

УДК 539.3

© 1996 г. В. В. ПАРЦЕВСКИЙ

КРУГОВОЕ РАССЛОЕНИЕ В КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ ИЗГИБЕ

Расслоения — один из наиболее распространенных технологических или эксплуатационных дефектов в элементах конструкций из композитов. Неразрушающие методы контроля позволяют оценить геометрию таких дефектов. Далее необходим ответ на вопрос — опасны ли они. Для этого необходимо изучение механизмов разрушения, в частности одного из них — развития расслоения в условиях статики и динамики. Литература по механике разрушения композитов с расслоениями обширна, в частности обзоры есть в [1—6].

Здесь в приближении Кирхгофа — Лява поставлена и решена задача о плоской круговой трещине расслоения в произвольной квазиизотропной пластине при поперечном изгибе. Предложен метод решения, получены условия распространения расслоения. Рассмотрены примеры статического и динамического нагружения пластин различной формы с расслоением.

1. Рассмотрим произвольную в плане пластину толщины $h = \text{const}$ с произвольными условиями на контуре, нагруженную давлением $p(x_1, x_2)$ (фиг. 1, а). Плоскость кругового расслоения радиуса r_c параллельна лицевым плоскостям пластины, точка (x_{10}, x_{20}) — центр расслоения, h_1, h_2 — толщины расслоившейся части ($h = h_1 + h_2$). Полагаем, что расслоение не слишком близко расположено к границе пластины, части 1 и 2 также квазиизотропны.

Решение задачи об изгибе пластины без расслоения $W(x_1, x_2)$ назовем невозмущенным. Будем считать его известным. Введем локальную систему полярных координат r, θ с началом в центре расслоения и перейдем к ним в нагрузке p и прогибе W при помощи преобразования $x_1 - x_{10} = r \cos \theta, x_2 - x_{20} = r \sin \theta$. Если вид p и W отличен от полиномиального, то предварительно разложим их в двойной ряд Тейлора в точке (x_{10}, x_{20}) :

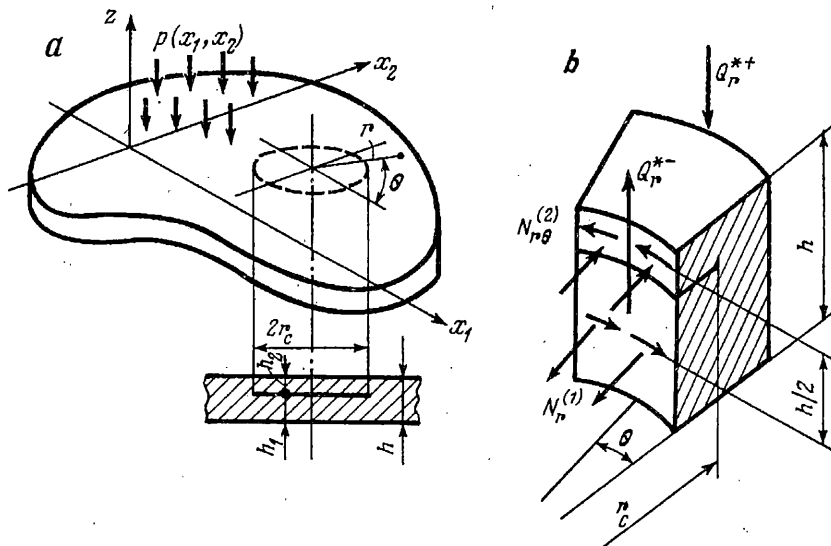
$$\begin{aligned} W &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} (x_1 - x_{10})^j (x_2 - x_{20})^k = \\ &= \sum_j \sum_k a_{jk} r^{j+k} \cos^j \theta \sin^k \theta \end{aligned}$$

Переходя к функциям кратных углов, невозмущенное решение и нагрузку представим в виде

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} r^{n+2k} (d_{n+2k,n} \cos n\theta + d'_{n+2k,n} \sin n\theta) \quad (1.1)$$

$$p(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} r^{n+2k} (b_{n+2k,n} \cos n\theta + b'_{n+2k,n} \sin n\theta)$$

где коэффициенты известны. Независимо от условий на границе, в силу уравнения изгиба, имеют место формулы



Фиг. 1

$$d_{k+4,n} = \frac{b_{kn}}{D [(k+4)^2 - n^2] [(k+2)^2 - n^2]}, \quad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right) \quad (1.2)$$

где E , ν — упругие константы в плоскости пластины.

Возмущенное решение будем искать в области $r \leq r_1$, включающей расслоение, такой, что $r_c \ll r_1$ (используем предположение о неблизости расслоения к границе пластины). Потребуем, чтобы возмущенное решение удовлетворяло условиям стыковки с невозмущенным по обобщенным перемещениям на $r = r_1$. Выполнения условий стыковки по обобщенным силам требовать не будем. Таким образом, возмущенное решение будет приближенным. Погрешность его оценим ниже.

Функцию прогиба возмущенного решения обозначим

$$w(r, \theta) = w^- \quad (r \leq r_c)$$

$$w(r, \theta) = w^+ \quad (r_c \leq r \leq r_1)$$

Условия на $r = r_1$ и $r = r_c$ имеют вид

$$w^+ = W, \quad \frac{\partial w^+}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r} \quad (r = r_1)$$

$$w^- = w^+, \quad \frac{\partial w^-}{\partial r} = \frac{\partial w^+}{\partial r}, \quad M_r^- + \frac{h}{2} N_r = M_r^+ \quad (r = r_c)$$

$$Q_r^{*-} + \frac{h}{2r_c} \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} = Q_r^{*+} \quad (r = r_c) \quad (1.3)$$

$$\left(Q_r^* = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right)$$

Последние два условия ясны из фиг. 1, в. В частности¹, сдвиговые усилия $N_{r\theta}$ включены в обобщенную поперечную силу, подобно моментам $M_{r\theta}$. Здесь также учтено, что в силу линейности задачи для усилий в срединных плоскостях

¹ Заметим, что эти условия строго следуют из вариационного вывода естественных краевых условий.

слоев 1 и 2 в зоне расслоения выполняются условия $N_r^{(1)} = N_r^{(2)}$, $N_{\theta}^{(1)} = N_{\theta}^{(2)}$. Верхний индекс у $N^{(1)}$ далее опустим.

Решение ищем по общим правилам для бигармонических операторов (ограничимся только симметричными по θ решениями):

$$w^- = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^-(r) \cos n\theta, \quad w^+ = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^+(r) \cos n\theta$$

$$v_n^- = C_{1n} r^n + C_{2n} r^{n+2} + \gamma \sum_{k=2}^{\infty} d_{n+2k,n} r^{n+2k} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$v_0^+ = C_{30} + C_{40} r^2 + C_{50} \ln r + \sum_{k=2}^{\infty} d_{n+2k,n} r^{n+2k}$$

$$v_1^+ = C_{31} r + C_{41} r^3 + C_{51} r^{-1} + C_{61} r \ln r + \sum_{k=2}^{\infty} d_{1+2k,1} r^{2k+1}$$

$$v_n^+ = C_{3n} r^n + C_{4n} r^{n+2} + C_{5n} r^{-n} + C_{6n} r^{-n+2} + \quad (1.4)$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} d_{n+2k,n} r^{n+2k} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$\gamma = \frac{D}{D^-} = \frac{(1 + \alpha)^3}{1 + \alpha^3}, \quad \alpha = \frac{h_1}{h_2}$$

$$D^- = Eh_1^3 / [12(1 - \nu^2)] + Eh_2^3 / [12(1 - \nu^2)]$$

где D^- — суммарная цилиндрическая жесткость расслоившейся части, коэффициенты в частных решениях известны (1.2).

Решение плоской задачи для слоя 1 выражаем через функцию напряжений φ

$$\varphi_n = (B_{1n} r^n + B_{2n} r^{n+2}) \cos n\theta, \quad N_{rn} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \theta^2} \quad (1.5)$$

$$N_{\theta n} = \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial r^2}, \quad N_{r\theta n} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\varphi_n}{r} \right) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Здесь и выше учтены условия ограниченности при $r \rightarrow 0$.

Решение (1.5) должно стыковаться с (1.4) по обобщенным перемещениям на границе $r = r_c$:

$$u_{rn} = \frac{\partial w^-}{\partial r} \frac{h - h_1}{2}, \quad u_{\theta n} = \frac{1}{r} \frac{\partial w^-}{\partial \theta} \frac{h - h_1}{2} \quad (1.6)$$

где u_{rn} и $u_{\theta n}$ — перемещения точек срединной плоскости слоя 1.

Константы осесимметричной составляющей решения ($n = 0$) после удовлетворения условиям (1.3), (1.6) получим в виде

$$C_{20} = d_{20} - (\gamma - 1) \sum_{k=2}^{\infty} d_{2k,0} k r_c^{2(k-1)}, \quad C_{40} = d_{20}, \quad C_{50} = 0$$

$$B_{20} = \frac{Eh^2 \alpha}{(1 - \nu)(1 + \alpha)^2} \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k,0} k r_c^{2(k-1)} \quad (1.7)$$

Остальные константы для $n = 0$ не влияют на напряженно-деформированное состояние.

Отметим, что осесимметричные части возмущенного и невозмущенного

решений в области $r_c \leq r \leq r_1$ совпадают, т. е. полученное возмущенное решение точно в рамках принятой теории.

Перейдем к анализу периодических решений ($n \geq 1$). Вначале из условий (1.6) выразим константы плоской задачи через константы функции прогиба

$$B_{1n} = - \frac{Eh^2\alpha}{2(1+\nu)(1+\alpha)^2} \left[C_{1n} + 4 \frac{n+1}{n(3-\nu)} C_{2n} r_c^2 - \right. \\ \left. - \gamma \sum_{k=2}^{\infty} d_{n+2k,n} r_c^{2k} \left(1 + k \frac{n(1+\nu)+4}{(1-\nu)} \right) \right] \quad (1.8)$$

$$B_{2n} = \frac{Eh^2\alpha}{2(1+\nu)(3-\nu)(1+\alpha)^2} \left(C_{2n} + \gamma \sum_{k=2}^{\infty} d_{n+2k,n} k r_c^{2(k-1)} \right)$$

Теперь условия (1.3) приводят после преобразований к системе уравнений для определения C_{jn} ($n = 1, 2, \dots$; индекс n здесь опустим):

$$AC = F, \quad A = \|a_{jk}\|, \quad C^T = (C_1, C_6), \quad F^T = (F_1, F_6)$$

$$a_{jk} = 0 \quad (j, k = 1, 2), \quad a_{13} = 1, \quad a_{14} = r_1^2, \quad a_{15} = r_1^{-2n}, \quad a_{16} = r_1^{-2(n-1)}$$

$$a_{23} = n, \quad a_{24} = (n+2)r_1^2, \quad a_{25} = -nr_1^{-2n}, \quad a_{26} = -(n+2)r_1^{-2(n-1)}$$

$$a_{31} = -a_{33} = 1, \quad a_{32} = -a_{34} = r_c^2, \quad a_{35} = -r_c^{-2n}, \quad a_{36} = -r_c^{-2(n-1)}$$

$$a_{41} = -a_{43} = n, \quad a_{42} = -a_{44} = (n+2)r_c^2, \quad a_{45} = nr_c^{-2n}, \quad a_{46} = (n-2)r_c^{-2(n-1)}$$

$$a_{51} = -a_{53} = -a_{61} = a_{63} = n(n-1)(1-\nu), \quad a_{52} = -a_{54} - 8 \frac{\gamma-1}{3-\nu} r_c^2$$

$$a_{54} = -(n+1)(n(1-\nu)+2(1+\nu))r_c^2, \quad a_{55} = a_{65} = -n(n+1)(1-\nu)r_c^{-2n}$$

$$a_{56} = -(n-1)(n(1-\nu)-2(1+\nu))r_c^2, \quad a_{62} = a_{52} - 2(1-\nu)(n^2-1)r_c^2$$

$$a_{64} = (n+1)(n(1-\nu)-4)r_c^2, \quad a_{66} = -(n-1)(n(1-\nu)+4)r_c^{-2(n-1)}$$

$$F_1 = d_{nn} + d_{n+2,n}(n+2)r_1^2, \quad F_2 = d_{nn}n + d_{n+2,n}(n+2)r_1^2$$

$$F_3 = -(\gamma-1) \sum_{k=2}^{\infty} d_{n+2k,n} r_c^{2k}, \quad F_4 = -(\gamma-1) \sum_{k=2,3,\dots} d_{n+2k,n} (n+2k) r_c^{2k}$$

$$F_5 = -(\gamma-1)(1-\nu) \sum_{k=2}^{\infty} d_{n+2k,n} \left(n(n-1) + 2k \frac{2n-1+\nu}{3-\nu} \right) r_c^{2k}$$

$$F_6 = -(\gamma-1)(1-\nu) \sum_{k=2}^{\infty} d_{n+2k,n} \left(n(n-1) + 2k \frac{n(1-\nu)-2}{3-\nu} \right) r_c^{2k}$$

Решая систему уравнений методом исключения получим для констант периодического решения

$$C_{1n} = d_{nn} - \sum_{k=1}^{\infty} d_{n+2k,n} r_c^{2k} \{ \beta k(n+1)n^{-1} + (1-\delta_{1k}) \times$$

$$\times [2(1-\delta_{1n}) \xi \zeta (2n^2-1)n^{-1} - (k-1)(\gamma-1)] \}$$

$$C_{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} d_{n+2k,n} r_c^{2(k-1)} \{ k(1+\beta) - (1-\delta_{1k}) \times$$

$$\times [\xi(1+\beta)(n-1)(1+2\zeta\beta^{-1}) - \gamma k] \}$$

$$C_{3n} = d_{nn} + \sum_{k=1}^{\infty} d_{n+2k,n} r_c^{2k} [\beta k (n+1) \rho_c^{2n} n^{-1} + 2(1 - \delta_{1k})(1 - \delta_{ln}) n \xi \zeta \rho_c^{2n-2}]$$

$$C_{4n} = d_{n+2,n} + \sum_{k=2}^{\infty} d_{n+2k,n} r_c^{2(k-1)} 4 \xi \zeta (n-1) \beta^{-1} \quad (1.9)$$

$$C_{5n} = - \sum_{k=1}^{\infty} d_{n+2k,n} r_c^{2(k+n)} [\beta k + 2(1 - \delta_{1k})(n-1) \xi \zeta] n^{-1}$$

$$C_{6n} = - \sum_{k=2}^{\infty} d_{n+2k,n} r_c^{2(k+n-1)} 2(1 - \delta_{ln}) \xi \zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\beta = \frac{6\alpha}{(3 - \nu)(1 + \alpha)^2 - 6\alpha}, \quad \xi = \frac{1}{8}(1 - \nu)(\gamma - 1)$$

$$\zeta = 2n - k(n-1), \quad \rho_c = r_c/r_1$$

где δ_{kn} — символ Кронекера. Слагаемые порядка $\rho_c^{2(n+1)}$ в (1.9) опущены в силу сделанного предположения.

Оценим погрешность допущения, по которому не требовали выполнения условий стыковки обобщенных сил возмущенного и невозмущенного периодических решений на $r = r_1$. Вычисляя соответствующие изгибающие радиальные моменты M_r , решения w^+ и M_r^0 решения (1.1), получим

$$\eta = \frac{M_r^0 - M_r}{M_r^0} \sim \begin{cases} \rho_c^4 & (n = 1) \\ d_{n+4,n} r_1^2 r_c^2 / d_{nn} & (n > 1) \end{cases}$$

Эта же оценка верна и для Q_r^* .

Если учесть, что d_{kn} коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции прогиба, то последнему члену можно придать вид

$$\frac{d_{n+4,n} r_1^2 r_c^2}{d_{nn}} \sim \frac{r_1^4 \rho_c^4}{(n+4)(n+3) \lambda_{nn}^4}$$

где λ_{nn} — характерный масштаб изменения в радиальном направлении n -ой гармоники невозмущенного решения $W(r, \theta)$.

Видно, что даже при $\lambda_{nn} \sim r_1$ погрешность полученного решения не превышает ρ_c^4 ; с этой же погрешностью в формулах (1.9) можно удержать только слагаемые, содержащие коэффициенты до $d_{n+2,n}$ включительно.

2. Рассмотрим условия разрушения пластины по механизму роста трещины расслоения в своей плоскости. Такой механизм характерен для композитных пластин слоистой структуры, имеющих относительно слабые поверхности раздела слоев. Здесь возможен рост расслоения по моде II (поперечный сдвиг), моде III (продольный сдвиг) и смешанной моде.

Условие локального роста трещины по смешанной моде будет

$$f(G_{II}, G_{III}) = G_{IIc} \quad (2.1)$$

где G_{II} , G_{III} — линейные интенсивности высвобождения энергии деформации при росте трещины по модам II и III, G_{IIc} — критическое значение G_{II} (вязкость разрушения по моде II). Вид функции $f(G_{II}, G_{III})$ — критерий разрушения — обсудим ниже.

Для вычисления G_{II} воспользуемся формулой [7]²:

$$G_{II} = 1/2 (M_r^- \kappa_r^- - M_r^+ \kappa_r^+ + N_r (\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(2)})) \quad (r = r_c) \quad (2.2)$$

Здесь учтено, что $N_r^{(1)} = N_r^{(2)}$ по величине. Этой формуле удобно придать другой вид, если использовать пятое условие из (1.3)

$$G_{II} = 1/2 M_r^+ (\kappa_r^- - \kappa_r^+) + N_r (\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(2)} - 1/2 h \kappa_r^-) \quad (r = r_c) \quad (2.3)$$

Вычислим множители здесь по решениям (1.4) с учетом (1.7), (1.8), (1.9) и оценок, сделанных в п. 1. Тогда после преобразований получим для $r = r_c$:

$$\begin{aligned} M_r^+ D^{-1} &= 2d_{20} (1 + \nu) + 4d_{40} (3 + \nu) r_c^2 + \sum_n [d_{nn} r_c^{n-2} n (n-1) (1 - \nu) + \\ &+ d_{n+2,n} r_c^n (n+1) ((n-\beta)(1-\nu) + 2(1+\nu))] \cos n\theta \\ \kappa_r^- - \kappa_r^+ &= 8(\gamma - 1) d_{40} r_c^2 + 4\beta \sum_n d_{n+2,n} r_c^n (n+1) \cos n\theta \\ N_r h D^{-1} &= 4(1 - \gamma^{-1})(1 + \nu)(d_{20} + 2d_{40} r_c^2) + \\ &+ 2(1 - \gamma^{-1})(1 - \nu) \sum_n [d_{nn} r_c^{n-2} n (n-1) - \\ &- d_{n+2,n} r_c^n (n+1) (\beta(n+1) - (1+\beta) \frac{4(n-1) - (n+2)(1+\nu)}{3-\nu})] \cos n\theta \\ \varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(2)} - \frac{h \kappa_r^-}{2} &= -4d_{40} r_c^2 h \gamma - \\ &- 4 \frac{1+\beta}{3-\nu} \sum_n d_{n+2,n} r_c^n (n+1) \cos n\theta \end{aligned}$$

После подстановки этих соотношений в (2.3) с учетом следствия из теоремы Бетти ($M_m \kappa_{mm} = M_{mm} \kappa_m$ и т. д.; m, n — номера гармоник) получим

$$G_{II} = 8D (\gamma - 1) (2d_{40} r_c^2 + \beta (\gamma - 1)^{-1} \sum_n d_{n+2,n} r_c^n (n+1) \cos n\theta)^2 \quad (2.4)$$

Осесимметричное решение — первое слагаемое в (2.4) — было получено в [9].

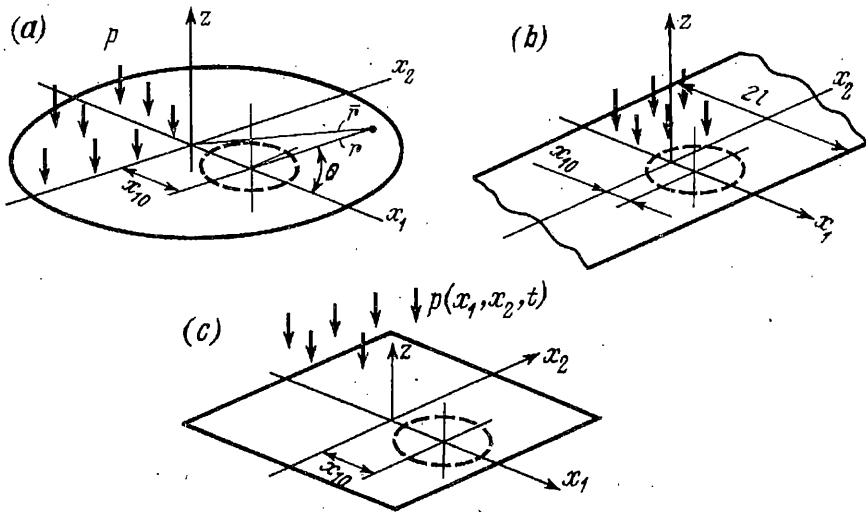
Для линейной интенсивности высвобождения энергии деформации при росте трещины по моде III (продольный сдвиг) аналогично (2.2) имеем

$$G_{III} = M_{r_0}^- \kappa_{r_0}^- - M_{r_0}^+ \kappa_{r_0}^+ + 1/2 N_{r_0} (\gamma_{r_0}^{(1)} + \gamma_{r_0}^{(2)}) \quad (r = r_c).$$

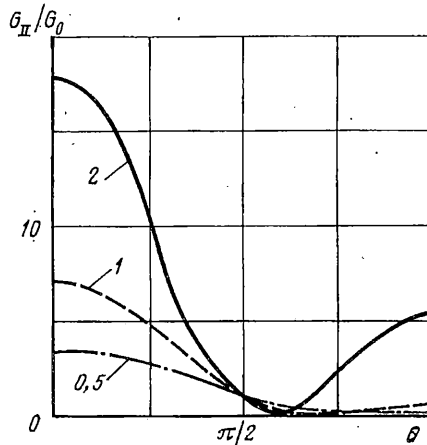
Однако в рамках классической теории изгиба пластин моменты M_{r_0} и усилия N_{r_0} , вообще говоря, не удовлетворяют условиям стыковки на границе $r = r_c$. Они входят только в качестве статических эквивалентов в обобщенные поперечные силы. Поэтому на модели Кирхгофа получить интенсивность высвобождения энергии деформации при развитии трещины по механизму продольного сдвига G_{III} в локальной форме принципиально нельзя. Кроме того, в реальных задачах изгиба пластин (кроме, может быть, кручения) $G_{III} \ll G_{II}$ и для симметричных относительно $\theta = 0$ решений на шах G_{II} приходится $G_{III} = 0$. Итак, в примерах пренебрежем G_{III} и вместо (2.1) будем использовать критерий роста трещины расслоения в виде

$$\max_{\theta} G_{II} = G_{IIc} \quad (2.5)$$

² В [8] показано, что трением на поверхности расслоения и вкладом поперечных сил в рамках используемой теории можно пренебречь.



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Рассмотрим некоторые примеры, представляющие интерес для практики.

1. *Расслоение в круговой пластине под равномерной нагрузкой.* Невозмущенное решение для свободно опертой пластины в координатах $\bar{r}, \bar{\theta}$ (фиг. 2, а) имеет вид

$$W = -\frac{p}{64D} \left(R^4 \frac{5+\nu}{1+\nu} - R^2 \bar{r}^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} + \bar{r}^4 \right)$$

Переходя к локальной системе r, θ по формуле $\bar{r}^2 = x_{10}^2 + r^2 + 2x_{10}r \cos \theta$ невозмущенное решение получим в виде

$$W(r, \theta) = d_{00} + d_{20}r^2 + d_{40}r^4 + (d_{11}r + d_{31}r^3) \cos \theta + d_{22}r^2 \cos 2\theta$$

$$d_{40} = -p/(64D), \quad d_{31} = -px_{10}/(16D)$$

Остальные коэффициенты не входят в G_{II} . Подставляя d_{40}, d_{31} в (2.4), получим

$$G_{II} = G_0 (1 + 2\varphi x_{10} r_c^{-1} \cos \theta)^2$$

$$G_0 = p^2 r_c^4 (\gamma - 1)/(128D), \quad \varphi = 2\beta\gamma(\gamma - 1)^{-1} \quad (3.1)$$

где G_0 — интенсивность высвобождения энергии деформации осесимметричной задачи ($x_{10} = 0$). Заметим, что G_{II} не зависит от условий закрепления пластины на контуре и от размера пластины R . Погрешность формулы (3.1) $\sim (r_c/r_1)^4$, т. к. $d_{n+4,n} = 0$ для любого n . Если под r_1 понимать расстояние от центра расслоения до края, то даже при $r_c/r_1 = 0,5$ точность (3.1) удовлетворительна.

G_{II} максимальна при $\alpha = 1$ (расслоение на нейтральной плоскости пластины). Зависимости G_{II}/G_0 от угла θ показаны на фиг. 3 для $\alpha = 1$. Цифры у кривых — значения x_{10}/r_c . Видно, что роста расслоения следует ожидать в зоне его контура, наиболее удаленной от центра пластины.

Условие (2.5) можно использовать для формулировки ограничений на величину расслоения

$$r_c \leq (\varphi^2 x_{10}^2 + G_{IIc} D / [p^2 (\gamma - 1)])^{1/2} - \varphi x_{10}$$

Аналогично можно получить ограничение для нагрузки.

2. *Расслоения в удлиненной пластине* (фиг. 2, в). При $p = \text{const}$ и свободном опирании невозмущенное решение (цилиндрический изгиб) имеет вид

$$W(x_1) = -1/24 (p/D) (5l^4 - 6lx_1^2 + x_1^4)$$

В локальной системе координат r, θ оно будет

$$W(r, \theta) = d_{00} + d_{20}r^2 + d_{40}r^4 + (d_{11}r + d_{31}r^3) \cos \theta + \\ + (d_{22}r^2 + d_{42}r^4) \cos 2\theta + d_{33}r^3 \cos 3\theta + d_{44}r^4 \cos 4\theta$$

$$d_{40} = -p/(64D), \quad d_{31} = -px_{10}/(8D), \quad d_{42} = -p/(48D)$$

Остальные коэффициенты разложения не нужны для вычисления G_{II} . Формула (2.4) дает

$$G_{II} = G_0 (1 + 4\varphi x_{10} r_c^{-1} \cos \theta + \varphi \cos 2\theta)^2$$

Все комментарии и выводы, сделанные для круговой пластины, верны и здесь.

3. *Импульсное нагружение удлиненной пластины* (фиг. 2, в). Если на свободно опертую пластину падает импульс давления, то для прогиба имеем

$$W = A \cos(1/2\pi x_1 l^{-1}) \sin \omega t$$

Здесь ограничиваемся случаем возбуждения колебаний по основной форме, амплитуда A определяется величиной импульса.

Разлагая форму колебаний в ряд Тейлора в точке $(x_{10}, 0)$, переходя к локальным полярным координатам и используя формулы

$$\cos^n \theta = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{j} \cos(n-2j)\theta \quad (n = 1, 3, \dots)$$

$$\cos^n \theta = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{j=0}^{(n-2)/2} \binom{n}{j} \cos(n-2j)\theta + \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n = 2, 4, \dots)$$

получим невозмущенное решение в виде

$$W(r, \theta) = A \cos \frac{\pi x_{10}}{2l} \sum_{n=0,1,k \neq n, \dots} \sum \bar{d}_{kn} r^k \cos n\theta \quad (3.2)$$

$$\bar{d}_{40} = \frac{1}{64} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4, \quad \bar{d}_{31} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^3 \operatorname{tg} \frac{\pi x_{10}}{2l}$$

$$\bar{d}_{42} = \frac{1}{48} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4, \quad \bar{d}_{33} = -\frac{1}{384} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^5 \operatorname{tg} \frac{\pi x_{10}}{2l}$$

Из формул для коэффициентов d_{kn} и формулы (2.4) видно, что при вычислении

G_{II} с погрешностью $\sim 10^{-1}$ (r_c/l)² достаточно ограничиться слагаемыми до $n = 2$. Характер зависимости G_{II} от θ ; r_c аналогичен описанному выше.

4. Импульсное нагружение квадратной пластины (фиг. 2, с). Основная форма колебаний невозмущенного решения при свободном опирании пластины имеет вид

$$W(x_1, x_2) = A \cos(1/2\pi x_1 l^{-1}) \cos(1/2\pi x_2 l^{-1})$$

где A определено величиной импульса давления.

После разложения формы в двойной ряд Тейлора в точке $(x_{10}, 0)$, перехода к полярным координатам r, θ , использования формул для $\sin^n \theta$ через кратные значения, аналогичные приведенным для $\cos^n \theta$, и перемножения рядов невозмущенное решение приведем к виду (3.2) с коэффициентами

$$\bar{d}_{40} = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4, \quad \bar{d}_{31} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^3 \operatorname{tg} \frac{\pi x_{10}}{2l}$$

$$\bar{d}_{42} = 0, \quad \bar{d}_{53} = \frac{1}{96} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^5 \operatorname{tg} \frac{\pi x_{10}}{2l}$$

Сходимость по n здесь несколько хуже, но и здесь для вычисления G_{II} достаточно ограничиться приведенными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 447 с.
2. Avery J. G., Porter T. R., Lauzze R. W. Structural integrity requirements for projectile impact damage. An overview//AGARD Conf. Proc. № 186. Spec. Meet. Impact Damage Tolerance of Structures. Ankara, Turkey, 1976. P. 1.1—1.30.
3. Chai H., Knauss W. G., Babcock C. D. Observation of damage growth in compressively loaded laminates//Experim. Mech. 1983. V. 23. № 3. P. 329—337.
4. Dorey G. Impact damage in composites — development, consequences and prevention//2th Europ. Conf. on Compos. Mater. London, 1987. V. 3. P. 3.1—3.26.
5. Garg A. C. Delamination — A damage mode in composite structures//Engin. Fract. Mech. 1988. V. 29. № 5. P. 557—584.
6. Воронцов А. Н., Мурзаханов Г. Х., Шугорев В. Н. Разрушение конструкций из композитных материалов по типу расслоений//Механика композит. материалов. 1989. № 6. С. 1007—1023.
7. Williams J. G. On the calculation of energy release rates for crackes laminates//Intern. J. Fracture. 1988. V. 36. № 2. P. 101—119.
8. Partsevsky V. V., Speransky M. I., Beliaev S. M. Delamination at openings in composite plates//Compos. Sci. and Techn. 1992. V. 45. P. 229—232.
9. Парцевский В. В., Беляев С. М. Устойчивость отслоений в композитных элементах конструкций при изгибе//Механика композит. материалов. 1993. № 6. С. 785—790.

Москва

Поступила в редакцию
28.VI.1994