МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 624.072.2

© 1996 г. Л. С. РЫБАКОВ

УПРУГИЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СТРУКТУРЫ

Для плоской регулярной упругой стержневой структуры ферменного типа с элементарной ячейкой в виде прямоугольника с двумя несвязанными между собой диагональными стержнями посредством метода «склейки» и метода начальных параметров строится строгая замкнутая линейная теория — своеобразный дискретный аналог плоской теории упругого континуума с микроструктурой [1]. В рамках этой теории даются альтернативные постановки задачи, включая ее обобщения на случай поврежденных или предварительно деформированных стержней. Применение теории иллюстрируется задачами о напряженном состоянии конечной, бесконечной и полубесконечной структур с одним рядом элементарных ячеек, для которых строятся точные аналитические решения и приводятся результаты конкретных вычислений.

В отличии от многочисленных исследований по механике стержневых упругих систем [2, 3] излагаемая теория свободна как от дополнительных гипотез, связанных, например, с заменой реальной структуры соответствующей континуальной моделью [4, 5] и другие, так и предположений процедурного характера, неизбежных при реализации метода сил, метода перемещений [6—8] и другие и некоторых иных методов.

1. Определяющие соотношения. Пусть дана плоская свободная регулярная структура, состоящая из узлов (идеальных шарниров) и расположенных между ними и работающих только на растяжение — сжатие горизонтальных, вертикальных и несвязанных между собой восходящих и нисходящих наклонных однородных стержней, которые условимся называть соответственно 11-, 22-, 12- и 21-стержнями. Повторяющийся вдоль осей x_1, x_2 элементарный фрагмент структуры показан на фиг. 1. Геометрические и физические свойства такой стержневой системы целиком определяются длинами $l_{\alpha\beta}$ и жесткостями $g_{\alpha\beta}$ на растяжение — сжатие упругих линий $\alpha\beta$-стержней (здесь и далее α, $\beta = 1, 2$), причем регулярность структуры предполагает неизменность этих параметров в пределах одного семейства стержней. Внешние воздействия на систему слагаются в общем случае из погонных осевых сил стержней и сосредоточенных сил в узлах.

Из-за дискретной двумерности структуры для нумерации ее элементов (узлов, стержней) требуется два дискретных целочисленных параметра, которые для переменных величин, связанных с конкретным элементом структуры, играют роль дискретных аргументов. Обозначим их символами m, n и условимся, что они меняются (растут) в направлении осей x_1, x_2 соответственно. Тогда, полагая для узлов $m = 0, 1, 2, \ldots, M$, а $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, где M, N — заданные целые числа, имеем: для $\alpha\alpha$-стержней $m = 0, 1, 2, \ldots, M + \alpha - 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N - \alpha + 1$; для 12- и 21-стрежней $m = 0, 1, 2, \ldots, M - 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$.

Пусть $f[m, n]$ — некоторая функция дискретных аргументов m, n. Определим линейные операторы $\Delta^{\pm}$, $\nabla^{\pm}$ равенствами

$$\Delta_1^{\pm} f\,[m, n] = \pm f\,[m \pm 1, n] \mp f\,[m, n], \quad \nabla_1^{\pm} f = f\,[m \pm 1, n]$$

$$\Delta_2^{\pm} f\,[m, n] = \pm f\,[m, n \pm 1] \mp f\,[m, n], \quad \nabla_2^{\pm} f = f\,[m, n \pm 1]$$

Эти операторы перестановочны, причем, как нетрудно видеть (здесь и далее суммирование по повторяющемуся индексу отсутствует):

$$\nabla_\alpha^\pm = 1 \pm \Delta_\alpha^\pm, \ \nabla_\alpha^+\nabla_\alpha^- = 1, \ \Delta_\alpha^\pm = \Delta_\alpha^\mp\nabla_\alpha^\pm \tag{1.1}$$

Их использование дает возможность, во-первых, записывать все формулы и уравнения в переменных с несмещенными текущими значениями дискретных аргументов, отказываясь, ради краткости, там, где это необходимо, от явного указания этих аргументов при символах переменных, а во-вторых, образовывать с их помощью операторы частных разностей более высокого порядка. Так, например, для операторов частных разностей второго порядка

$$\Delta_1^2 f = \Delta_1^2 f\,[m, n] = f\,[m + 1, n] - 2f\,[m, n] + f\,[m - 1, n]$$

$$\Delta_2^2 f = \Delta_2^2 f\,[m, n] = f\,[m, n + 1] - 2f\,[m, n] + f\,[m, n - 1]$$

справедливы выражения

$$\Delta_\alpha^2 = \Delta_\alpha^+\Delta_\alpha^- = \Delta_\alpha^+ - \Delta_\alpha^- = \nabla_\alpha^+ - 2 + \nabla_\alpha^- \tag{1.2}$$

Условимся также, что если в формулах или уравнениях попадается переменная, значения дискретных аргументов которой указывают явно или неявно (после раскрытия предшествующих разностных операторов) на несуществующий элемент структуры, то соответствующее значение этой переменной следует считать равным нулю.

Приступая к упругому анализу описанной выше структуры, воспользуемся методом «склейки» в версии, изложенной, например, в [9]. Согласно этой версии расчленим систему на элементы и проведем их анализ (упругий — для стержней, статический — для узлов) с учетом сил взаимодействия и геометрических условий сопряжения с соседними элементами.

Введем обозначения $x \in [0, 1]$ — отнесенная к $l_{\alpha\beta}$ продольная координата вдоль оси $\alpha\beta$-стержня; $u_{\alpha\beta}(x)$, $n_{\alpha\beta}(x)$ и $p_{\alpha\beta}(x)$ — осевые соответственно отнесенное к $l_{\alpha\beta}$ смещение, внутреннее усилие и погонная нагрузка в произвольной точке оси того же стержня; U_α и P_α — отнесенное к $l_{\alpha\alpha}$ смещение узла и действующая на него сила в направлении x_α.

Деформирование изолированного $\alpha\beta$-стержня описывают уравнения

$$n_{\alpha\beta}'(x) + l_{\alpha\beta}p_{\alpha\beta}(x) = 0, \ n_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}'(x)$$

общее решение которых с учетом геометрических условий сопряжения узлов с началами исходящих из них стержней

$$u_{\alpha\alpha}(0) = U_\alpha, \ u_{12}(0) = \lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 U_2 \tag{1.3}$$

$$u_{21}(0) = \nabla_2^+ (\lambda_1^2 U_1 - \lambda_2^2 U_2), \ \lambda_\alpha = l_{\alpha\alpha}/l_{12}$$

дается следующими формулами:

$$u_{\alpha\alpha}(x) = U_\alpha + xg_{\alpha\alpha}^{-1}N_{\alpha\alpha} + u_{\alpha\alpha}^*(x)$$

$$u_{12}(x) = \lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 U_2 + xg_{12}^{-1}N_{12} + u_{12}^*(x)$$

$$u_{21}(x) = \nabla_2^+ (\lambda_1^2 U_1 - \lambda_2^2 U_2) + xg_{21}^{-1}N_{21} + u_{21}^*(x)$$

$$n_{\alpha\beta}(x) = N_{\alpha\beta} + n_{\alpha\beta}^*(x), \ u_{\alpha\beta}^*(x) = -l_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1}\int_0^x (x - \tau)\,p_{\alpha\beta}(\tau)\,d\tau \tag{1.4}$$

$$n_{\alpha\beta}^*(x) = -l_{\alpha\beta}\int_0^x p_{\alpha\beta}(\tau)\,d\tau, \quad N_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta}(0)$$

Подставим первые три из них в геометрические условия сопряжения узлов с концами подходящих к ним стержней:

$$u_{\alpha\alpha}(1) = \nabla_\alpha^+ U_\alpha, \ u_{12}(1) = \nabla_1^+ \nabla_2^+ (\lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 U_2)$$

$$u_{21}(1) = \nabla_1^+ (\lambda_1^2 U_1 - \lambda_2^2 U_2) \tag{1.5}$$

В результате получим соотношения

$$N_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} (E_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta}^*) \tag{1.6}$$

$$E_{\alpha\alpha} = \nabla_\alpha^+ U_\alpha, \ E_{12} = (\nabla_1^+ \nabla_2^+ - 1)(\lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 U_2) \tag{1.7}$$

$$E_{21} = (\Delta_1^+ - \Delta_2^+)(\lambda_1^2 U_1 - \lambda_2^2 U_2) = (\nabla_1^+ - \nabla_2^+)(\lambda_1^2 U_1 - \lambda_2^2 U_2)$$

$$E_{\alpha\beta}^* = u_{\alpha\beta}^*(1) \tag{1.8}$$

Уравнения равновесия узлов в проекциях на оси x_α:

$$n_{\alpha\alpha}(0) - \nabla_\alpha^- n_{\alpha\alpha}(1) + \lambda_\alpha [n_{12}(0) - \nabla_1^- \nabla_2^- n_{12}(1)] -$$

$$- (-1)^\alpha \lambda_\alpha [\nabla_2^- n_{21}(0) - \nabla_1^- n_{21}(1)] + P_\alpha = 0$$

после подстановки в них четвертой формулы (1.4) принимают вид

$$\Delta_\alpha^- N_{\alpha\alpha} + \lambda_\alpha [(1 - \nabla_1^- \nabla_2^-) N_{12} + (\Delta_\alpha^- - \Delta_{3-\alpha}^-) N_{21}] + P_\alpha^* = 0 \tag{1.9}$$

$$P_\alpha^* = P_\alpha - \nabla_\alpha^- n_{\alpha\alpha}^*(1) - \lambda_\alpha \nabla_1^- \nabla_2^- n_{12}^*(1) + (-1)^\alpha \lambda_\alpha \nabla_1^- n_{21}^*(1)$$

Число статических искомых $N_{\alpha\beta}$, равное $4MN + M + N$, превосходит число $2(M+1)(N+1)$ — 3 независимых уравнений равновесия (1.9) (без трех уравнений глобального равновесия системы) на $(M-1)(N-1) + MN$. Следовательно, рассматриваемая задача статически неопределима. Недостающие уравнения совместности деформаций без труда устанавливаются из формул (1.7). Действительно, замечая, что

$$E_{12} = \lambda_1^2 (\nabla_2^+ E_{11} + \Delta_2^+ U_1) + \lambda_2^2 (\nabla_1^+ E_{22} + \Delta_1^+ U_2)$$

$$E_{21} = \lambda_1^2 (E_{11} - \Delta_2^+ U_1) + \lambda_2^2 (E_{22} - \Delta_1^+ U_2)$$

после исключения смещений находим (см. (1.1), (1.2)):

$$E_{12} + E_{21} = \lambda_1^2 (1 + \nabla_2^+) E_{11} + \lambda_2^2 (1 + \nabla_1^+) E_{22} \tag{1.10}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, M-1; n = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$$

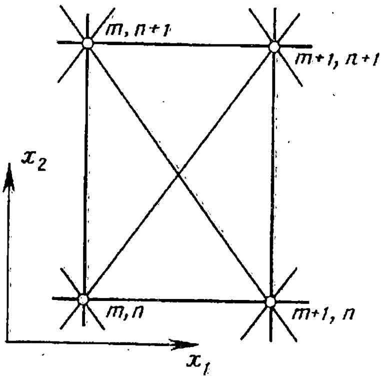
$$\Delta_1^- \Delta_2^- (E_{12} - E_{21}) = \lambda_1^2 (1 + \nabla_1^-) \Delta_2^2 E_{11} + \lambda_2^2 (1 + \nabla_2^-) \Delta_1^2 E_{22} \tag{1.11}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, M-1; n = 1, 2, \ldots, N-1)$$

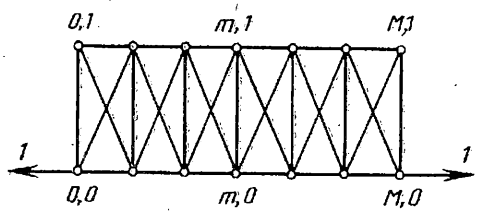
Можно показать, что уравнения (1.10) и (1.11) выражают соответственно совместность полных удлинений стержней элементарной ячейки структуры (см. фиг. 1) и равенство нулю суммы изменений прямых углов между $\alpha\alpha$-стержнями во внутренних узлах системы.

Уравнения (1.9), отвечающие граничным узлам, представляют статические краевые условия. В тех случаях, когда на граничные узлы наложены геометрические связи, они заменяются геометрическими краевыми условиями вида $U_\alpha = U_\alpha^*$ ($m = 0$, M или/и $n = 0$, N), где U_α^* — смещения узлов, предписанные им наложенными связями.

Согласно формулам (1.4) напряженно-деформированное состояние структуры определено с точностью до смещений U_α узлов и усилий $N_{\alpha\beta}$. Для их определения и связанных с ними полных удлинений $E_{\alpha\beta}$ стержней служат геометрические



Фиг. 1



Фиг. 2

(1.7) и физические (1.6) соотношения, уравнения равновесия (1.9) и уравнения совместности деформаций (1.10), (1.11), образующие все вместе полную замкнутую систему определяющих соотношений теории изучаемой упругой структуры. Они отражают смешанную постановку задачи и, как можно показать, подтверждаются вариационными принципами Лагранжа и Кастильяно.

2. Альтернативные постановки задач. Примем сначала за основные (определяемые в первую очередь) неизвестные смещения U_α. Посредством формул (1.6), (1.7) равенства (1.9) преобразуются (см. (1.1), (1.2)) в систему уравнений в частных разностях четвертого порядка, служащую для нахождения искомых U_α:

$$g_{\alpha\alpha}\Delta_\alpha^2 U_\alpha + \lambda_\alpha g_{12}(\Delta_1^+ + \Delta_2^-)(\Delta_1^- + \Delta_2^+)(\lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 U_2) -$$

$$- (-1)^\alpha \lambda_\alpha g_{21}(\Delta_1^+ - \Delta_2^+)(\Delta_1^- - \Delta_2^-)(\lambda_1^2 U_1 - \lambda_2^2 U_2) + p_\alpha = 0$$

$$p_\alpha = P_\alpha^* - g_{\alpha\alpha}\Delta_\alpha^- E_{\alpha\alpha}^* - \lambda_\alpha [g_{12}(1 - \nabla_1^-\nabla_2^-) E_{12}^* - (-1)^\alpha g_{21}(\Delta_1^- - \Delta_2^-) E_{21}^*]$$

Примем теперь за основные неизвестные $N_{\alpha\beta}$. Для отыскания их следует воспользоваться уравнениями (1.9) и равенствами

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \varkappa_{\alpha\alpha}\lambda_\alpha^{-1}(1 + \nabla_{3-\alpha}^+) N_{\alpha\alpha} - \varkappa_{12}N_{12} - \varkappa_{21}N_{21} = E_0^* \qquad (2.1)$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, M-1;\ n = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \varkappa_{\alpha\alpha}\lambda_\alpha^{-1}(1 + \nabla_\alpha^-)\Delta_{3-\alpha}^2 N_{\alpha\alpha} - \Delta_1^-\Delta_2^-(\varkappa_{12}N_{12} - \varkappa_{21}N_{21}) = E^* \qquad (2.2)$$

$$(m = 1, 2, \ldots, M-1;\ n = 1, 2, \ldots, N-1)$$

$$E_0^* = \sum_{\alpha=1}^{2}[E_{\alpha,\,3-\alpha}^* - \lambda_\alpha^2(1 + \nabla_{3-\alpha}^+) E_{\alpha\alpha}^*], \quad \varkappa_{\alpha,\,3-\alpha} = g_{\alpha,\,3-\alpha}^{-1}$$

$$E^* = -\sum_{\alpha=1}^{2}[(-1)^\alpha \Delta_1^-\Delta_2^- E_{\alpha,\,3-\alpha}^* + \lambda_\alpha^2(1 + \nabla_\alpha^-)\Delta_{3-\alpha}^2 E_{\alpha\alpha}^*], \quad \varkappa_{\alpha\alpha} = \lambda_\alpha^3 g_{\alpha\alpha}^{-1}$$

в которые переходят уравнения совместности деформаций (1.10), (1.11) после исключения из них деформаций $E_{\alpha\beta}$ с помощью соотношений (1.6).

Систему четырех уравнений (1.9), (2.1), (2.2) путем введения двух функций усилий $\varphi = \varphi[m, n]$ и $\psi = \psi[m, n]$ можно свести к системе двух уравнений в частных разностях. Действительно, пусть $N_{\alpha\beta}^*$ — какое-либо частное решение уравнений (1.9). Чтобы найти его, достаточно дополнить эти уравнения какими-нибудь не противоречащими им независимыми соотношениями между $N^*_{\alpha\beta}$ в количестве $(M-1)\ (N-1)+MN$. Для этого можно прибегнуть к одной из основных систем метода сил или же воспользоваться эвристическими соображениями.

Уравнения (1.9), очевидно, будут выполнены, если положить

$$N_{\alpha\alpha} - N^*_{\alpha\alpha} + \lambda_\alpha\ [\nabla^-_{3-\alpha}\ (N_{12} - N^*_{12}) + N_{21} - N^*_{21}] = \lambda_\alpha \Delta^-_{3-\alpha}\omega_\alpha$$

$$N_{12} - N^*_{12} - N_{21} + N^*_{21} = -\ \Delta^-_\alpha\omega_\alpha$$

Здесь ω_α — произвольные вспомогательные функции дискретных аргументов m, n. Левая часть последнего равенства не должна зависеть от α. Поэтому можно принять, что $\omega_\alpha = 2\nabla^+_\alpha\Delta^+_{3-\alpha}\varphi$. Вторую функцию усилий введем посредством соотношения $N_{12} - N^*_{12} + N_{21} - N^*_{21} = 2\psi$.

В итоге приходим к следующему общему решению уравнений равновесия (1.9):

$$N_{\alpha\alpha} = \lambda_\alpha\ [(1 + \nabla^+_\alpha)\ \Delta^2_{3-\alpha}\varphi - (1 + \nabla^-_{3-\alpha})\ \psi] + N^*_{\alpha\alpha} \tag{2.3}$$

$$N_{\alpha,\,3-\alpha} = \psi + (-\ 1)^\alpha\ \Delta^+_1\Delta^+_2\varphi + N^*_{\alpha,\,3-\alpha}$$

Подставляя его в равенства (2.1), (2.2) находим искомую систему уравнений в частных разностях шестого порядка, служащую для отыскания функций φ и ψ $(\Delta^4_\alpha = \Delta^2_\alpha\Delta^2_\alpha)$:

$$[(1 + \nabla^+_1)\ (1 + \nabla^+_2)\ (\varkappa_{11}\Delta^2_2 + \varkappa_{22}\Delta^2_1) + \varkappa_-\Delta^+_1\Delta^+_2]\ \varphi -$$

$$-\ [\varkappa_{11}\ (\Delta^2_2 + 4) + \varkappa_{22}\ (\Delta^2_1 + 4) + \varkappa_+]\ \psi = f_0$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, M-1;\ n = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$$

$$[\varkappa_{11}\ (\Delta^2_1 + 4)\ \Delta^4_2 + \varkappa_{22}\ (\Delta^2_2 + 4)\ \Delta^4_1 + \varkappa_+\Delta^2_1\Delta^2_2]\ \varphi - \tag{2.4}$$

$$-\ [(1 + \nabla^-_1)\ (1 + \nabla^-_2)\ (\varkappa_{11}\Delta^2_2 + \varkappa_{22}\Delta^2_1) + \varkappa_-\Delta^-_1\Delta^-_2]\ \psi = f$$

$$(m = 1, 2, \ldots, M-1;\ n = 1, 2, \ldots, N-1)$$

$$f_0 = E^*_0 + \sum_{\alpha=1}^{2}\ [\varkappa_{\alpha,\,3-\alpha}N^*_{\alpha,\,3-\alpha} - \varkappa_{\alpha\alpha}\lambda^{-1}_\alpha\ (1 + \nabla^+_{3-\alpha})\ N^*_{\alpha\alpha}],\quad \varkappa_\pm = \varkappa_{12} \pm \varkappa_{21}$$

$$f = E^* - \sum_{\alpha=1}^{2}\ [(-\ 1)^\alpha\ \varkappa_{\alpha,\,3-\alpha}\Delta^-_1\Delta^-_2 N^*_{\alpha,\,3-\alpha} + \varkappa_{\alpha\alpha}\lambda^{-1}_\alpha\ (1 + \nabla^-_\alpha)\ \Delta^2_{3-\alpha}N^*_{\alpha\alpha}]$$

Анализ статических граничных условий (см. (1.9) при $m = 0$, M или/и $n = 0$, N) с учетом выражений (2.3) показывает, что системе (2.4) отвечают краевые условия

$$\varphi = 0\ \ (m = -\ 1, 0, M, M+1\ \text{или/и}\ n = -\ 1, 0, N, N+1) \tag{2.5}$$

$$\psi = 0\ \ (m = -\ 1, M\ \text{или/и}\ n = -\ 1, N)$$

Таким образом, число нетривиальных, вообще говоря, значений функций φ и ψ совпадает с порядком системы (2.4) как системы линейных алгебраических уравнений. Значения функции φ соотносятся с внутренними узлами структуры, а значения ψ — с ее элементарными ячейками. При отсутствии в структуре внутренних узлов исключается из рассмотрения второе уравнение (2.4). Одновременно с этим в первом уравнении (2.4) следует положить $\varphi = 0$.

Полученные выше результаты допускают очевидные обобщения на случай термостатики, динамики и дискретной неоднородности ($l_{\alpha\beta}$ и/или $g_{\alpha\beta}$ — функции

m, n) структуры. Остановимся детальнее на обобщении, связанном с заменой геометрических условий сопряжения (1.3), (1.5) условиями, допускающими взаимные смещения $d_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $d_{\alpha\beta}^{(1)}$ соответственно начал и концов $\alpha\beta$-стержней и прилежащих к ним узлов:

$$u_{\alpha\alpha}(0) = U_\alpha + d_{\alpha\alpha}^{(0)}, \quad u_{12}(0) = \lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 U_2 + d_{12}^{(0)}$$

$$u_{21}(0) = \nabla_2^+ (\lambda_1^2 U_1 - \lambda_2^2 U_2) + d_{21}^{(0)}$$

$$u_{\alpha\alpha}(1) = \nabla_\alpha^+ U_\alpha - d_{\alpha\alpha}^{(1)}, \quad u_{12}(1) = \nabla_1^+ \nabla_2^+ (\lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 U_2) - d_{12}^{(1)}$$

$$u_{21}(1) = \nabla_1^+ (\lambda_1^2 U_1 - \lambda_2^2 U_2) - d_{21}^{(1)}$$

Нетрудно видеть, что все остальные рассуждения, сохранят силу, если внести в них коррективы (срав. с (1.4), (1.8)):

$$u_{\alpha\alpha}(x) = U_\alpha + d_{\alpha\alpha}^{(0)} + x g_{\alpha\alpha}^{-1} N_{\alpha\alpha} + u_{\alpha\alpha}^*(x)$$

$$u_{12}(x) = \lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 U_2 + d_{12}^{(0)} + x g_{12}^{-1} N_{12} + u_{12}^*(x)$$

$$u_{21}(x) = \nabla_2^+ (\lambda_1^2 U_1 - \lambda_2^2 U_2) + d_{21}^{(0)} + x g_{21}^{-1} N_{21} + u_{21}^*(x)$$

$$E_{\alpha\beta}^* = u_{\alpha\beta}^*(1) + d_{\alpha\beta}, \quad d_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}^{(0)} + d_{\alpha\beta}^{(1)}$$

Искусственное введение несовместностей $d_{\alpha\beta}$ в определяющие соотношения дает возможность влиять на взаимодействие элементов системы либо до, либо в процессе, либо же после построения решения задачи. В последнем случае из уже построенного аналитического решения одной общей задачи удается извлечь готовые, по существу, решения других частных задач.

В зависимости от решаемой задачи несовместности могут выступать и как задаваемые, и как искомые величины. Если, например, для фиксированных α, β и r, s сохранить лишь $d_{\alpha\beta}[r, s]$ (искомая несовместность), полагая равными нулю остальные (задаваемые) несовместности, и потребовать одновременно $p_{\alpha\beta}[r, s] = N_{\alpha\beta}[r, s] = 0$, то в итоге придем к задаче о структуре с исключенным (поврежденным в каком-то сечении) $\alpha\beta$-стержнем с номером (r, s).

Несовместности $d_{\alpha\beta}$ можно интерпретировать как предварительные деформации (полные) соответствующих стержней, происхождение которых может быть самым разнообразным.

3. Некоторые аналитические результаты. Применим построенную выше теорию к задаче о напряженном состоянии структуры без внутренних узлов (фиг. 2; $N = 1$), полагая пока внешние воздействия на нее произвольными. В этом случае $\varphi = 0$, $\psi = \psi[m, 0] = \psi[m]$, так что краевая задача (2.4), (2.5) принимает вид

$$(\nabla_1^+ - 2\eta + \nabla_1^-)\,\psi[m] = -f_*[m] \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, M-1),$$

$$\psi[-1] = \psi[M] = 0 \tag{3.1}$$

$$\eta = -1 - 2\frac{\varkappa_{11}}{\varkappa_{22}} - \frac{\varkappa_+}{\varkappa_{22}}, \quad f_*[m] = \varkappa_{22}^{-1} f_0[m, 0]$$

и имеет следующее решение [10]:

$$\psi[m] = \frac{u_m}{u_M}\psi_*[M] - \psi_*[m] \quad (m = -1, 0, 1, 2, \ldots, M),$$

$$\psi_*[m] = \sum_{k=0}^{m-1} u_{m-k-1} f_*[k] \tag{3.2}$$

$$u_{-1} = 0, \quad u_0 = 1, \quad u_m = 2\eta u_{m-1} - u_{m-2}$$

Здесь $u_m(\eta)$ — полином Чебышева 2-го рода степени m, а сумма, как обычно, считается равной нулю, если ее верхний предел меньше нижнего.

В соответствии с формулами (2.3):

$$
\begin{aligned}
&N_{11}[m,n] = -\lambda_1\psi[m] + N_{11}^*[m,n] \quad (n = 0, 1)\\
&N_{22}[m] = N_{22}[m,0] = -\lambda_2(1+\nabla_1^-)\psi[m] + N_{22}^*[m,0]\\
&N_{12}[m] = N_{12}[m,0] = \psi[m] + N_{12}^*[m,0]\\
&N_{21}[m] = N_{21}[m,0] = \psi[m] + N_{21}^*[m,0]
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Покажем, как с помощью решения (3.2), (3.3) можно построить решение для структуры с поврежденным, например, 21-стержнем с номером s ($s = 0, 1, 2, \ldots, M-1$). Чтобы найти отвечающие этой задаче функции $\overline{\psi}$, $\overline{N}_{\alpha\beta}$, необходимо в решении (3.2) заменить E_{21}^* на $E_{21}^* + d\delta_{ms}$, где d — искусственно введенная для поврежденного стержня несовместность, а δ_{ms} — символ Кронекера. Выкладки показывают, что ($h_m = 1$ при $m \geq 0$ и $h_m = 0$ при $m < 0$):

$$
\overline{\psi}[m] = \psi[m] + \frac{d}{\varkappa_{22}}\left(\frac{u_m}{u_M}u_{M-s-1} - h_{m-s-1}u_{m-s-1}\right)
$$

$$
\overline{N}_{21}[s] = N_{21}[s] + \frac{du_s}{\varkappa_{22}u_M}u_{M-s-1}
$$

Предполагая, что стержень поврежден в начале (при $p_{21}[s,0] = 0$ эта оговорка не нужна), потребуем, чтобы последнее выражение обращалось в нуль. Находя отсюда d, устанавливаем

$$
\overline{\psi}[m] = \psi[m] - N_{21}[s]\left(\frac{u_m}{u_s} - h_{m-s-1}\frac{u_M u_{m-s-1}}{u_s u_{M-s-1}}\right)
\tag{3.4}
$$

Искомые $\overline{N}_{\alpha\beta}$ находятся из формул (3.3), где следует заменить ψ на $\overline{\psi}$.

Если структура бесконечна в направлении 11-стержней, то решению подлежит уравнение (3.1) при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Воспользуемся для этого преобразованием Лорана [11]. Пусть ζ — комплексная переменная на единичной окружности L, и пусть образы Лорана

$$
\Psi(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\zeta^m\psi[m], \quad F_*(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\zeta^m f_*[m]
$$

бесконечных последовательностей $\{\psi[m]\}$, $\{f_*[m]\}$ регулярны, по крайней мере, на L, что оправдывается классом рассматриваемых внешних воздействий и построенным ниже решением. Преобразуя указанное уравнение по Лорану, находим

$$
\Psi(\zeta) = -\frac{\zeta F_*(\zeta)}{(\zeta-\mu)(\zeta-\mu^{-1})} \quad (\zeta \in L), \quad \mu = \eta - \sqrt{\eta^2-1}
$$

Отсюда с помощью обратного преобразования Лорана и теоремы о вычетах выводим ($i = \sqrt{-1}$):

$$
\psi[m] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Psi(\zeta)\,\zeta^{-m-1}d\zeta = -\frac{1}{2\sqrt{\eta^2-1}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu^{-|m-k|}f_*[k]
$$

$$
(m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots) \tag{3.5}
$$

Для усилий $N_{\alpha\beta}$ остаются справедливыми формулы (3.3).

Если же рассматриваемая структура полубесконечная, то анализ ее напряженного состояния сводится к решению уравнения (3.1) при $m = 1, 2 \ldots$ и дополнительном условии

$$\psi [1] - 2\eta\psi [0] = - f_* [0]$$

Применим для этого преобразование Тейлора — преобразование Лорана для полубесконечных последовательностей. Пусть z — комплексная переменная и пусть образы Тейлора

$$\Psi^+ (z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \psi [m], \quad F^+ (z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m f_* [m]$$

регулярны внутри L (области D_+) и на L, что вновь оправдывается классом рассматриваемых внешних воздействий и построенным ниже решением. Посредством обратного преобразования Тейлора

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \Psi^+ (\zeta) \zeta^{-m-1} d\zeta = h_m \psi [m]$$

(аналогичная зависимость имеет место для $F_*^+ (z)$ и $f_* [m]$) решаемое уравнение переходит в равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L [\zeta^{-1} (\zeta - \mu) (\zeta - \mu^{-1}) \Psi^+ (\zeta) + F_*^+ (\zeta)] \zeta^{-m-1} d\zeta = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

Ему удовлетворяет кусочно-голоморфная функция $\Psi (z) = \Psi^+ (z)$ при $z \in D_+$ и $\Psi (z) = \Psi^- (z)$ при $z \in D_-$ (D_- — область вне L), являющаяся решением краевой задачи Римана — Гильберта с нулевым индексом

$$(\zeta - \mu) \Psi^+ (\zeta) = \zeta \frac{\Psi^- (\zeta) + F_*^+ (\zeta)}{\zeta - \mu^{-1}} \quad (\zeta \in L)$$

причем $\Psi^- (\infty) = c$ — искомая постоянная. Решая эту задачу [11], с учетом дополнительного условия находим

$$\Psi^+ (z) = - \frac{z F_*^+ (z) - \mu^{-1} F_*^+ (\mu^{-1})}{(z - \mu) (z - \mu^{-1})} \quad (z \in D_+)$$

Отсюда после возврата к оригиналам имеем

$$\psi[m] = - \frac{1}{2\sqrt{\eta^2 - 1}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-|m-k|} f_* [k] - \mu^{-|m+2|} F_*^+ (\mu^{-1}) \right] \quad (m = -1, 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

Для отыскания усилий $N_{\alpha\beta}$ нужно вновь прибегнуть к формулам (3.3).

Подчеркнем, что решения (3.2), (3.4), (3.5), (3.6) построены с точностью до величин $N_{\alpha\beta}^*$, которые зависят от вида внешних нагрузок, считавшихся пока произвольными.

4. Числовые результаты. В качестве примера рассмотрим случай нагружения, показанный на фиг. 2, т. е. $P_1 = (\delta_{mM} - \delta_{m0}) \delta_{n0}$, $P_2 = p_{\alpha\beta} = 0$. Здесь можно принять $N_{11}^* = \delta_{n0}$, $N_{22}^* = N_{12}^* = N_{21}^* = 0$. Учитывая, что

$$\sum_{k=0}^{m} u_k = \frac{u_{m+1} - u_m - 1}{2 (\eta - 1)}$$

их формул (3.2) находим

$$\psi [m] = \frac{\varkappa_{11}}{2\lambda_1 \varkappa_{22} (1 - \eta)} \left(1 - \frac{1 + u_{M-1}}{u_m} u_m + u_{m-1}\right)$$

m	N_{11} [m, 0]	N_{11} [m, 1]	N_{12} [m, 0]	N_{21} [m, 0]	N_{22} [m, 0]
0	0,9052	–0,0948	0,1340	0,1340	–0,0948
1	0,9152	–0,0849	0,1200	0,1200	–0,1796
2	0,9141	–0,0859	0,1215	0,1215	–0,1707
3	0,9142	–0,0858	0,1213	0,1213	–0,1717
4	0,9142	–0,0858	0,1213	0,1213	–0,1717
5	0,9142	–0,0858	0,1213	0,1213	–0,1717
6	0,9142	–0,0858	0,1213	0,1213	–0,1717
7	0,9141	–0,0859	0,1215	0,1215	–0,1717
8	0,9152	–0,0849	0,1200	0,1200	–0,1707
9	0,9052	–0,0948	0,1340	0,1340	–0,1796
10	—	—	—	—	–0,0948

При тех же значениях $N^*_{\alpha\beta}$ имеем в случае бесконечной структуры

$$\psi\,[m] = N_{12}\,[m] = N_{21}\,[m] = \frac{\varkappa_{11}}{2\lambda_1\varkappa_{22}(1-\eta)}$$

$$N_{11}\,[m, n] = \delta_{n0} - \frac{\varkappa_{11}}{2\varkappa_{22}(1-\eta)} \quad (n = 0, 1), \quad N_{22}\,[m] = -\frac{\lambda_2\varkappa_{11}}{\lambda_1\varkappa_{22}(1-\eta)}$$

а в случае полубесконечной структуры

$$\psi\,[m] = N_{12}\,[m] = N_{21}\,[m] = \frac{\varkappa_{11}}{2\lambda_1\varkappa_{22}(1-\eta)}(1-\mu^{-m-1})$$

$$N_{11}\,[m, n] = \delta_{n0} - \frac{\varkappa_{11}}{2\varkappa_{22}(1-\eta)}(1-\mu^{-m-1}) \quad (n = 0, 1)$$

$$N_{22}\,[m] = -\frac{\lambda_2\varkappa_{11}}{\lambda_1\varkappa_{22}(1-\eta)}(1-\mu^{-m-1})$$

В таблице представлены усилия в стержнях конечной структуры ($n_{\alpha\beta}(x) = N_{\alpha\beta}$), отвечающие $M = 10$, $g_{11} = g_{22} = g_{12} = g_{21}$ и $l_{11} = l_{22}$. С точностью до четырех значащих цифр решения для бесконечной и полубесконечной структур реализуются соответственно в средней части и у края конечной структуры. Пятикратное увеличение или уменьшение параметра g_{11} изменяет данные таблицы приблизительно на 5%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16490).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 415 с.
2. *Sherman D. R.* Bibliograhy on latticed structures//J. Struct. Div. ASCE. 1972. V. 98. No. ST-7. P. 1545—1566.
3. *Sherman D. R.* Latticed structures: State of the art report//J. Struct. Div. ASCE. 1976. V. 102. No. ST-11. P. 2197—2230.
4. *Пшеничнов Г. И.* Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М.: Наука, 1982. 352 с.
5. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
6. *Рабинович И. М.* Основы строительной механики стержневых систем. М.: Госстройиздат, 1960. 519 с.

7. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем/Пер. с англ. под ред. А. П. Филина. Л.: Судпромгиз, 1961. 876 с.
8. *Филин А. П., Тананайко О. Д., Чернова И. М., Шварц М. А.* Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. Л.: Стройиздат, 1983. 232 с.
9. *Рыбаков Л. С.* Осесимметричное упругое деформирование подкрепленной шпангоутами круговой цилиндрической оболочки//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 132—140.
10. Математические основы теории автоматического регулирования./Под ред. Б. К. Чемоданова. Т. 2. М.: Высш. шк., 1977. 453 с.
11. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.I.1994