МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 624.07:534.1

© 1996 г. В. М. АЛЕКСАНДРОВ, И. А. ДУПЛЯКИН

ДИНАМИКА БЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ ТИМОШЕНКО, ЛЕЖАЩЕЙ НА ОСНОВАНИИ С ДВУМЯ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ПРИ ДВИЖЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ЭКИПАЖА

Рассматривается задача о безотрывном движении с постоянной скоростью деформируемого экипажа по бесконечной балке типа Тимошенко, лежащей на инерционном основании с двумя коэффициентами постели. Экипаж представляет собой систему жестких тел с вязкоупругими связями и контактирует с балкой через такие же связи (рессоры) в конечном числе точек. Предлагается схема получения асимптотического решения в виде ряда при большом времени, приводятся асимптотические решения для импульсной, постоянной и осциллирующей сил, приложенных к балке, сосредоточенной массе и подрессоренной массе. Наряду с более полным исследованием особенностей названных упругих систем (обзор литературы приводится в [1]) рассмотрен ряд неизученных ранее явлений. Исследован характер сингулярности решения при движении нагрузки со скоростями звука по балке типа Тимошенко. Построены резонансные кривые в зависимости от скорости движения нагрузки и исследован рост прогиба балки (рессоры) при воздействии осциллирующей с резонансной частотой силы. Обнаружена антирезонансная частота и исследован характер решения при воздействии осциллирующей с этой частотой силы на балку типа Тимошенко. Исследована устойчивость движения сосредоточенной и подрессоренной масс.

1. Постановка задачи. Уравнение динамического изгиба балки типа Тимошенко, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, имеет вид

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \nu_1 \rho J\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \nu_2\frac{\rho^2 J}{E}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \tag{1.1}$$

$$= \left(1 - \nu_3\frac{J}{F}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_2\frac{\rho J}{EF}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(p_1 - p_2)$$

$$\nu_1 = 2(2+\nu), \quad \nu_2 = \frac{1}{2}(1+\nu)(7-\nu), \quad \nu_3 = 3+\nu$$

где ν, E, ρ, J и F — коэффициент Пуассона и модуль Юнга, плотность, момент инерции и площадь сечения балки соответственно, y — прогиб балки, x — продольная координата, t — время, p_1 и p_2 — поперечные нагрузки на верхнюю и нижнюю грани балки. Отметим, что для вывода уравнения (1.1) были использованы уточненные уравнения плоской деформации полосы, полученные в работе [2].

Пусть балка покоится на инерционном основании с двумя упругими характеристиками. Тогда

$$p_2 = ky - k_1\partial^2 y/\partial x^2 + m_0\partial^2 y/\partial t^2 \tag{1.2}$$

где k и k_1 упругие характеристики основания, m_0 — его погонная инерционная масса.

Введем базовые коэффициенты подобия $r_1 = (EJ/k)^{1/4}$ [м],

$r_2 = (1/2\,(\rho F + m_0)/k)^{1/2}$ [с], $r_3 = (EJk)^{1/2}$ [Н] и запишем уравнение (1.1) с учетом (1.2) относительно безразмерных переменных (переход к размерным величинам осуществляется умножением безразмерных переменных на соответствующие комбинации базовых коэффициентов подобия):

$$(1 + \beta_2\tilde{k}_1)\frac{\partial^4\tilde{y}}{\partial\tilde{x}^4} - 2(\beta_3 + \beta_1\tilde{k}_1)\frac{\partial^4\tilde{y}}{\partial\tilde{x}^2\,\partial\tilde{t}^2} + 4\beta_1\frac{\partial^4\tilde{y}}{\partial\tilde{t}^4} - (\beta_2 + \tilde{k}_1)\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial\tilde{x}^2} +$$

$$+ 2(1 + \beta_1)\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial\tilde{t}^2} + \tilde{y} = \left[1 - \beta_2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2} + 2\beta_1\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}^2}\right]\tilde{p}_1$$

$$\beta_1 = \frac{\nu_2\gamma_2^2}{1 + \gamma_1},\quad \beta_2 = \nu_3\gamma_2,\quad \beta_3 = \frac{\nu_1 + \nu_3\gamma_1}{1 + \gamma_1}\gamma_2,\quad \gamma_1 = \frac{m_0}{\rho F},\quad \gamma_2 = \left(\frac{Jk}{F^2E}\right)^{1/2}$$

В дальнейших выкладках будут участвовать только безразмерные величины, поэтому далее знак (~) опускается.

Пусть v — скорость движения экипажа, $w(\xi, t) = y(x - vt, t)$, $\xi = x - vt$, $z_n(t)$ — перемещение в n-ой рессоре ($1 \le n \le N$), ξ_n — ее координата, $w_n = w(\xi_n, t)$ — прогиб балки под рессорой, m_n — сосредоточенные массы в точках ξ_n, $P_n(t)$ — приложенные к ним силы, ε_n и μ_n — коэффициенты упругости и вязкости рессоры n, $q_n(t)$ — давление экипажа на балку в точке ξ_n. Сформулируем постановку задачи относительно переменных ξ и t для случая движения экипажа с постоянной скоростью:

$$[1 + k_1\beta_2 - 2(\beta_3 + k_1\beta_1)v^2 + 4\beta_1v^4]\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} + 4v(\beta_3 + k_1\beta_1 - 4\beta_1v^2)\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^3\,\partial t} -$$

$$- 2(\beta_3 + k_1\beta_1 - 12\beta_1v^2)\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\,\partial t^2} - 16\beta_1v\frac{\partial^4 w}{\partial\xi\,\partial t^3} + 4\beta_1\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - \tag{1.3}$$

$$- [\beta_2 + k_1 - 2(1 + \beta_1)v^2]\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} - 4(1 + \beta_1)v\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial t} + 2(1 + \beta_1)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w =$$

$$= \left\{1 - (\beta_2 - 2\beta_1v^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 4\beta_1v\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial t} + 2\beta_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\sum_{n=1}^{N} q_n(t)\,\delta(\xi - \xi_n)$$

$$m_n\frac{d^2w_n}{dt^2} + \mu_n\left(\frac{dw_n}{dt} - \frac{dz_n}{dt}\right) + \varepsilon_n(w_n - z_n) = P_n(t) - q_n(t)\quad(\xi = \xi_n) \tag{1.4}$$

где (1.3) — уравнения изгиба балки, (1.4) — уравнения деформации рессор экипажа.

Предполагается, что малые вертикальные колебания элементов экипажа описываются линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а связи прогибов рессор с перемещениями элементов экипажа — линейными алгебраическими уравнениями. Граничные и начальные условия полагаются нулевыми.

2. Схема построения асимптотического решения при $t \to +\infty$. Применим последовательно к уравнению (1.3) преобразование Фурье по ξ и Лапласа по t. Тогда

$$w(\xi, t) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} W_{LF}(p, \alpha)\exp(pt - i\alpha\xi)\,d\alpha\,dp \tag{2.1}$$

$$W_{LF}(p, \alpha) = \frac{H(\alpha, p)}{\Phi(\alpha, p)}\sum_{n=1}^{N} Q_n(p)\exp(i\alpha\xi_n),\quad Q_n(p) = \int_0^\infty q_n(t)\exp(-pt)\,dt \tag{2.2}$$

$$\Phi(\alpha, p) = [1 + k_1\beta_2 - 2(\beta_3 + k_1\beta_1)v^2 + 4\beta_1v^4]\alpha^4 + i4v(\beta_3 + k_1\beta_1 - 4\beta_1v^2)p\alpha^3 +$$

$$+ [2(\beta_3 + k_1\beta_1 - 12\beta_1 v^2) p^2 + \beta_2 + k_1 - 2(1+\beta_1) v^2]\alpha^2 + \tag{2.3}$$

$$+ i4v(4\beta_1 p^2 + 1 + \beta_1) p\alpha + 4\beta_1 p^4 + 2(1+\beta_1) p^2 + 1$$

$$H(\alpha, p) = (\beta_2 - 2\beta_1 v^2)\alpha^2 + 4i\beta_1 vp\alpha + 2\beta_1 p^2 + 1 \tag{2.4}$$

где Γ_1 — прямая, лежащая правее мнимой оси в p-плоскости, Γ_2 — действительная ось в α-плоскости при $\mathrm{Re}\ p > 0$.

Приравнивая нулю коэффициент при α^4 в уравнении (2.3), вычислим скорости распространения возмущений в балке (скорости звука):

$$v_{1,2} = \tfrac{1}{2}\beta_1^{-1/2}\{\beta_3 + k_1\beta_1 \mp [(\beta_3 + k_1\beta_1)^2 - 4\beta_1(1 + k_1\beta_2)]^{1/2}\}^{1/2} \tag{2.5}$$

Поступая далее так же, как было ранее сделано для случая балки Бернулли — Эйлера [3], рассмотрим функцию $\alpha(p)$ корней полинома (2.3). Ее точки разветвления определяются из уравнения

$$R[\Phi(\alpha, p), \Phi'_\alpha(\alpha, p)] = 0 \tag{2.6}$$

где R — результант уравнений Φ и Φ'_α [4]. Уравнение (2.6) является полиномом двенадцатой степени при $v \neq v_k$ (десятой степени при $v = v_k$) с действительными коэффициентами относительно параметра p.

Обозначим точки разветвления p_{ij} согласно осуществляемой в них склейке ветвей функции $\alpha(p)$ и построим область однозначности для функции $\alpha(p)$ при малых значениях γ_2 и k_1. Вследствие того, что уравнение (2.6) имеет весьма громоздкое представление в явном виде, для его решения можно использовать следующую схему. Вычисляются значения результанта (2.6) в $(n+1)$ точках p-плоскости, где n — степень искомого полинома. Затем методом исключения неизвестных Гаусса находятся коэффициенты полинома, корни которого являются точками разветвления p_{ij}.

Обозначим через v_0 скорость, при которой точки разветвления первого порядка совпадают в точке $p = 0$ (аналог критической скорости для балки Бернулли — Эйлера):

$$v_0 = \{\tfrac{1}{2}d_3^{-2}[d_1 \pm (d_1^2 + d_2 d_3^2)^{1/2}]\}^{1/2} \tag{2.7}$$

$$d_1 = \beta_2(1+\beta_1) - 2\beta_3 + k_1 d_3, \quad d_2 = 4 - (\beta_2 - k_1)^2, \quad d_3 = 1 - \beta_1$$

где будем брать знак плюс, считая k_1 и γ_2 достаточно малыми. Обозначим также через v_1^* и v_2^* некоторые скорости, при которых возникают точки разветвления второго порядка, расположенные на мнимой оси $(0 < v_1^* < v_0 < v_1 < v_2^* < v_2)$, причем v_1^* существует при $k_1 < k_1^*$, где

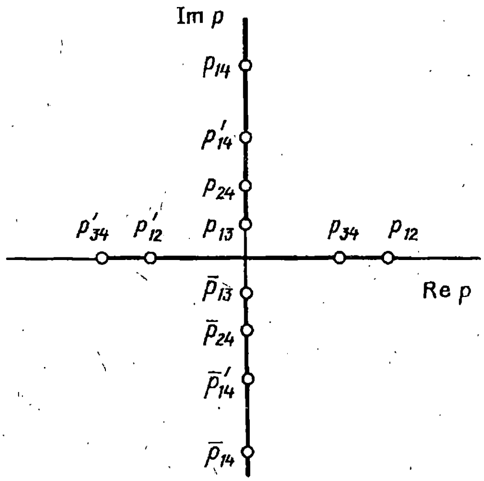
$$k_1^* = (\beta_3 - \beta_2)(1 - \beta_1)^{-1} = \gamma_2(\nu_1 - \nu_3)(1 + \gamma_1 - \nu_2\gamma_2^2)^{-1} \tag{2.8}$$

Фиг. 1—7 иллюстрируют области однозначности для функции $\alpha(p)$ при аналитическом продолжении ее с участка действительной оси $L = (b, +\infty)$ такого, что в области $\mathrm{Re}\ p > b$ отсутствуют точки разветвления и выходящие из них разрезы. Как и для случая балки Бернулли — Эйлера [3], разрезы, проходящие по мнимой оси, ограничивают переход корней полинома (2.3) через действительную ось в α-плоскости. Замечая, что корни полинома (2.3) располагаются на мнимой оси при $p \in L$, пронумеруем их так, как это сделано ниже

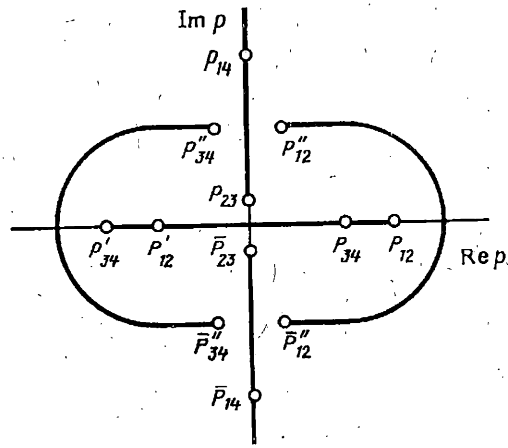
$$\mathrm{Im}\ \alpha_2 > \mathrm{Im}\ \alpha_1 > 0, \quad \mathrm{Im}\ \alpha_3 < \mathrm{Im}\ \alpha_4 < 0 \quad \text{при} \quad 0 < v \leq v_1$$

$$\mathrm{Im}\ \alpha_2 > \mathrm{Im}\ \alpha_1 > 0, \quad \mathrm{Im}\ \alpha_4 < 0 \text{ и } \alpha_3 \text{ отсутствует при } v = v_1$$

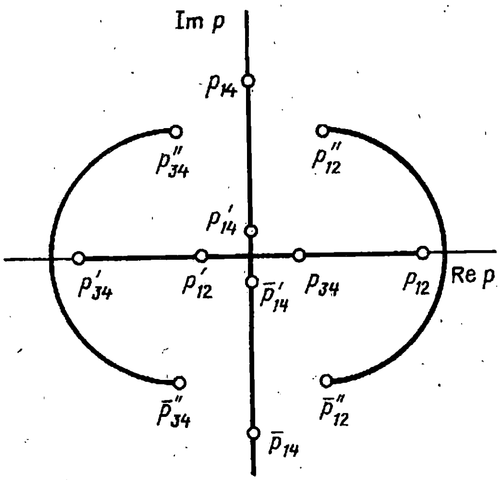
$$\mathrm{Im}\ \alpha_3 > \mathrm{Im}\ \alpha_2 > \mathrm{Im}\ \alpha_1 > 0, \quad \mathrm{Im}\ \alpha_4 < 0 \text{ при } v_1 < v < v_2$$



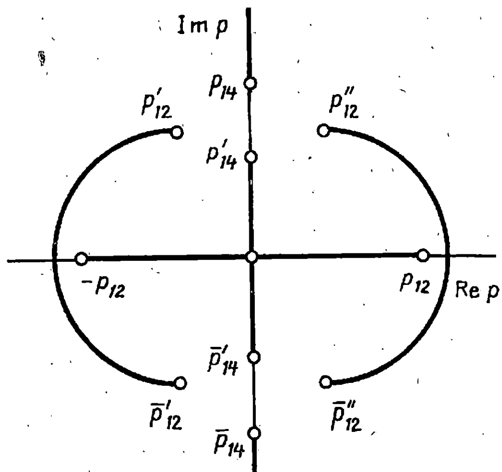
Фиг. 1



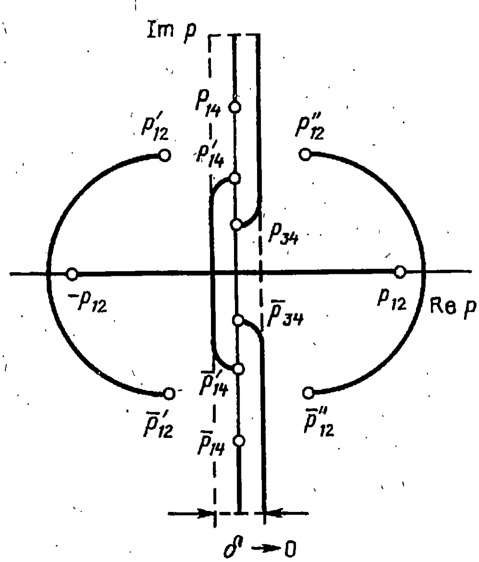
Фиг. 2



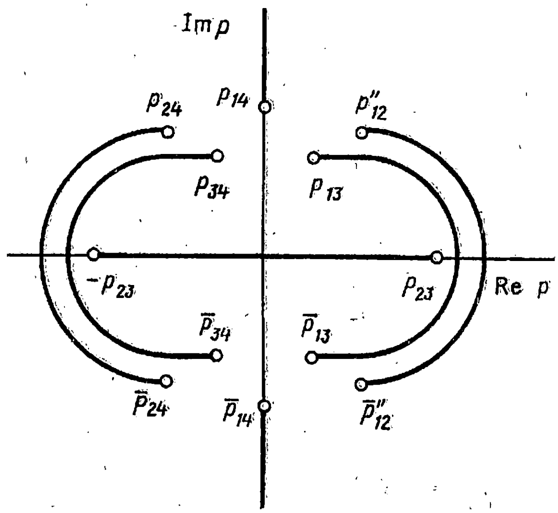
Фиг. 3



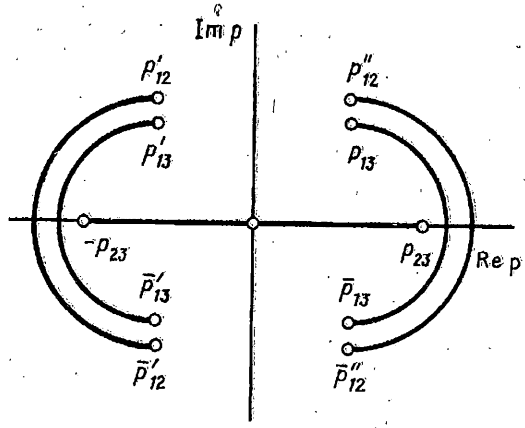
Фиг. 4



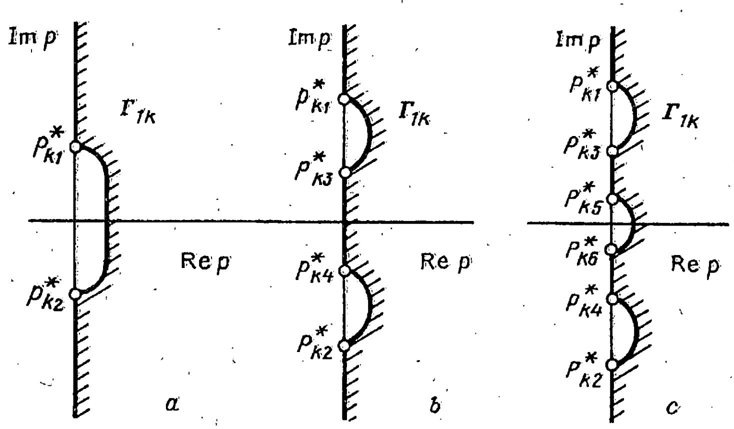
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

$$\operatorname{Im}\alpha_3 > \operatorname{Im}\alpha_2 > \operatorname{Im}\alpha_1 > 0 \text{ и } \alpha_4 \text{ отсутствует при } v = v_2$$

$$\operatorname{Im}\alpha_4 > \operatorname{Im}\alpha_3 > \operatorname{Im}\alpha_2 > \operatorname{Im}\alpha_1 > 0 \text{ при } v > v_2$$

и опишем подробнее области однозначности при различных параметрах v и k_1^*.

1). Пусть $0 \le v \le v_1^*$, $0 \le k_1 < k_1^*$ (фиг. 1). Тогда для точек разветвления, расположенных на действительной оси, выполняются равенства $p_{34} = -p_{12}'$, $p_{12} = -p_{34}'$. Разрезы, выходящие из точек $p_{13}, p_{24}; p_{14}'$ и p_{14}, сливаются в разрез, проходящий по лучу $[p_{13}, +i\infty)$. Подобную же структуру имеет разрез, проходящий по лучу $[\overline{p}_{13}, -i\infty)$, причем $p_{24} = p_{13}$ и $\overline{p}_{13} = \overline{p}_{24}$ при $v = 0$ (при этом порядок точек разветвления и склейка ветвей не меняются). Разрезы, соединяющие попарно точки p_{34} и p_{34}', p_{12} и p_{12}', сливаются на отрезке действительной оси $[p_{34}', p_{12}]$. При $v \to v_1^*$ попарно сливаются в точки разветвления второго порядка p_{24} и p_{14}', $\overline{p}_{24}$ и $\overline{p}_{14}'$, а p_{13} и $\overline{p}_{13}$ трансформируются при $v = v_1^*$ соответственно в p_{23} и $\overline{p}_{23}$.

2). Пусть $v = 0$, $k_1 = k_1^*$. Тогда тройки точек p_{13}, p_{24}, p_{14}' и p_{13}, p_{24}, p_{14}' на фиг. 1 сливаются соответственно в две комплексно сопряженные точки разветвления третьего порядка.

3). Если $0 \le v \le v_0$, $k > k_1^*$ или $v_1^* < v \le v_0$, $0 \le k_1 < k_1^*$ (фиг. 2), то разрезы проходят по лучам $[p_{23}, +i\infty)$, $[\overline{p}_{23}, -i\infty)$, отрезку $[p_{34}', p_{12}]$ и простым кривым, соединяющим попарно комплексно сопряженные точки p_{12}'' и $\overline{p}_{12}''$, p_{34}'' и $\overline{p}_{34}''$, причем $p_{23} = \overline{p}_{23} = 0$ при $v = v_0$. В последнем случае порядок точек разветвления и склейка ветвей не меняются.

4). Если $v_0 < v < v_1$ (фиг. 3), то пересекая разрез, проходящий по действительной оси, точки p_{23} и $\overline{p}_{23}$ трансформируются в точки p_{14}' и $\overline{p}_{14}'$. И хотя при этом разрезы $[\overline{p}_{14}', +i\infty)$ и $[p_{14}', -i\infty)$ перекрываются на мнимой оси, область однозначности функции $\alpha(p)$ по-прежнему остается односвязной. Действительно, раздвигая разрезы на расстояние δ, можно замкнуть контур Γ_1 в левой полуплоскости, а затем рассмотреть его предельное положение при $\delta \to 0$.

5). Пусть $v = v_1$ и ветвь α_3 отсутствует (фиг. 4). Тогда точки p_{34} и p_{12}' на фиг. 3 сливаются в точке $p = 0$, образуя особенность

$$\alpha_4(p) = i\,\frac{\beta_2 + k_1 - 2(1 + \beta_1)\,v_1^2}{4v_1(\beta_3 + k_1\beta_1 - 4\beta_1 v_1^2)}\,p^{-1} + O(p) \quad \text{при } p \to 0 \tag{2.9}$$

а точки p_{34}'', $\overline{p}_{34}''$ и $\overline{p}_{34}'$ трансформируются соответственно в точки p_{12}', $\overline{p}_{12}'$ и $-\overline{p}_{12}$.

6). Если $v_1 < v \le v_2^*$ (фиг. 5), то из пункта $p = 0$ расходятся две комплексно сопряженные точки разветвления p_{34} и $\overline{p}_{34}$, сливающиеся при $v \to v_2^*$ соответственно с p_{14}' и $\overline{p}_{14}'$ в точки разветвления второго порядка.

7). Если $v_2^* < v < v_2$ (фиг. 6), то появляются новые точки разветвления p_{13} и $\overline{p}_{13}$, p_{34} и $\overline{p}_{34}$. Соединим их попарно разрезами, проходящими по простым кривым. При этом точки p_{12}', $\overline{p}_{12}'$, p_{12} и $-p_{12}$ на фиг. 5 трансформируются соответственно в точки p_{24}, $\overline{p}_{24}$, p_{23} и $-p_{23}$.

8). В случае, когда $v = v_2$ и ветвь α_4 отсутствует (фиг. 7), точки p_{14} и $\overline{p}_{14}$ на фиг. 6 сливаются в точке $p = 0$, образуя особенность

$$\alpha_1(p) = i\,\frac{\beta_2 + k_1 - 2(1 + \beta_1)\,v_2^2}{4v_2(\beta_3 + k_1\beta_1 - 4\beta_1 v_2^2)}\,p^{-1} + O(p) \quad \text{при } p \to 0 \tag{2.10}$$

а точки p_{24}, $\overline{p}_{24}$, p_{34} и $\overline{p}_{34}$ трансформируются соответственно в точки p_{12}', $\overline{p}_{12}'$, p_{13}' и $\overline{p}_{13}'$.

9). Если $v > v_2$, то из пункта $p = 0$ расходятся две точки разветвления p_{14} и $-p_{14}$, расположенные на действительной оси.

Таким образом, уравнение (2.6) определяет двенадцать точек разветвления первого порядка при $v \neq v_k$ и $v \neq v_k^*$ $(k = 1, 2)$, десять точек разветвления первого порядка при $v = v_1$ или $v = v_2$, восемь точек разветвления первого порядка и две второго порядка при $v = v_1^*$ или $v = v_2^*$, шесть точек разветвления первого порядка и две третьего порядка при $k_1 = k_1^*$, $v = 0$.

Расположение корней $\alpha_k(p)$ полинома (2.3) на правых берегах разрезов, проходящих по мнимой оси (помечены знаком плюс), приведено ниже. Чтобы получить значения ветвей функции α_k на левых берегах разрезов, нужно учесть очевидную перестановку $\alpha_i \longleftrightarrow \alpha_j$ при обходе точки разветвления p_{ij}.

Пусть $0 \le k_1 < k_1^*$, $0 \le v \le v_1^*$, тогда

$\mathrm{Im}\,\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_3 < \mathrm{Re}\,\alpha_4 \le \mathrm{Re}\,\alpha_1 < \mathrm{Re}\,\alpha_2$ при $p \in (-i\infty, \bar{p}_{14}]^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_1 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 < 0$ и $\mathrm{Im}\,\alpha_2 = \mathrm{Im}\,\alpha_3 = 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_3 < \mathrm{Re}\,\alpha_2$ при $p \in (\bar{p}_{14}, \bar{p}_{14}')^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_3 < \mathrm{Re}\,\alpha_1 \le \mathrm{Re}\,\alpha_4 \le \mathrm{Re}\,\alpha_2$ при $p \in [\bar{p}_{14}', \bar{p}_{24}]^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_2 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 < 0$ и $\mathrm{Im}\,\alpha_1 = \mathrm{Im}\,\alpha_3 = 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_3 \le \mathrm{Re}\,\alpha_1$ при $p \in (\bar{p}_{24}, \bar{p}_{13}]^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_2 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 < 0$ и $\mathrm{Im}\,\alpha_1 = \mathrm{Im}\,\alpha_3 = 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_1 \le \mathrm{Re}\,\alpha_3$ при $p \in [p_{13}, p_{24})^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_2 \le \mathrm{Re}\,\alpha_4 \le \mathrm{Re}\,\alpha_1 < \mathrm{Re}\,a_3$ при $p \in [p_{24}, p_{14}']^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_1 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 < 0$ и $\mathrm{Im}\,\alpha_2 = \mathrm{Im}\,\alpha_3 = 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_2 < \mathrm{Re}\,\alpha_3$ при $p \in (p_{14}', p_{14})^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_2 < \mathrm{Re}\,\alpha_1 \le \mathrm{Re}\,\alpha_4 < \mathrm{Re}\,\alpha_3$ при $p \in [p_{14}, +i\infty)^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_1 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_2 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_3 < 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 < 0$ при $p \notin [p_{13}, +i\infty]$ и $p \notin (-i\infty, p_{13}]$

Если $k_1 = k_1^*$, $v = 0$, то

$\mathrm{Im}\,\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_3 \mathrm{Re} < \alpha_4 \le \mathrm{Re}\,\alpha_1 < \mathrm{Re}\alpha_2$ при $p \in (-i\infty, \bar{p}_{14}]^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_1 \ge 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 \le 0$ и $\mathrm{Im}\,\alpha_2 = \mathrm{Im}\,\alpha_3 = 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_3 \le \mathrm{Re}\,\alpha_2$ при $p \in (\bar{p}_{14}, \bar{p}_{23})^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_1 \ge 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 \le 0$ и $\mathrm{Im}\,\alpha_2 = \mathrm{Im}\,\alpha_3 = 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_2 \le \mathrm{Re}\,\alpha_3$ при $p \in (p_{23}, p_{14})^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_2 < \mathrm{Re}\,\alpha_1 \le \mathrm{Re}\,\alpha_4 < \mathrm{Re}\,\alpha_3$ при $p \in [p_{14}, +i\infty)^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_1 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_2 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_3 < 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 < 0$ при $p \notin [p_{23}, +i\infty)$ и $p \notin (-i\infty, \bar{p}_{23}]$

В случае когда $0 \le k_1 < k_1^*$, $v_1* < v \le v_0$ или $k_1 \ge k_1^*$, $0 < v \le v_0$, имеем

$\mathrm{Im}\,\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_3 < \mathrm{Re}\,\alpha_4 \le \mathrm{Re}\,\alpha_1 < \mathrm{Re}\,\alpha_2$ при $p \in (-i\infty, \bar{p}_{14}]^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_1 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 < 0$ и $\mathrm{Im}\,\alpha_2 = \mathrm{Im}\,\alpha_3 = 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_3 \le \mathrm{Re}\,\alpha_2$ при $p \in (\bar{p}_{14}, \bar{p}_{23})^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_1 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 < 0$ и $\mathrm{Im}\,\alpha_2 = \mathrm{Im}\,\alpha_3 = 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_2 \le \mathrm{Re}\,\alpha_3$ при $p \in (p_{23}, p_{14})^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_2 < \mathrm{Re}\,\alpha_1 \le \mathrm{Re}\,\alpha_4 < \mathrm{Re}\,\alpha_3$ при $p \in [p_{14}, +i\infty)^+$

$\mathrm{Im}\,\alpha_1 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_2 > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_3 < 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_4 < 0$ при $p \notin [p_{23}, +i\infty)$ и $p \notin (-i\infty, \bar{p}_{23}]$

Если $v_0 < v < v_1$, то получим

$\mathrm{Im}\,\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_3 < \mathrm{Re}\,\alpha_4 \le \mathrm{Re}\,\alpha_1 < \mathrm{Re}\,\alpha_2$ при $p \in (-i\infty, \bar{p}_{14}]^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha_3 = 0,\ \operatorname{Re}\alpha_3 < \operatorname{Re}\alpha_2$ при $p \in (\overline{p}_{14}, \overline{p}_{14}')^+$

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_3 < \operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_1 \le \operatorname{Re}\alpha_4$ при $p \in [\overline{p}_{14}', 0)^+$

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_4 \le \operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_3$ при $p \in (0, p_{14}']^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha_3 = 0,\ \operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_3$ при $p \in (p_{14}', p_{14})^+$

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_1 \le \operatorname{Re}\alpha_4 < \operatorname{Re}\alpha_3$ при $p \in [p_{14}, +i\infty)^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_2 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_3 < 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ при $\operatorname{Re} p \ne 0$

В случае, когда $v = v_1$, будем иметь

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_4 \le \operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha_2$ при $p \in (-i\infty, \overline{p}_{14}]^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0,\ \operatorname{Im}\alpha_2 = 0$ при $p \in (\overline{p}_{14}, \overline{p}_{14}')^+$

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_1 \le \operatorname{Re}\alpha_4$ при $p \in [\overline{p}_{14}', 0)^+$

$\alpha_4 = \infty$ при $p = 0$

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_4 \le \operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha_2$ при $p \in (0, p_{14}']^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0,\ \operatorname{Im}\alpha_2 = 0$ при $p \in (p_{14}', p_{14})^+$

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_1 \le \operatorname{Re}\alpha_4$ при $p \in [p_{14}, +i\infty)^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_2 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ при $\operatorname{Re} p > 0$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_2 < 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ при $\operatorname{Re} p < 0$

Для случая, когда $v_1 < v \le v_2^*$ получим

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_4 \le \operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_3$ при $p \in (-i\infty, \overline{p}_{14}]^+$

$\operatorname{Im}\alpha > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha_3 = 0,\ \operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_3$ при $p \in (\overline{p}_{14}, \overline{p}_{14}')^+$

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_1 \le \operatorname{Re}\alpha_4 \le \operatorname{Re}\alpha_3$ при $p \in [\overline{p}_{14}', \overline{p}_{34}]^+$

$\operatorname{Im}\alpha_3 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_1 = \operatorname{Im}\alpha_2 = 0,\ \operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_1$ при $p \in (\overline{p}_{34}, 0)^+$

$\operatorname{Im}\alpha_3 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_1 = \operatorname{Im}\alpha_2 = 0,\ \operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha_2$ при $p \in (0, p_{34})^+$

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_3 \le \operatorname{Re}\alpha_4 \le \operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha_2$ при $p \in [p_{34}, p_{14}']^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha_3 = 0,\ \operatorname{Re}\alpha_3 < \operatorname{Re}\alpha_2$ при $p \in (p_{14}', p_{14})^+$

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_3 < \operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_1 \le \operatorname{Re}\alpha_4$ при $p \in [p_{14}, +i\infty)^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_2 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_3 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ при $\operatorname{Re} p > 0$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_2 < 0,\ \operatorname{Im}\alpha_3 < 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ при $\operatorname{Re} p < 0$

При $v_2^* < v \le v_2$ будем иметь

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_4 \le \operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_3$ при $p \in (-i\infty, \overline{p}_{14}]^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha_3 = 0,\ \operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_3$ при $p \in (\overline{p}_{14}, 0)^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha_3 = 0,\ \operatorname{Re}\alpha_3 < \operatorname{Re}\alpha_2$ при $p \in (0, p_{14})^+$

$\operatorname{Im}\alpha_k = 0,\ k = 1, 2, 3, 4$ и $\operatorname{Re}\alpha_3 < \operatorname{Re}\alpha_2 < \operatorname{Re}\alpha_1 \le \operatorname{Re}\alpha_4$ при $p \in [p_{14}, +i\infty)^+$

$\operatorname{Im} a_1 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_2 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_3 > 0,\ \operatorname{Im}\alpha_4 < 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$

$\operatorname{Im}\alpha_1>0,\ \operatorname{Im}\alpha_2<0,\ \operatorname{Im}\alpha_3<0,\ \operatorname{Im}\alpha_4<0$ при $\operatorname{Re}p<0$

Для случая $v=v_2$, получим

$\operatorname{Im}\alpha_k=0,\ k=1,2,3$ и $\operatorname{Re}\alpha_1<\operatorname{Re}\alpha_2<\operatorname{Re}\alpha_3$ при $p\in(-i\infty,0)$

$\alpha_3=\infty$ при $p=0$

$\operatorname{Im}\alpha_k=0,\ k=1,2,3$ и $\operatorname{Re}\alpha_3<\operatorname{Re}\alpha_2<\operatorname{Re}\alpha_1$ при $p\in(0,+i\infty)^+$

$\operatorname{Im}\alpha_1>0,\ \operatorname{Im}\alpha_2>0,\ \operatorname{Im}\alpha_3>0$ при $\operatorname{Re}p>0$

$\operatorname{Im}\alpha_1<0,\ \operatorname{Im}\alpha_2<0,\ \operatorname{Im}\alpha_3<0$ при $\operatorname{Re}p<0$

Наконец, для $v>v_2$, будем иметь

$\operatorname{Im}\alpha_k=0,\ k=1,2,3,4$ и $\operatorname{Re}\alpha_1<\operatorname{Re}\alpha_2<\operatorname{Re}\alpha_3<\operatorname{Re}\alpha_4$ при $p\in(-i\infty,0)$

$\operatorname{Im}\alpha_k=0,\ k=1,2,3,4$ и $\operatorname{Re}\alpha_4<\operatorname{Re}\alpha_3<\operatorname{Re}\alpha_2<\operatorname{Re}\alpha_1$ при $p\in(0,+i\infty)$

$\operatorname{Im}\alpha_1>0,\ \operatorname{Im}\alpha_2>0,\ \operatorname{Im}\alpha_3>0,\ \operatorname{Im}\alpha_4>0$ при $\operatorname{Re}p>0$

$\operatorname{Im}\alpha_1<0,\ \operatorname{Im}\alpha_2<0,\ \operatorname{Im}\alpha_3<0,\ \operatorname{Im}\alpha_4<0$ при $\operatorname{Re}p<0$

Найдем теперь по вычетам образ Лапласа функции (2.1):

$$W_L(p,\xi)=\sum_{n=1}^{N}Q_n(p)\,h_n(p,\xi)\quad(p\in L) \tag{2.11}$$

$$h_n(p,\xi)=i\sum_{k=1}^{n_1}\frac{H(\alpha_k,p)}{\Phi'_\alpha(\alpha_k,p)}\exp\left[-i\alpha_k(p)(\xi-\xi_n)\right]\quad(\xi\le\xi_n)$$

$$h_n(p,\xi)=-i\sum_{k=n_2}^{4}\frac{H(\alpha_k,p)}{\Phi'_\alpha(a_k,p)}\exp\left[-i\alpha_k(p)(\xi-\xi_n)\right]\quad(\xi\ge\xi_n)$$

где $n_1=2$ и $n_2=3$ при $0\le v<v_1$; $n_1=2$ и $n_2=4$ при $v=v_1$; $n_1=3$ и $n_2=4$ при $v_1\le v<v_2$; $n_1=3$ и $h_n(p,\xi)\equiv 0$ $(\xi\ge\xi_n)$ при $v=v_2$ $n_1=4$ и $h_n(p,\xi)\equiv 0$ $(\xi\ge\xi_n)$ при $v>v_2$. Продолжим $W_L(p,\xi)$ аналитически на всю p-плоскость. Очевидно, особые точки функций $Q_n(p)$ и $h_n(p,\xi)$ определяют особенности функции $W_L(p,\xi)$. При $v\le v_2^*$ для функций $h_n(p,\xi)$ особыми являются только точки разветвления, расположенные на мнимой оси, так как функции $h_n(p,\xi)$ симметричны относительно соответствующих перестановок $\alpha_i\longleftrightarrow\alpha_j$ в иных точках разветвления и имеют в них конечный предел. По этой же причине функции $h_n(p,\xi)$ не терпят разрывов при переходе через выходящие из них разрезы. При $v_2^*<v<v_2$ функции $h_n(p,\xi)$ терпят разрыв также на разрезах, соединяющих попарно точки разветвления p_{34} и $\bar p_{34}$, p_{24} и $\bar p_{24}$ (фиг. 6).

Положим $\xi=\beta t+\eta$, где β — групповая скорость пакета волн с волновым числом α, и запишем функцию (2.1) с учетом соотношений (2.11) в виде $u(\eta,t)=w(\beta t+\eta,t)$:

$$u(\eta,t)=\sum_{n=1}^{N}u_n^-(\eta,t)\ \text{при}\ \beta<0\ \text{или}\ \beta=0\quad(\eta\le\xi_n) \tag{2.12}$$

$$u(\eta,t)=\sum_{n=1}^{N}u_n^+(\eta,t)\ \text{при}\ \beta>0\ \text{или}\ \beta=0\quad(\eta\ge\xi_n)$$

$$u_n^-(\eta,t)=I_{n1}(\eta,t)+I_{n2}(\eta,t),\quad u_n^+(\eta,t)=-I_{n3}(\eta,t)-I_{n4}(\eta,t)\quad(0\le v<v_1)$$

$$u_n^-(\eta, t) = \sum_{k=1}^{3} I_{nk}(\eta, t), \quad u_n^+(\eta, t) = -I_{n4}(\eta, t)$$

$$(v_1 \le v < v_2 \quad \text{и} \quad I_{n3}(\eta, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad v = v_1)$$

$$u_n^-(\eta, t) = \sum_{k=1}^{4} I_{nk}(\eta, k), \quad u_n^+(\eta, t) \equiv 0 \quad (v \ge v_2 \quad \text{и} \quad I_{n4}(\eta, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad v = v_2)$$

$$I_{nk}(\eta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f_{nk}(p, \eta) \exp [tS_k(p, \beta)]\, dp, \quad S_k(p, \beta) = p - i\alpha_k(p)\beta$$

$$f_{nk}(p, \eta) = iQ_n(p) H(\alpha_k, p) \exp [-i\alpha_k(p)(\eta - \xi i_n)] / \Phi'_\alpha(\alpha_k, p)$$

Найдем асимптотику интегралов I_{nk} при больших t методом перевала. Рассмотрим случай, когда особыми точками функций $Q_n(p)$ являются полюсы и указанные выше точки разветвления. Это условие заведомо выполняется, если к элементам экипажа приложены импульсные, постоянные или осциллирующие силы.

Точки перевала функций S_k ($\beta \ne 0$) определяются из уравнения

$$R\,[\Phi(\alpha, p), \Psi(\alpha, p)] = 0, \quad \Psi(\alpha, p) = \Phi'_\alpha(\alpha, p) + i\beta\Phi'_p(\alpha, p) \tag{2.13}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в эквивалентности уравнений

$$R\,[\Phi(\alpha, p + i\beta_*\alpha), \quad \Psi(\alpha, p + i\beta_*\alpha)] = 0 \quad (v = v_*)$$

$$R\,[\Phi(\alpha, p), \quad \Phi'_\alpha(\alpha, p)] = 0 \quad (v = v_* + \beta_*)$$

В частности, отсюда следует, что число лежащих на мнимой оси точек перевала при $v = v_*$ и $\beta = \beta_*$ равно числу расположенных на мнимой оси точек разветвления при $v = v_* + \beta_*$.

Учитывая, что групповая скорость β зависит от действительного числа α, следует рассматривать лишь те корни уравнения (2.13), которые расположены на разрезах, проходящих по мнимой оси. Обозначим их p_{kl}^* для соответствующих функций S_k, где k — номер интеграла, а l — номер точки перевала.

Функции $h_n(p, \xi)$ при $0 \le v \le v_2^*$ терпят разрыв только на разрезах, проходящих по мнимой оси, а при $v_2^* < v < v_2$ — дополнительно на разрезах, соединяющих попарно точки разветвления p_{24} и $\bar{p}_{24}$, p_{34} и $\bar{p}_{34}$ (фиг. 6). Поэтому суммы интегралов I_{nk} по берегам иных разрезов равны нулю и исходный контур Γ_1 может быть деформирован при $\beta = 0$ в контуры Γ_{0k}, которые проходят по левым и правым берегам разрезов, проведенных по мнимой оси, а при $\beta \ne 0$ — в перевальные контуры Γ_{1k}, удовлетворяющие уравнению $\operatorname{Re} S_k(p, \beta) = 0$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ и проходящие через точки перевала p_{kl}^*.

Фиг. 8 схематично иллюстрирует форму контуров Γ_{1k} ($\beta \ne 0$) в зависимости от числа точек перевала, причем $\alpha_k(\bar{p}) = -\bar{\alpha}_k(p)$, $\Gamma_{1k}(\bar{p}) = \bar{\Gamma}_{1k}(p)$, а штриховка указывает на области $\operatorname{Re} S_k > 0$.

Таким образом, асимптотика интегралов I_{nk} определяется вкладом точек перевала при $\beta \ne 0$ или точек разветвления при $\beta = 0$ плюс сумма вкладов полюсов функций $Q_n(p)$, которые проходит прямая Γ_1 при деформировании в перевальный контур.

3. Общие свойства интегралов I_{nk}.

Лемма 1. Если $Q_n(p)$ не имеет особых точек в полуплоскости $\operatorname{Re} p \ge 0$, то при $\beta = 0$ $(\eta \equiv \xi)$ имеем

1*. $I_{n2}(\xi, t) = O(t^{-\infty})$ при $v_1 \le v \le v_2^*$;

2*. $I_{nk}(\xi, t) = O(t^{-\infty})$, $k = 2, 3$ при $v_2^* < v \le v_2$;

3*. $I_{nk}(\xi, t) = O(t^{-\infty})$, $k = 1, 2, 3, 4$ при $v > v_2$.

Доказательство. При $v_1 \le v \le v_2^*$ контур Γ_{02}, при $v_2^* < v \le v_2$ контуры Γ_{02} и Γ_{03}, а при $v \ge v_2$ все контуры Γ_{0k} проходят по мнимой оси, которая является границей аналитичности соответствующих подынтегральных функций. Действительно, предположим противное и замкнем контур дугой большого радиуса в левой полуплоскости. Тогда учет особенностей в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p < 0$ приводит к решению, которое не удовлетворяет исходному нулевому граничному условию при $\xi \to -\infty$, так как согласно приведенным ранее результатам в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p < 0$ выполняются условия $\mathrm{Im}\, \alpha_k < 0$ ($k = 2, 3$ при $v_1 \le v < v_2$ и $k = 1, 2, 3, 4$ при $v \ge v_2$).

Нетрудно заметить, что рассматриваемые интегралы не имеют особенностей на мнимой оси. Интегрируя их по частям N раз, получаем, что $I_{nk}(\xi, t) = O(t^{-N})$. Устремляя $N \to \infty$, убеждаемся в справедливости символических асимптотических формул утверждений 1*—3*. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $0 \le v \le v_1$. Тогда для любого $t > 0$ выполняются тождества

1*. $I_{n1}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \le -v_2 - v$;

2*. $I_{n2}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \le -v_1 - v$;

3*. $I_{n3}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \ge v_1 - v$;

4*. $I_{n4}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \ge v_2 - v$.

Доказательство. Используя метод возмущений [5], вычислим асимптотику корней полинома (2.3) при $p \to \infty$ ($\mathrm{Re}\, p > 0$):

$$\alpha_1(p) = ip(v_2 + v)^{-1} + O(1), \quad \alpha_2(p) = ip(v_1 + v)^{-1} + O(1) \tag{3.1}$$

$$\alpha_3(p) = -ip(v_1 - v)^{-1} + O(1), \quad \alpha_4(p) = -ip(v_2 - v)^{-1} + O(1)$$

При $v = v_1$ отсутствует корень α_3 и $I_{n3} \equiv 0$, а при $v = v_2$ — корень α_4 и $I_{n4} \equiv 0$.

Докажем первое утверждение леммы. Обозначим $b = \mathrm{Re}\,\Gamma_1$ (прямая Γ_1 проходит правее всех особенностей подынтегральных функций) и сделаем замену переменных в интеграле I_{n1}, положив $p = R\exp(i\varphi) + b$. Замкнем контур Γ_1 в правой полуплоскости дугой полуокружности C_R радиуса R и вычислим предел

$$V = \lim \int_{C_R} f_{n1}(p, 0) \exp[tS_1(p, \beta)]\, dp \quad \text{при} \quad R \to \infty \quad (\beta \le -v_2 - v)$$

Учитывая асимптотические равенства (3.1), будем иметь

$$|f_{n1}(R\exp(i\varphi) + b, p)| < \mu$$

где $\mu \to 0$ при $R \to \infty$. Кроме того, воспользуемся очевидными неравенствами

$$\cos\varphi \ge 1 - 2\pi^{-1}\varphi, \quad 1 + \beta(v_2 + v)^{-1} \le 0 \quad (\beta \le -v_2 - v)$$

Тогда получим при любом $t > 0$ (t — фиксированное)

$$\left| \int_{C_R} f_{n1}(p, 0) \exp[tS_1(p, \beta)]\, dp \right| \le \mu R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\exp[tS_1(p, \beta)]|\, d\varphi =$$

$$= 2\mu R \int_0^{\pi/2} \exp\left[tR\left(1 + \beta\left(v_2 + v\right)^{-1}\right)\cos\varphi + O\left(tR^{-1}\right)\right] d\varphi <$$

$$< 2\mu R \int_0^{\pi/2} \exp\left[-uR\left(1 - 2\pi^{-1}\varphi\right) + O\left(tR^{-1}\right)\right] d\varphi =$$

$$= \mu\pi u^{-1} \exp\left[O\left(tR^{-1}\right)\right]\left[1 - \exp(-uR)\right] \to 0, \quad R \to \infty$$

$$-u = t\left(1 + \beta\left(v_2 + v\right)^{-1}\right) \le 0$$

По построению ядро интеграла I_{n1} не имеет особенностей правее контура Γ_1. Поэтому интеграл I_{n1} по контуру Γ_1 равен интегралу по контуру C_R, что и доказывает утверждение 1* леммы 2.

Утверждения 2*—4* леммы 2 доказываются по аналогичной схеме.

Лемма 3. Пусть $v_1 < v \le v_2$. Тогда для любого $t > 0$ выполняются тождества

1*. $I_{n1}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \le -v_2 - v$;

2*. $I_{n2}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \le -v_1 - v$;

3*. $I_{n3}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \le v_1 - v$;

4*. $I_{n4}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \ge v_2 - v$.

Лемма 4. Пусть $v > v_2$. Тогда для любого $t > 0$ выполняются тождества

1*. $I_{n1}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \le -v_2 - v$;

2*. $I_{n2}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \le -v_1 - v$;

3*. $I_{n3}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \le v_1 - v$;

4*. $I_{n4}(0, t) \equiv 0$ при $\beta \le v_2 - v$.

Леммы 3 и 4 доказываются по схеме доказательства леммы 2.

Лемма 5. Пусть контур Γ_{1k} совпадает с мнимой осью и на нем отсутствуют точки перевала или точки разветвления. Тогда, если $Q_n(p)$ не имеет особых точек в полуплоскости $\operatorname{Re} p \ge 0$, то $I_{nk}(\eta, t) = O(t^{-\infty})$.

Доказательство. Интегрируя I_{nk} по частям N раз, получаем оценку $I_{nk}(\eta, t) = O(t^{-N})$. Устремляя $N \to \infty$, убеждаемся в справедливости символической асимптотической формулы. Лемма доказана.

Для получения асимптотических разложений можно воспользоваться известными формулами [5], как это было сделано в [3]. Поэтому рассмотрим подробнее лишь особенности решения, возникающие при движении нагрузки со скоростями звука v_1 и v_2.

Формулы (2.9) и (2.10) показывают, что ядра интегралов I_{n4} при $\xi > 0$ и I_{n1} при $\xi < 0$ имеют существенно особую точку $p = 0$. Поэтому интегралы I_{n4} при $\xi > 0$ и I_{n1} при $\xi < 0$ расходятся. Чтобы понять причину этого явления, оценим производные по ξ интегралов I_{n4} и I_{n1} в точке $\xi = 0$.

Пусть функция $Q_n(p)$ имеет полюс порядка m в точке $p = 0$. Тогда

$$f_{nr} = \left[Q_{-mn}(0) \frac{\left(\beta_2 - 2\beta_1 v_k^2\right)}{4v_k\left(\beta_3 + k_1\beta_1 - 4\beta_1 v_k^2\right)} p^{-1-m} + O\left(p^{1-m}\right) \right] \exp\left(-i\alpha_r \xi\right) \tag{3.2}$$

где $r = 4$ при $k = 1$ и $r = 1$ при $k = 2$, причем асимптотика α_r дается формулами (2.9) и (2.10). При $\xi = 0$ выражение (3.2) имеет в точке $p = 0$ полюс кратности

$m+1$, вклад которого в асимптотику интегралов I_{n4} и I_{n1} вычисляется по формуле ($I_{nr}(0, t; x) = I_{nr}(0, t)$ в точке x):

$$I_{nr}(0, t; p=0) = \frac{(\beta_2 - 2\beta_1 v_k^2)}{4v_k(\beta_3 + k_1\beta_1 - 4\beta_1 v_k^2)} \frac{Q_{-mn}(0)}{m!} t^m, \quad m \geq 0$$

$$\frac{\partial^j}{\partial \xi^j} I_{nr}(0, t; p=0) = Q_{-mn}(0) \frac{[\beta_2 + k_1 - 2(1+\beta_1) v_k^2]^j (\beta_2 - 2\beta_1 v_k^2)}{[4v_k(\beta_3 + k_1\beta_1 - 4\beta_1 v_k^2)]^{j+1}(m+j)!} t^{m+j}, \quad j \geq 0$$

В частности, при воздействии импульсной нагрузки в точке $\xi = 0$ ($\eta = \beta = 0$) при $t \to +\infty$ имеем

$$u_n^-(0, t) \to 0, \quad u_n^+(0, t) \to I_{n4}(0, t; p=0) \neq 0 \quad (v = v_1) \tag{3.3}$$

$$u_n^-(0, t) \to I_{n1}(0, t; p=0) \neq 0, \quad u_n^+(0, t) = 0 \quad (v = v_2)$$

То есть с течением времени решение становится разрывным, а правые производные решения по ξ при $v = v_1$ и левые производные решения по ξ при $v = v_2$ неограниченно возрастают. Более того, можно показать, что образ Лапласа решения (2.11) терпит разрыв при $\xi = 0$ для любого p. Поэтому следует предположить, что разрыв балки происходит мгновенно после приложения к ней нагрузки, движущейся с критическими скоростями v_1 или v_2.

Рассмотрим теперь поведение решения в окрестности точки $\xi = \beta t$ при $v = v_1$, $\beta \to 0+$ и $v = v_2$, $\beta \to 0-$. В этом случае соответственно на контурах Γ_{14} и Γ_{11} имеется по две точки перевала, которые стремятся к существенно особой точке $p = 0$:

$$p_{4l}^* \approx \pm i\sqrt{\alpha_1^* \beta}, \quad \beta \to 0+ \quad (l = 5, 6); \quad p_{1l}^* \approx \pm i\sqrt{\alpha_2^* \beta}, \quad \beta \to 0- \quad (l = 1, 2)$$

$$\alpha_k^* \approx -[\beta_2 + k_1 - 2(1+\beta_1) v_k^2][4v_k(\beta_3 + k_1\beta_1 - 4\beta_1 v_k^2)]^{-1}$$

Тогда вклады точек p_{4l}^* и p_{1l}^* вычисляются по формуле

$$I_{nr}(\eta, t; p_{rl}^*) \approx \operatorname{sign}(\Phi_\alpha') \exp\{i\varkappa_l [(1+t)\sqrt{\alpha_k^* \beta}]\} \times \tag{3.4}$$

$$\times [i\beta^{-1/4} A \exp(i\varkappa_l \sqrt{\alpha_k^*/\beta}\, \eta) t^{-1/2} + O(t^{-3/2})]$$

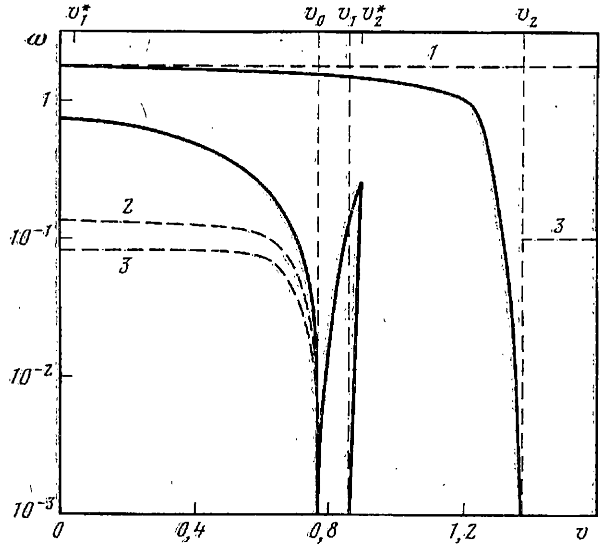
$$A = \frac{(\beta_2 - 2\beta_1 v_k^2)(\alpha_k^*)^{1/4}}{2\sqrt{\pi}\,[\beta_2 + k_1 - 2(1+\beta_1) v_k^2]}, \quad \varkappa_l = (-1)^{l+1}$$

где $r = 4$, $\beta \to 0+$ ($l = 5, 6$) при $k = 1$ и $r = 1$, $\beta \to 0-$ ($l = 1, 2$) при $k = 2$.

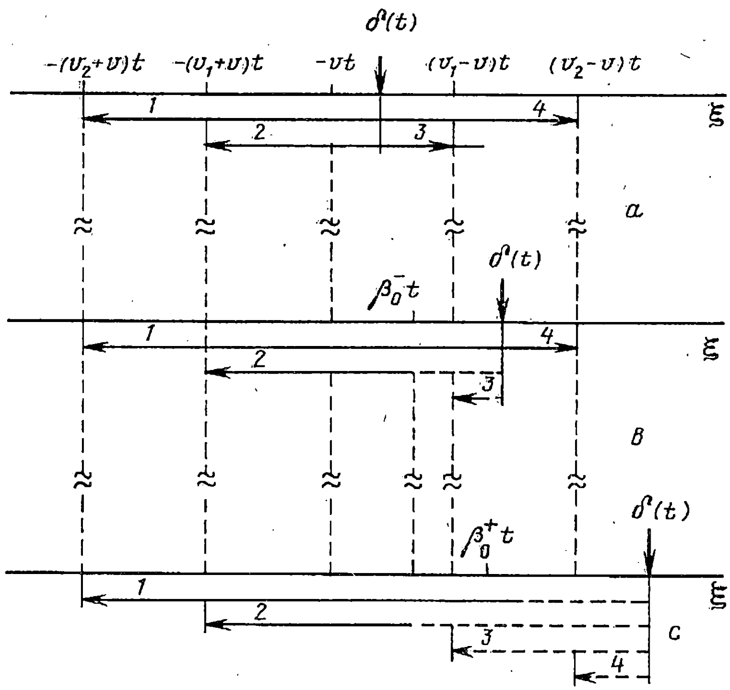
То есть вклады $I_{n4}(\eta, t; p_{4l}^*)$ ($l = 5, 6$) и $I_{n1}(\eta, t; p_{1l}^*)$ ($l = 1, 2$) при $t \to +\infty$ описывают медленно осциллирующее сжатие профиля балки соответственно перед точкой $\xi = 0$ и позади нее, причем амплитуда решения неограниченно увеличивается соответственно при $\beta \to 0+$ и $\beta \to 0-$.

4. Анализ асимптотических решений. Рассмотрим воздействие на балку типа Тимошенко некоторых типов нагрузок с одной точкой контакта $N = 1$, $\xi_1 = 0$ (соответствующий индекс единица опускается).

1°. Действие сосредоточенной силы. Пусть к балке приложена импульсная сила $q(t) = \delta(t)$, $Q(p) \equiv 1$. Как и в случае балки Бернулли — Эйлера, частоты $\omega_* = |\operatorname{Im} p_{ij}|$ (p_{ij} — точки разветвления, лежащие на мнимой оси) являются основными, т. е. определяющими с течением времени форму собственных колебаний балки в окрестности точки приложения силы. Сплошные линии на фиг. 9 иллюстрируют изменение основных частот ω_* в зависимости от скорости движения v согласно уравнению (2.6) при $\gamma_1 = k_1 = 0$, $\gamma_1 = 0{,}2$, $\nu = 0{,}35$, причем на участке



Фиг. 9



Фиг. 10

$0 \leq v \leq v_1^*$ три различные частоты сливаются в одну линию, так как мнимые части точек разветвления p_{14}', p_{24} и p_{13} различаются лишь в третьей значащей цифре. Штриховая линия 1 показывает лежащие на мнимой оси нули функции $H(\alpha_k, p)$, которые являются корнями уравнения

$$R\,[\Phi(\alpha, p),\ H(\alpha, p)] = 0 \tag{4.1}$$

Результант (4.1) определяет уравнение восьмой степени при $v \neq v_{1,2}$ и шестой степени при $v = v_1$ или $v = v_2$ относительно параметра p. Причем пара комплексно сопряженных нулей кратности два ($p_j^\circ = \pm i\sqrt{2\beta_1}$, $j = 1, 2$) лежит на мнимой оси в p-плоскости, а остальные четыре нуля располагаются на действительной оси симметрично относительно мнимой оси. Заметим, что нули уравнения (4.1) в общем не совпадают с точками разветвления p_{ij} за исключением случая $v = 0$, когда $p_1^\circ = p_{14}$, $p_2^\circ = \bar{p}_{14}$ и имеют место асимптотики при $\beta = 0$ ($\eta \equiv \xi$):

$$I_k(\xi, t; p_{14}) = O(t^{-9/4}), \quad I_k(\xi, t; \bar{p}_{14}) = O(t^{-9/4}) \quad (v = 0, k = 1, 4)$$

Из формул (2.12) и лемм 2—5 следует, что изгибная волна, вызванная действием подвижной импульсной нагрузки представляет собой суперпозицию k волн ($k = 1, 2, 3, 4$), каждая из которых описывается интегралом $I_k(\eta, t)$ и распространяется от точки приложения силы на бесконечность с соответствующей конечной групповой скоростью. На фиг. 10 приводится схема распространения изгибной волны для трех принципиально различных диапазонов движения импульсной силы: а) $0 \le v < v_1$, б) $v_1 < v < v_2$, в) $v > v_2$ (горизонтальные штриховые линии указывают на зоны экспоненциального затухания возмущений $O(t^{-\infty})$). Воздействие же на балку импульсной силы, движущейся со скоростями звука v_1 или v_2, вызывает, как показывают формулы (3.3) и (3.4), ее разрыв и «сморщивание» соответственно перед и позади точки $\xi = 0$.

Рассмотрим действие осциллирующей силы

$$q(t) = -H(t)\exp(i\omega_0 t), \quad Q(p) = -(p - i\omega_0)^{-1}$$

Вклад полюса $p = i\omega_0$ описывает вынужденные колебания балки. При $0 \le v < v_0$ и $\omega_0 < |\operatorname{Im} p_{13}|$ ($0 \le v \le v_1^*$, $0 \le k_1 < k_1^*$) или $\omega_0 < |\operatorname{Im} p_{23}|$ ($v_1^* < v < v_0$, $0 \le k_1 < k_1^*$, либо $k \ge k_1^*$) с течением времени в окрестности точки $\xi = 0$ устанавливается режим стоячих волн. В любом ином случае происходит возбуждение k-ой волны и возникают распространяющиеся в противоположные стороны (при $v > v_2$ отстающие от движущейся нагрузки) прогрессивные волны, которые накладываются на собственные колебания балки. Групповые скорости прогрессивных волн можно вычислить, разрешив результант (2.13) относительно β.

При $\omega_0 = \operatorname{Im} p_j^\circ$ ($j = 1, 2$) полюс $p = i\omega_0$ исчезает, компенсируясь нулем функции $H(\alpha_k, p)$. Поэтому с течением времени, несмотря на воздействие осциллирующей силы, прогиб балки стремится к исходной прямолинейной форме. Подобное явление антирезонанса может иметь место в упругих системах с несколькими степенями свободы [6].

Появлению резонанса соответствует совпадение частоты осциллирующей силы ω_0 с одной из основных частот собственных колебаний балки ω_*. В этом случае увеличение прогиба балки с течением времени пропорционально $t^{M/(M+1)}$, где M — порядок точки разветвления $i\omega_*$. Разрешив уравнение (2.6) относительно v, нетрудно вычислить соответствующие критические скорости движения силы. В частности, критическая скорость движения постоянной силы ($\omega_0 = 0$) равняется v_0.

Таким образом, сплошные линии и штриховая линия 1 на фиг. 9 иллюстрируют зависимость резонансных и антирезонансной частот балки от скорости движения сосредоточенной силы. Однако уравнение (4.1) имеет также пару нулей и на положительной части действительной оси.

Это указывает на то, что при действии на балку типа Тимошенко экспоненциальной силы с декрементом возрастания, равным одному из двух положительных действительных корней уравнения (4.1), прогиб балки не только не увеличивается, а напротив со временем уменьшается. По-видимому, этот факт следует признать дефектом уравнения типа Тимошенко.

2°. *Действие силы, приложенной к сосредоточенной массе.* С учетом уравнений (1.4), (2.11) при $\mu = \varepsilon = 0$ имеем

$$W_L(p,\xi) = Q(p)\,h(p,\xi), \quad mp^2 W_L(p,0) = P_L(p) - Q(p)$$

где $P_L(p)$ — образ Лапласа силы $P(t)$, приложенной к массе. Отсюда получаем

$$Q(p) = P_L(p)\,[mp^2 h(p,0) + 1]^{-1}$$

Так как $h(p,0) \equiv 0$ при $v > v_2$, то $Q(p) \equiv P_L(p)$ и наличие сосредоточенной массы в этом случае не оказывает влияния на динамику балки.

Рассмотрим действиие импульсной силы $P(t) = \delta(t)$, $P_L(p) \equiv 1$. Особыми точками функции $Q(p)$ являются лежащие на мнимой оси точки разветвления p_{ij} и, возможно, комплексно сопряженные полюсы.

При $0 \le v < v_0$ функция $Q(p)$ имеет два комплексно сопряженных полюса, лежащих на мнимой оси, и импульсная сила вызывает незатухающие гармонические колебания балки в окрестности сосредоточенной массы с частотой $\omega_0 = |\operatorname{Im} p_1|$, являющейся наименьшей в спектре собственных частот балки. При $m \gg 1$ для вычисления полюсов функции $Q(p)$ можно воспользоваться приближенной формулой, полученной методом возмущений [7]:

$$p_{1,2}^{-} \approx \pm i\,[mh(0,0)]^{-1/2} \quad (0 \le v < v_0)$$

Шриховая линия 2 на фиг. 9 показывает изменение частоты ω_0 в зависимости от скорости движения массы $m = 100$ при $\gamma_1 = k_1 = 0$, $\gamma_2 = 0{,}2$, $\nu = 0{,}35$.

При $v = v_0$ функция $Q(p)$ не имеет полюсов. Как и в случае балки Бернулли — Эйлера, начальный прогиб балки, вызванный импульсной силой, с течением времени монотонно уменьшается пропорционально $t^{-1/2}$.

При $v_0 < v < v_1$ функция $Q(p)$ имеет четыре полюса, два из которых расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, а при $v_1 < v < v_2$ функция $Q(p)$ имеет два лежащих на действительной оси полюса, которые расположены симметрично относительно мнимой оси. Поэтому решение является неустойчивым, и прогиб балки увеличивается экспоненциально при $t \to +\infty$.

Рассмотрим действие осциллирующей силы при $0 \le v \le v_0$:

$$P(t) = -H(t)\exp(i\omega t), \quad Q(p) = -(p - i\omega)^{-1}\,[mp^2 h(p,0) + 1]^{-1}.$$

Как и в случае балки Бернулли — Эйлера, появлению резонанса при $0 \le v < v_0$ соответствует совпадение частоты осциллирующей силы ω с частотой собственных колебаний сосредоточенной массы ω_0 (при совпадении полюса $p = i\omega$ с точками разветвления p_{ij} решение остается устойчивым). При $v = v_0$ постоянная сила ($\omega = 0$) вызывает с течением времени монотонный рост прогиба балки в окрестности точки $\xi = 0$, пропорциональный $t^{1/2}$. Штриховая линия 2 на фиг. 9 иллюстрирует также зависимость резонансной частоты балки от скорости движения сосредоточенной массы.

3°. *Действие силы, приложенной к подрессоренной массе.* Уравнение деформации рессоры и колебания массы имеют вид

$$\mu\,[\partial w(0,t)/\partial t - dz/dt] + \varepsilon\,[w(0,t) - z] = -q(t) \tag{4.2}$$

$$md^2z/dt^2 - \mu\,[\partial w(0,t)/\partial t - dz/dt] - \varepsilon\,[w(0,t) - z] = P(t)$$

где $z = z(t)$ — прогиб рессоры. Переходя к трансформантам Лапласа, получаем систему уравнений

$$W_L(p,\xi) = Q(p)\,h(p,\xi), \quad \mu p\,[W_L(p,0) - Z(p)] +$$

$$+\,\varepsilon\,[W_L(p,0) - Z(p)] = -Q(p)$$

$$mp^2 Z(p) - \mu p\,[W_L(p,0) - Z(p)] - \varepsilon\,[W_L(p,0) - Z(p)] = P_L(p)$$

Решая эту систему, находим

$$Q(p) = P_L(p)\, a(p)/b(p), \quad Z(p) = P_L(p)[a(p)\, h(p, 0) + 1]/b(p)$$

$$b(p) = mp^2 [1 + a(p)\, h(p, 0)] + a(p), \quad a(p) = \mu p + \varepsilon$$

$$z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} Z(p) \exp(pt)\, dp$$

Так как $h(p, 0) \equiv 0$ при $v > v_2$, то

$$Q(p) = P_L(p)(\mu p + \varepsilon)/c(p), \quad Z(p) = P_L(p)/c(p), \quad c(p) = mp^2 + \mu p + \varepsilon$$

и решения $w(0, t)$, $z(t)$ можно найти по вычетам. Более того, несложно заметить, что при $v \geq v_2$ уравнения (4.2) становятся замкнутыми (так как $w_n(0, t) \equiv 0$) и определяют колебания элементов экипажа на жестком основании.

Рассмотрим действие импульсной силы $P(t) = \delta(t)$, $P_L(p) \equiv 1$. Особыми точками функции $Q(p)$ являются лежащие на мнимой оси точки разветвления p_{ij} и, возможно, комплексно сопряженные полюсы.

При $0 \leq v < v_0$ функция $Q(p)$ имеет два комплексно сопряженных полюса, лежащих на мнимой оси, и импульсная сила вызывает незатухающие гармонические колебания подрессоренной массы и балки в окрестности точки $\xi = 0$ с частотой $w_0 = |\operatorname{Im} p_1|$, являющейся наименьшей в спектре собственных частот балки. При $m \gg 1$ для вычисления полюсов функции $Q(p)$ можно воспользоваться приближенной формулой, полученной методом возмущений:

$$p_{1,2} \approx \pm i (\varepsilon/m)^{1/2} [1 + \varepsilon h(0, 0)]^{-1/2}, \quad 0 \leq v < v_0$$

Штриховые линии 3 на фиг. 9 показывают изменение частоты ω_0 в зависимости от скорости движения массы $m = 100$ при $\gamma_1 = k_1 = \mu = 0$, $\varepsilon = 1$, $\gamma_2 = 0{,}2$, $\nu = 0{,}35$.

При $v = v_0$ функция $Q(p)$ не имеет полюсов. Как и в случае балки Бернулли — Эйлера, начальный прогиб балки, вызванный импульсной силой, с течением времени монотонно уменьшается пропорционально $t^{-1/2}$.

При $v_0 < v < v_2$ функция $Q(p)$ имеет четыре полюса, два из которых расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Поэтому решение является неустойчивым и прогиб балки увеличивается экспоненциально при $t \to +\infty$. Более точные вычисления показали, что в работе [3] была допущена ошибка. При движении подрессоренной массы по балке Бернулли — Эйлера со скоростью, превышающей критическую ($v > v_0$), функция $Q(p)$ также имеет четыре полюса, два из которых расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Поэтому решение является неустойчивым и прогиб балки увеличивается экспоненциально при $t \to +\infty$.

Рассмотрим действие осциллирующей силы при $0 \leq v \leq v_0$ или $v > v_2$:

$$P(t) = -H(t) \exp(i\omega t), \quad Q(p) = -(p - i\omega)^{-1} [mp^2 h(p, 0) + 1]^{-1}$$

Как и в случае балки Бернулли — Эйлера, появлению резонанса при $0 \leq v < v_0$ или $v > v_2$ соответствует совпадение частоты осциллирующей силы ω с частотой собственных колебаний подрессоренной массы ω_0 (при совпадении полюса $p = i\omega$ с точками разветвления p_{ij} решение остается устойчивым). При $v = v_0$ постоянная сила ($\omega = 0$) вызывает с течением времени монотонный рост прогиба рессоры и балки в окрестности точки $\xi = 0$, пропорциональный $t^{1/2}$. Поэтому штриховые линии 3 на фиг. 9 иллюстрируют также зависимость резонансной частоты балки от скорости движения подрессоренной массы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Якушев Н. З.* Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок//Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казан. ун-та, 1985. Вып. 18. Ч. 1. С. 3—56.
2. *Коваленко Е. В., Дуплякин И. А.* Об уточненных уравнениях динамического деформирования тонких пластин//Гидроаэромеханика и теория упругости. Математические методы в терии упругости и гидроаэромеханике. Днепропетровск: ДГУ, 1988. С. 74—80.
3. *Дуплякин И. А.* Движение экипажа с постоянной скоростью по балке бесконечной длины, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 461—471.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970, 720 с.
5. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
6. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, ошибки и парадоксы. М.: Наука, 1979. 384 с.
7. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1994