МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1996

УДК 531.384

© 1996 г. В. Н. ТХАЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КАЧЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Исследуется задача об устойчивости качения по горизонтальной шероховатой плоскости вдоль прямой тяжелого динамически несимметричного эллипсоида, ограниченного поверхностью вращения, с центром масс в геометрическом центре эллипсоида и главными центральными осями инерции, совпадающими с осями эллипсоида. В рассматриваемом движении круговое сечение эллипсоида принадлежит одной и той же вертикальной плоскости. Показано, что в случае эллипсоида, близкого к динамически симметричному, параметрический резонанс приводит к неустойчивости. В общем случае построены области в пространстве параметров, где качение формально устойчиво. В частном случае шара Чаплыгина, близкого к однородному, качение всегда неустойчиво.

1. Уравнения движения. Качение тяжелого твердого тела по абсолютно шероховатой плоскости описывается [1] системой

$$\Theta\cdot\omega^{\cdot} + \omega\times(\Theta\cdot\omega) = mg\mathbf{r}\times\gamma - m\mathbf{r}\times[\omega^{\cdot}\times\mathbf{r} + \omega\times\mathbf{r}^{\cdot} + \omega\times(\omega\times\mathbf{r})]$$

$$\gamma^{\cdot} + \omega\times\gamma = 0 \tag{1.1}$$

где m — масса тела, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^{\mathrm{T}}$ — вектор мгновенной угловой скорости, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^{\mathrm{T}}$ — единичный вектор в точке контакта тела и плоскости, направленный вертикально вверх, g — ускорение свободного падения, Θ — центральный тензор инерции, $\mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ — радиус вектор, проведенный из центра масс в точку контакта. Связь между векторами $\mathbf{r}$ и γ устанавливается с помощью уравнения поверхности тела. Если это уравнение записывается в виде $F(\mathbf{r}) = 0$, то

$$\gamma = -\operatorname{grad} F(\mathbf{r}) / |\operatorname{grad} F(\mathbf{r})|$$

В результате задача описывается замкнутой системой из шести уравнений первого порядка относительно проекций векторов ω и γ (или $\mathbf{r}$). Наличие двух первых интегралов — энергии $m(\omega\times\mathbf{r})^2 + \omega\cdot(\Theta\cdot\omega) - 2mg(\mathbf{r}\cdot\gamma) = 2h$ и геометрического — позволяет, в принципе, описать задачу системой из четырех уравнений, зависящих от параметра h.

Система (1.1) обратима с множеством $\omega = 0$ неподвижных точек линейного автоморфизма. Поэтому каждое движение, на котором $\omega = 0$, по крайней мере дважды, является периодическим по теореме Хейнбокла — Страбла [2]. Другие следствия свойства обратимости указаны в [3—5].

Выполним замену переменных

$$\gamma_1 = \sin\theta\cos\varphi,\ \gamma_2 = \sin\theta\sin\varphi,\ \gamma_3 = \cos\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$$

$$\omega_1 = p\cos\varphi - q\sin\varphi,\ \omega_2 = p\sin\varphi + q\cos\varphi,\ \omega_3 = r \tag{1.2}$$

Тогда получим $\theta^{\cdot} = -q$, $\varphi^{\cdot} = -r + p\operatorname{ctg}\theta$.

В случае главных центральных осей инерции [1] исключительное множество $\theta = 0, \pi$ отвечает перманентным вращениям вокруг вертикали и достаточно полно изучено (см. [3, 4]). На этом множестве $\omega \times \gamma = 0$. Из уравнения для φ видно, что для описания движений, на которых $\omega \times \gamma \neq 0$ можно использовать новую независимую переменную φ ($\varphi^{\cdot} \neq 0$) и с учетом интеграла энергии получить 2π-периодическую систему третьего порядка

$$dp/d\varphi = q + (\varphi^{\cdot} S)^{-1} \{(X + mxzr^{\cdot}) [(B + m(x^2 + z^2)) \cos\varphi + mxy \sin\varphi] +$$

$$+ (Y + myzr^{\cdot}) [(A + m(y^2 + z^2)) \sin\varphi + mxy\cos\varphi]\}$$

$$dq/d\varphi = -p - (\varphi^{\cdot} S)^{-1} \{(X + mxzr^{\cdot}) [(B + m(x^2 + z^2)) \sin\varphi - mxy\cos\varphi] +$$

$$+ (Y + myzr^{\cdot}) [-(A + m(y^2 + z^2)) \cos\varphi + mxy \sin\varphi]\} \tag{1.3}$$

$$d\theta/d\varphi = -q/\varphi^{\cdot}$$

$$X = (B - C)\omega_2\omega_3 + m\{g(\gamma_3 y - \gamma_2 z) - \omega_1(xx^{\cdot} + yy^{\cdot} + zz^{\cdot}) +$$

$$+ x^{\cdot}(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega_3 y(\omega_1 x + \omega_2 y) + \omega_2 z(\omega_3 z +$$

$$+ \omega_1 x) + yz(\omega_2^2 - \omega_3^2)\}$$

$$Y = (C - A)\omega_3\omega_1 + m\{g(\gamma_1 z - \gamma_3 x) - \omega_2(xx^{\cdot} + yy^{\cdot} + zz^{\cdot}) +$$

$$+ y^{\cdot}(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega_1 z(\omega_2 y + \omega_3 z) + \omega_3 x(\omega_1 x + \omega_2 y) + zx(\omega_3^2 - \omega_1^2)$$

$$S = AB + Am(x^2 + z^2) + Bm(y^2 + z^2) + m^2 z^2 (x^2 + y^2 + z^2)$$

где A, B, C — главные центральные моменты инерции, а в правых частях необходимо заменить $\mathbf{r}$ через γ и перейти к новым переменным по формулам (1.2). Проекции r и $r^{\cdot}$ исключаются посредством интеграла энергии.

Если функция $F(x, y, z)$ такова, что производная F_2' обращается в нуль одновременно с z, то система (1.1) допускает частное решение — качение в плоскости xy, которое описывается системой

$$[C + m(x^2 + y^2)]\,\omega_3^{\cdot} = m\{g(\gamma_2 x - \gamma_1 y) - r(xx^{\cdot} + yy^{\cdot})\}$$

$$\gamma_1^{\cdot} - \gamma_2\omega_3 = 0,\ \gamma_2^{\cdot} + \gamma_1\omega_3 = 0,\ \omega_1 = \omega_2 = 0,\ z = 0,\ \gamma_3 = 0 \tag{1.4}$$

Качение будет без подскока, если $\mathbf{R}\cdot\gamma > 0$, где $\mathbf{R}$ — реакция опорной плоскости. При этом на решении (1.4) имеем

$$\mathbf{R}\cdot\gamma = m\,[g + \omega_3^{\cdot}(y\gamma_1 - x\gamma_2) + \omega_3(y^{\cdot}\gamma_1 - x^{\cdot}\gamma_2) + \omega_3^2(x\gamma_1 + y\gamma_1)]$$

В системе (1.3) качению в главной плоскости xy отвечает частное решение

$$p = q = 0,\ \theta = \pi/2 \tag{1.5}$$

причем, зависимость $r(h, \varphi)$ определяется соотношением

$$[C + m(x^2 + y^2)]\,r^2 - 2mg(x\cos\varphi + y\sin\varphi) = h$$

где x, y — известные 2π-периодические функции φ при заданной поверхности тела.

Поставим задачу об устойчивости множества всех качений в одном направлении, т. е. тех движений, на которых $r(h, \varphi)$ не обращается в нуль. Эта задача корректно сводится к исследованию устойчивости частного решения (1.5) системы (1.3).

Для получения уравнений возмущенного движения необходимо задать поверхность тела. Ниже ограничимся случаем тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения $x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ и центром масс, расположенным в геометрическом центре эллипсоида. Главные центральные оси инерции тела полагаем совпадающими с осями эллипсоида. Тогда на решении (1.5) динамически несимметричный эллипсоид вращения катится вдоль прямой, а точка соприкосновения тела и плоскости описывает на поверхности тела окружность радиуса a. В этом случае $\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\gamma} = mg > 0$ и качение происходит без подскока, а угловая скорость качения $r = \pm\,\omega = \pm\,\sqrt{2\,(h - mga)/(C + ma^2)}$ постоянна.

При таком выборе поверхности тела система (1.3) обратима с линейным автоморфизмом $(\varphi, p, q, \theta) \to (-\,\varphi, p, -\,q, \theta)$ и сохраняет это свойство при переходе в окрестность решения (1.5). Следовательно, в рассматриваемом случае исследование линеаризованной системы уравнений уже позволяет сделать [6] ряд выводов о поведении системы в целом. Имея это в виду, составим в явном виде уравнения возмущенного движения

$$dp/d\varphi = q + a_{11}p + a_{12}q + a_{13}\theta + \ldots$$

$$dq/d\varphi = -\,p + a_{21}p + a_{22}q + a_{23}\theta + \ldots,\quad d\theta/d\varphi = -\,q + \ldots \tag{1.6}$$

$$a_{11} = [(C - B)\,(B + ma^2) + (A - C)\,(A + ma^2)]\sin\varphi\cos\varphi S^{-1}$$

$$a_{12} = [(C - B)\,(B + ma^2)\cos^2\varphi + (C - A)\,(A + ma^2)\sin^2\varphi\,]\,S^{-1}$$

$$a_{21} = [A\,(A - C)\cos^2\varphi + B\,(B - C)\sin^2\varphi\,]\,S^{-1},$$

$$a_{22} = [B\,(B - C) - A\,(A - C)\,]\sin\varphi\cos\varphi S^{-1}$$

$$a_{13} = fS^{-1}\,(B - A)\sin\varphi\cos\varphi,\quad a_{23} = fS^{-1}\,(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)$$

$$S = AB + ma^2\,(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi),\quad f = mg\,(a^2 - c^2)\,\omega^{-2}a^{-1}$$

где величины $p\omega^{-1}$, $q\omega^{-1}$, $\theta - \pi/2$ обозначены соответственно через p, q, θ, а члены выше первого порядка относительно p, q, θ явно не выписаны.

2. Параметрический резонанс. При $A = B$ правая часть системы (1.6) не зависит явно от φ и качение будет [7] устойчивым по Ляпунову, если

$$CA^{-1} > fa^{-1}\,(C + ma^2)^{-1} \tag{2.1}$$

Рассмотрим сначала случай эллипсоида, близкого к динамически симметричному, когда $A = J\,(1 + \varepsilon)$, $B = J\,(1 - \varepsilon)$, ε — малый параметр. В результате получим квазиавтономную обратимую периодическую систему, подробно исследованную в [8]. В этом случае в системе (1.6) имеем

$$a_{11} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\varepsilon\sin 2\varphi/S^*,\quad a_{12} = [C/J - 1 - \beta\varepsilon^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\,\varepsilon\cos 2\varphi\,]/S^*$$

$$a_{21} = [\alpha + \beta\varepsilon^2 + (\alpha + \beta)\,\varepsilon\cos 2\varphi\,]/S^*,\quad a_{22} = -\,(\alpha + \beta)\,\varepsilon\sin 2\varphi/S^*$$

$$a_{13} = -\,\delta\varepsilon\sin 2\varphi/S^*,\quad a_{23} = -\,\delta\,(1 + \varepsilon\cos 2\varphi)/S^*,\quad S^* = 1 + \gamma\varepsilon\cos 2\varphi$$

$$\alpha = (J - C)\,\psi\,(\varepsilon),\ \beta = J\psi(\varepsilon),\ \gamma = ma^2\psi\,(\varepsilon),\ \delta = \psi(\varepsilon),\ \psi(\varepsilon) = (J + ma^2 - J\varepsilon^2)^{-1}$$

Усредненные на периоде значения этих коэффициентов равны

$$a_{11}^* = 0,\ a_{12}^* = [C/J - 1 - \beta\varepsilon^2 - (\alpha + \beta + \gamma)\,\gamma\varepsilon^2/u\,]/v,\ a_{13}^* = 0,$$

$$u = 1 + v,\ v = \sqrt{1 - \gamma^2\varepsilon^2}$$

$$a_{21}^* = [\alpha + \beta\varepsilon^2 - (\alpha + \beta)\,\gamma\varepsilon^2/u\,]/v,\ a_{22}^* = 0,\ a_{23}^* = -\,\delta\,[1 - \gamma^2\varepsilon^2/u\,]/v$$

Поэтому при выполнении (2.1) имеем $\Omega_*^2 > 0$, где Ω_* — частота колебаний усредненной системы, которая задается равенством

$$\Omega_*^2 = (1 - a_{21}^*)\,(1 + a_{12}^*) + a_{23}^* = \mu + 0\,(\varepsilon^2)$$

$$\mu = C\,(C + ma^2)\,\psi\,(0)\,J^{-1} - f\psi\,(0)$$

Следовательно [8], в этом случае при отсутствии резонансов второго порядка $2\Omega_* = l \in \mathbf{N}$ система (1.6) имеет один нулевой и пару чисто мнимых характеристических показателей $\pm i\Omega$, причем Ω с точностью до членов порядка ε^2 совпадает с Ω_*. Чисто мнимые $\pm i\Omega$ приводят к формальной устойчивости и к существованию ляпуновского семейства периодических движений, зависящих от четырех произвольных параметров h, $p(0)$, $q(0)$, $\theta(0)$.

Пусть в системе имеет место резонанс второго порядка. Вследствие π-периодичности по φ линейной части системы (1.6) к параметрической неустойчивости может привести [8] только резонанс $\Omega_* = 1$. Если при этом вопрос решается линейными по ε членами, то резонансное соотношение имеет вид $\Omega_0 = 1$, где Ω_0 есть Ω_* при $\varepsilon = 0$.

Выполним в системе (1.6) линейную замену переменных

$$\xi = p + (1 + a_{12}^*)\,\theta, \quad \eta = (1 - a_{21}^*)\,p - a_{23}^*\theta, \quad \zeta = \Omega_* q$$

В результате получим

$$d\xi/d\varphi = \Omega_*^{-2}\,\{[a_{11}a_{23}^* + a_{13}(1 - a_{21}^*)]\,\xi + [a_{11}(1 + a_{12}^*) - a_{13}]\eta\} +$$

$$+ \Omega_*^{-1}(a_{12} - a_{12}^*)\,\zeta + \ldots$$

$$d\eta/d\varphi = \Omega_*\zeta + \Omega_*^{-2}(1 - a_{21}^*)\,\{[a_{11}a_{23}^* + a_{13}(1 - a_{21}^*)]\,\xi +$$

$$+ [a_{11}(1 + a_{12}^*) - a_{13}]\,\eta + (a_{12} - a_{12}^*)\,\Omega_*\zeta\} + \ldots$$

$$d\zeta/d\varphi = -\Omega_*\eta + \Omega_*^{-1}\,\{(a_{21} - a_{21}^*)\,a_{23}^* + (a_{23} - a_{23}^*)(1 - a_{21}^*)]\,\xi +$$

$$+ [(a_{21} - a_{21}^*)(1 + a_{12}^*) - (a_{23} - a_{23}^*)]\,\eta\} + a_{22}\xi + \ldots$$

Далее, после преобразования $\xi = a_1(\varphi)\,\eta + b_1(\varphi)\,\zeta$, $U = \eta + i\zeta$, $V = \eta - i\zeta$, где π-периодические функции $a_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$ определяются при $\Omega_* \neq 2$, имеем

$$dU/d\varphi = i\Omega_* U + \Omega_*^{-2}\,\{(1 - a_{21}^*)\,[(1 + a_{12}^*)\,a_{11} - a_{13}] - i\,[(a_{21} - a_{21}^*)(1 + a_{12}^*) -$$

$$- (a_{23} - a_{23}^*)]\,\Omega_*\}\,(U + V)/2 + i\Omega_*^{-1}\,[(a_{12} - a_{12}^*)(1 - a_{21}^*) -$$

$$- \Omega_* a_{22} i]\,(U - V)/2 + c_1(\varphi)\,\xi_1 + \ldots$$

$$d\xi_1/d\varphi = 0 + \ldots$$

($c_1(\varphi)$ — некоторая π-периодическая функция, явный вид которой ниже не понадобиться).

В полученной системе параметрическую неустойчивость гарантирует коэффициент $Q \neq 0$ при $e^{2i\varphi}V$ в правой части уравнения для U [8]:

$$4iQ = k_1 + k_2 + l_1 - l_2$$

$$k_1 \sin 2\varphi = \Omega_*^{-2}(1 - a_{21}^*)\,[(1 + a_{12}^*)a_{11} - a_{13}]S^*,$$

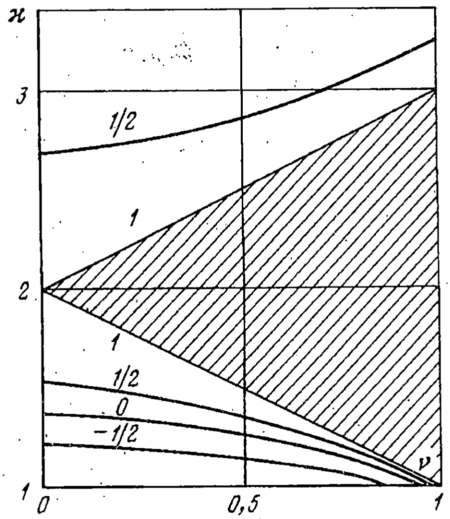
$$l_1 \cos 2\varphi = \Omega_*^{-1}(a_{12} - a_{12}^*)(1 - a_{21}^*)S^*$$

$$k_2 \cos 2\varphi = \Omega_*^{-2}\,[(a_{21} - a_{21}^*)(1 + a_{12}^*) - (a_{23} - a_{23}^*)]\,S^*, \quad l_2 \sin 2\varphi = a_{22}S^*.$$

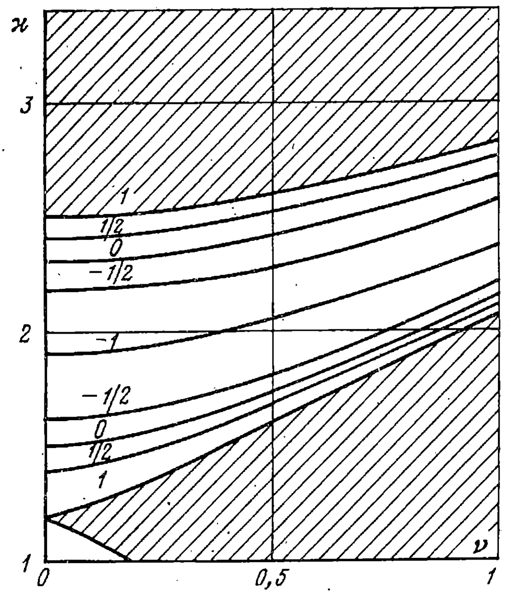
Отсюда при $\Omega_0 = 1$ с точностью до членов порядка ε получим

$$4iQ = \{2 + \psi(0)\,[(2J - C)\,(C\,(C + ma^2)\,\psi(0)\,J^{-1} - 1) + 2C]\}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

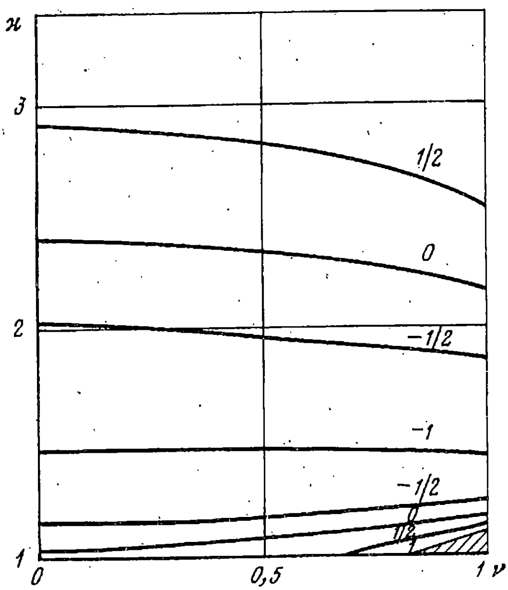
и качение неустойчиво.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Теорема. Пусть эллипсоид вращения с полуосями $a = b$, c, массы m и главными центральными моментами инерции $A = J(1 + \varepsilon)$, $B = J(1 + \varepsilon)$, C (ε малый параметр) катится с угловой скоростью ω. Тогда при $\Omega_0^2 = \mu = 1$ возникает параметрический резонанс, который почти для всех тел ($Q \neq 0$) приводит к неустойчивости. Если $\Omega_0 \neq 1$ и Ω_* не есть натуральное число, то все характеристические показатели $\pm i\Omega$ чисто мнимы и при отсутствии резонансов $k\Omega = l$ ($k, l \in \mathbf{Z}$) качение формально устойчиво.

Замечание. В частном случае шара Чаплыгина ($a = c$), близкого к однородному ($J = C$), всегда реализуется параметрический резонанс $\Omega_0 = 1$, который приводит к неустойчивости качения [8].

3. **Случай произвольного эллипсоида вращения.** Поставим задачу об определении характеристических показателей линейной части системы (1.6). В силу обратимости (1.6) с неподвижным множеством $q = 0$ линейного автоморфизма один из характеристических показателей равен нулю [9]. Два оставшихся определяются [9] построением на периоде одного частного решения с начальными условиями $p(0) = \theta(0) = 0$, $q(0) = 1$. Тогда корень ρ характеристического уравнения удовлетворяет квадратному уравнению $\rho^2 - 2q(2\pi)\rho + 1 = 0$. Очевидно, что характеристические показатели чисто мнимые, если $|q(2\pi)| \le 1$. При этом значениям $q(2\pi) = \pm 1$, $\pm 1/2$, 0 отвечают соответственно резонансы второго, третьего и четвертого порядков.

Построение указанного частного решения проведено численно. Для этого введены безразмерные параметры

$$\varkappa = (A + B)C^{-1}, \nu = (A - B)C^{-1}, \lambda = ma^2C^{-1}, \chi = f(A + ma^2)^{-1}$$

Из ограничений на моменты инерции следует, что $\varkappa \ge 1$, $|\nu| \le 1$, $\lambda \ge 1$. При этом значению $\nu = 0$ отвечает динамически симметричное тело ($A = B$).

Для выбранных значений $\chi = 0, \pm 1, \pm 4, \pm 10$ на плоскости ν, $\varkappa$ при различных значениях $\lambda = 1, 4, 9, 25, \ldots$ построены области, в которых $|q(2\pi)| \le 1$ и выделены кривые, отвечающие резонансным значениям $q(2\pi)$. Границы этих областей отвечают значению $q(2\pi) = 1$ и содержат точку параметрического резонанса, расположенную на оси $\varkappa$. Наиболее типичные результаты приведены на фиг. 1 ($\chi = 0$), фиг. 2 ($\chi = 4$) и фиг. 3 ($\chi = -4$) для значения $\lambda = 4$. Здесь область неустойчивости заштрихована, а на резонансных кривых указано значение $q(2\pi)$. Области симметричны относительно оси $\varkappa$; на фигурах изображена только та часть, где $\nu \ge 0$. Анализ всех полученных результатов показывает, что качение геометрически вытянутого эллипсоида ($\chi < 0$) «более устойчиво» чем качение сжатого эллипсоида ($\chi > 0$). При фиксированном $\chi > 0$ размеры области устойчивости увеличиваются с ростом λ, в то время как при $\chi < 0$ наблюдается ее уменьшение. Наконец, для тел с $\chi < 0$ достаточно большое значение $\varkappa$ всегда гарантирует устойчивое качение, что вообще говоря, не имеет место при $\chi > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (940101674а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карапетян А. В.* Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела на шероховатой плоскости//Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 19—24.
2. *Heinbockel J. H., Struble R. A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries//J. Societ. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. № 2. P. 425—440.
3. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем//Итоги науки и техники. Сер. Общая механика Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 132 с.
4. *Маркеев А. П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
5. *Тхай В. Н.* Об устойчивости симметричных положений равновесия обратимой системы//ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 20—24.
6. *Матвеев М. В., Тхай В. Н.* Устойчивость периодических обратимых систем//ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 3—11.
7. *Миндлин И. М.* Об устойчивости движения тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости//Инж. ж. 1964. Т. 4. Вып. 2. С. 225—230.
8. *Тхай В. Н.* Некоторые задачи об устойчивости обратимой системы с малым параметром//ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 3—12.
9. *Тхай В. Н.* Нелинейные колебания обратимых систем//ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 38—50.

Москва

Поступила в редакцию
13.VII.1994