0' + V_0''' h_2/R) + P(W_0' - V_0'' r_0/R) \quad (5.4)$$

Рассмотрим случай, когда диссипативные силы отсутствуют ($\chi = 0$). В результате получим

$$Fh_1W_0'' + PW_0' = \begin{cases} h_1F^2/(2k_1), & c < c^* \\ (P^2 + h_1^2\omega_1^2F^2)/\zeta_2, & c > c^* \end{cases} \quad (5.5)$$

$$F(V_0' + V_0'''h_2/R) - PV_0''r_0/R = h_2^2(F - \alpha P)^2/(2Rn_0)$$

Во втором равенстве (5.5) угол α следует заменить выражениями (5.1). Отношение N/c можно трактовать как эквивалентную силу сопротивления F_c качению колеса, которая согласно (5.4), (5.5) равна

$$F_c = \begin{cases} \frac{h_1F^2}{2k_1} + \frac{h_2^2F^2 [1 + Ph_1/(4k_1\varepsilon)]^2}{2Rn_0(1 + \gamma P)^2}, & c < c^* \\ \frac{P^2 + h_1^2\omega_1^2F^2}{\zeta_2} + \frac{h_2^2(F - P^2/\zeta_2)^2}{2Rn_0(1 + \gamma P)^2}, & c > c^* \end{cases} \quad (5.6)$$

Из формул (5.6) следует, что в случае $F = 0$ сопротивление качению колеса со скоростями меньшими критической скорости c^* равно нулю, а при $c > c^*$ отлично от нуля. В последнем случае сопротивление носит волновой характер, так как в рельсе возбуждаются незатухающие волны согласно (3.5). Коэффициент γ в (5.1) может обращаться в бесконечность, если $\text{sh } \pi\Lambda_k = 0$. Эти случаи следует трактовать как резонансы, в окрестностях которых полученные формулы теряют смысл, поскольку нарушаются гипотезы, заложенные в модель. Резонансы имеют место, если один из корней уравнения (4.2) при $\chi = 0$ имеет вид $\Lambda_k = im$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Случаю $\Lambda_k = 0$ соответствует критическая угловая скорость Ω^* . При дальнейшем увеличении угловой скорости колеса возникает пара чисто мнимых корней $\pm iv(\Omega^2)$, где $v(\Omega^2)$ возрастает с увеличением Ω^2 и принимает последовательно значения $1, 2, \dots$. В окрестности резонанса величина γ принимает бесконечно большие положительные и отрицательные значения и существует значение Ω^2 , при котором $1 + \gamma P = 0$. Следовательно, согласно (5.6) в этих точках сопротивление движению становится бесконечно большим.

Наличие диссипации ($\chi \neq 0$) сглаживает резонансы, в частности, уравнение (4.2) уже не будет иметь чисто мнимых корней кроме нулевого при $|\Omega| = \Omega^*$. Влияние диссипативных сил на сопротивление движению с точностью до членов порядка χ можно оценить, если вычислить значения диссипативных функционалов в (5.3) с использованием формул, описывающих предельную форму рельса и колеса при $\chi \rightarrow 0$.

При качении колеса по рельсу точки колеса совершают затухающие колебания с частотами $c\omega$, если $c < c^*$, и $c\omega_1, c\omega_2$, если $c > c^*$. В свою очередь точки колеса колеблются с частотами $\Omega \text{Im } \Lambda_k$. Эти колебания порождают колебания окружающей среды, которые следует трактовать как регулярный шум, сопровождающий качение колеса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
2. Ишлинский А. Ю. Трение качения//ПММ. 1938. Т. 2. Вып. 2. С. 245—260.
3. Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси//Тр. ЦАГИ. 1945. № 564. 32 с.
4. Чудаков Е. А. Качение автомобильного колеса. М.: Машгиз, 1947. 72 с.
5. Smily R. F. Correlation, evaluation and extension of linearized theories for motion and wheel shimmy//National Advisory Committee for Aeronautics. 1957. № 1299. 48 p.
6. Левин М. А., Фуфаев Н. А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 271 с.

7. *Remington P. J.* Wheel/rail rolling noise, 1: Theoretical analysis/J. Acoust. Soc. America. 1987. V. 81. № 6. P. 1805—1823.
8. *Вильке В. Г.* О качении вязкоупругого колеса//Изв.АН. МТТ. 1993. № 6. С. 11—15.
9. *Ишлинский А. Ю.* Механика: идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985. 623 с.
10. *Вильке В. Г.* О качении жесткого колеса по деформируемому рельсу//ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 512—517.
11. *Вильке В. Г.* Нелинейные колебания упругого растяжимого вращающегося кольца//Вестн. Моск. ун-та Матем. Механ. 1988. № 5. С. 31—35.
12. *Лейбензон Л. С.* Краткий курс теории упругости. М.-Л.: ОГИЗ, 1942. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1994