

УДК 539.375

© 1996 г. О. П. АЛЕКСЕЕНКО, А. М. ВАЙСМАН

НЕСИММЕТРИЧНЫЙ РОСТ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА

При теоретическом анализе трещины гидроразрыва обычно предполагается, что она растет в фиксированной плоскости разрыва симметрично относительно источника, из которого нагнетается текучий материал. Однако при неоднородностях начального поля напряжений либо прочностных свойств среды симметрия роста может быть нарушена. Между тем уже в симметричной постановке строгий анализ наталкивается на целый ряд трудностей математического характера, в связи с чем обычно ограничиваются приближенным подходом [1, 2]. Обозначим характер возникающих трудностей на примере самой простой задачи гидроразрыва, когда текучий материал обладает свойствами, близкими к идеальной пластичности. Упрощение в этом случае достигается за счет того, что временные зависимости исчезают, и размерность понижается на единицу. Состояние трещины в каждый момент не зависит от предыстории и определяется только количеством заполнителя в трещине. Тем не менее при обычной формулировке, например, в терминах смещений берегов трещины, строгий анализ задачи даже при такой упрощенной постановке вызывает серьезные затруднения. Действительно, как показано в [3], соответствующее интегральное уравнение оказывается нелинейным, его ядро — сингулярным, причем оператор не обладает свойством сжимаемости, так что стандартная итерационная процедура расходится. На примере осесимметричной трещины в [3] обсуждаются способы преодоления математических трудностей этой модели.

Представляет интерес обобщить предложенный подход на несимметричный случай. Естественно поставить цель при максимальном упрощении модели, позволяющем сохранить существенные черты явления, строго рассмотреть хотя бы простейшие несимметричные ситуации. Тогда можно уверенно говорить, например, об управлении развитием трещины в заданном направлении при помощи внешней нагрузки, обсуждать механизмы самопроизвольной симметризации растущей трещины и т. д. В связи с этим ниже в рамках плоской задачи анализируется несимметричный рост прямолинейной трещины, когда ее вершины находятся на разных расстояниях от источника. Предполагается, что сопротивление текучего материала при скольжении вдоль стенок трещины описывается постоянной силой трения независимо от скорости скольжения и величины давления, как при идеальной пластичности. Подчеркнем, что важно именно взаимодействие со стенками. Если на границе сред закон трения задан, то собственная реология заполнителя для гидроразрыва не существенна [3] и потому при постановке задачи не обсуждается.

Ограничимся этими общими замечаниями постановочного плана и в дальнейшем для экономии места будем опускать уже описанные в [3] подробности физической и математической формулировки данной модели, сосредоточившись на рассмотрении эффектов асимметрии.

1. Несимметричный рост трещины может быть вызван, в частности, неравномерными сжимающими напряжениями P_∞ на «бесконечности», действующими перпендикулярно ее плоскости. Для простоты будем считать, что трещина развивается в направлении изменения сил P_∞ , растущих по линейному закону $P_\infty = P_g + B(X - X_\alpha)$, $B = \text{Const}$. Здесь X — координата вдоль продольной оси трещины с началом в ее центре, X_α — положение источника, P_g — внешняя нагрузка над источником. Она считается достаточно большой, так что давления нагнетания в раскрытой трещине вполне достаточно для полного проникания заполнителя в трещину, несмотря на трение о стенки. Предполагается, что по всей длине $2L$ трещины внешние нагрузки — сжимающие, для чего достаточно, чтобы выполнялось условие $P_g \geq B(L - X_\alpha)$.

Вполне очевидно, что рассматриваемая неравномерность внешней нагрузки затруднит распространение трещины в положительном направлении оси X . Однако заранее неясно, существует ли предел удаления правой вершины от источника.

Анализ начнем с записи основных уравнений. Связь раскрытия $2W(X)$ с распределением давления $P(X)$ в трещине дается известной формулой механики трещин нормального разрыва [4]:

$$W(X) = (\pi D)^{-1} \int_{-L}^L P(X_1) \ln \frac{[(L+X_1)(L-X)]^{1/2} + [(L-X_1)(L+X)]^{1/2}}{[(L+X_1)(L-X)]^{1/2} - [(L-X_1)(L+X)]^{1/2}} dX_1, \quad (1.1)$$

где через $D = 1/2 E (1 - \nu^2)^{-1}$ обозначена комбинация стандартных упругих констант.

В выражении (1.1) пока не учтен вклад от внешней нагрузки.

Профиль давления определяется сопротивлением, возникающим на стенках при скольжении текучего материала. В приближении погранслоя, с учетом описанного выше закона трения на границе и малости раскрытия можно получить уравнение [3]:

$$\frac{dP}{dX} = \begin{cases} \tau/W, & X \leq X_\alpha \\ -\tau/W, & X > X_\alpha \end{cases} \quad (1.2)$$

В этом уравнении τ — константа трения о стенки, являющаяся аналогом предела текучести идеально пластического материала.

Характер погранслояного приближения таков, что уравнение (1.2) становится некорректным в малой окрестности вершины с размерами порядка характерного раскрытия [3]. Поэтому истинное давление заполнителя на кромке при полном проникновении может отличаться от значения, рассчитанного в рамках уравнения (1.2), так что последнее следует рассматривать просто в качестве удобного формального параметра, характеризующего текущее состояние трещины. Разумеется, использование (1.2) на всей длине трещины не повлияет [3] на точность расчета профиля раскрытия на основе формулы (1.1).

Продолжим формулировку основных уравнений. Прочностные свойства упругой среды характеризуются величиной коэффициента интенсивности напряжений K_0 , который одновременно определяет асимптотику раскрытия у вершины [4]:

$$\lim_{|X| \rightarrow L} W |\sqrt{L - |X|} = \sqrt{2/\pi} K_0 / D \quad (1.3)$$

Замыкает систему уравнений выражение для объема Ω текучего материала в трещине, приходящегося на единицу длины в направлении однородности, перпендикулярном плоскости задачи

$$\Omega = 2 \int_{-L}^L W(X) dX \quad (1.4)$$

Каждому заданному значению Ω соответствует определенная длина, профиль раскрытия трещины и распределение давления, которые должны находиться из решения системы уравнений (1.1) — (1.4).

Задачу удобно рассматривать в безразмерных переменных. В качестве масштабов для давления P , раскрытия W и «плоского» объема Ω выберем соответственно множители $P_* = \sqrt{\tau D}$, $W_* = L \sqrt{\tau/D}$, $\Omega_* = 2LW_*$.

Продольные координаты обезразмерим следующим образом:

$$X = L \sin \varphi, \quad X_\alpha = L \sin \alpha, \quad L_+ = L (1 - \sin \alpha), \quad L_- = L (1 + \sin \alpha)$$

Здесь φ — новая переменная, заменяющая X , $\varphi = \alpha$ — положение источника, L_+ и L_- — размеры правого и левого плеча соответственно.

Переход к другим безразмерным переменным, которые будем обозначать соответствующими строчными буквами, осуществим при помощи формул

$$P = P_* p, \quad P_g = P_* p_g, \quad P_{\pm} = P_* p_{\pm}, \quad W = W_* v \cos \varphi, \quad \Omega = \Omega_* \omega$$

$$L = L_* l, \quad L_{\pm} = L_* l_{\pm}, \quad L_* = K_0^2 (\pi \tau D)^{-1}, \quad \beta = B L_* P_*^{-1}$$

Здесь P_{\pm} означают давление заполнителя у правой и левой вершин соответственно, β — безразмерная характеристика наклона прямой внешнего давления.

С учетом вклада от внешней нагрузки формула (1.1) в безразмерных переменных преобразуется к виду

$$v(\varphi) = p_- - p_g - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p'(\varphi) U(\varphi, \varphi) d\varphi - \beta l (1/2 \sin \varphi - \sin \alpha)$$

$$U(\varphi, \varphi) = -\frac{1}{2} + \varphi/\pi + \frac{\sin \varphi - \sin \alpha}{2\pi \cos \varphi} \ln \frac{1 + \cos(\varphi + \alpha)}{1 - \cos(\varphi - \alpha)}$$

Здесь для удобства вместо p введена производная от давления по угловой переменной $p'(\varphi)$.

Целью дальнейших преобразований является сведение задачи к интегральному уравнению относительно переменной v . Для этого сначала исключим при помощи обезразмеренного варианта уравнения (1.2):

$$p'(\varphi) = \begin{cases} v^{-1}(\varphi), & \varphi < \alpha \\ -v^{-1}(\varphi), & \varphi \geq \alpha \end{cases} \quad (1.5)$$

производную от давления. Обозначая

$$f = \int_{\alpha}^{\alpha} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}, \quad \delta p = p_g - p_-$$

получим

$$-v(\varphi) = \delta p + \beta l (1/2 \sin \varphi - \sin \alpha) + \int_{\alpha}^{\alpha} U(\varphi, \varphi) v^{-1}(\varphi) d\varphi$$

Обозначим v_+ и v_- пределы $v(\varphi)$ при $\varphi = \pm\pi/2$. С одной стороны, из выписанного уравнения вытекает, что

$$v_{\pm} = \pi^{-1} \int_{\alpha}^{\alpha} (\pi/2 - \varphi \pm \cos \varphi) v^{-1}(\varphi) d\varphi - \delta p - \beta l (\pm 1/2 - \sin \alpha)$$

С другой стороны, эти пределы непосредственно выражаются через длину трещины, если обезразмерить асимптотическое условие (1.3) $v_+ = v_- = 1/\sqrt{l}$.

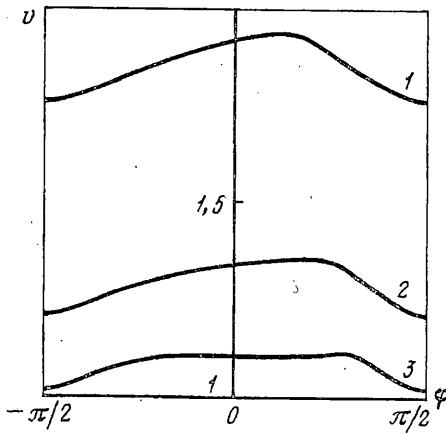
Таким образом, имеем четыре уравнения, позволяющие найти интегральные представления для параметров v_{\pm} , δp , l . Используя эти представления, предыдущее соотношение для v приведем к требуемому виду интегрального уравнения относительно v

$$v(\varphi) = \int_{\alpha}^{\alpha} G(\varphi, \varphi) v^{-1}(\varphi) d\varphi + \sqrt{1/2\pi\beta} \left[\int_{\alpha}^{\alpha} \cos \varphi v^{-1}(\varphi) d\varphi \right]^{-1/2} \quad (1.6)$$

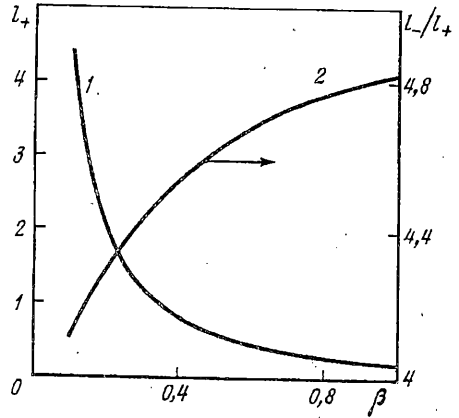
$$\pi G(\varphi, \varphi) = -\sin \varphi \cos \varphi + \frac{\sin \varphi - \sin \alpha}{2 \cos \varphi} \ln \frac{1 + \cos(\varphi + \alpha)}{1 - \cos(\varphi - \alpha)}$$

Это уравнение существенно проще исходной системы, в частности, ядро G не содержит особенностей. Однако можно показать, что стандартная итерационная процедура расходится, и необходимо, подобно тому как это сделано в [3], специальным образом модифицировать оператор. С этой целью введем обозначения

$$G_0 = v(\varphi) \int_{\alpha}^{\alpha} G(\varphi, \varphi) v^{-1}(\varphi) d\varphi, \quad g_0 = v(\varphi) \int_{\alpha}^{\alpha} (\cos \varphi) v^{-1}(\varphi) d\varphi$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Умножая (1.6) на $v(\varphi)$ и извлекая корень, можем записать

$$v = [G_0 + (1/2\pi\beta v g_0)^{1/2}]^{1/2}$$

При такой модификации уравнения итерации сходятся. Решение зависит от двух параметров α и β . После нахождения v остальные переменные находятся обычным интегрированием. При этом, в частности, устанавливается соответствие между значениями α и ω , так что без затруднений решение можно построить и как функцию от параметра ω .

На фиг. 1 изображены кривые 1, 2, 3 для функции $v(\varphi)$, которые соответствуют последовательно возрастающим значениям α : 0.5; 0.8; 1 при $\beta = 1$.

Расчет приводит к конечности глубины проникания трещины в область повышенного давления. На фиг. 2 представлена зависимость максимальной длины l_+ правого плеча от β (кривая 1). Кривая 2 на этой фигуре иллюстрирует степень анизотропии l_-/l_+ при максимуме l_+ в зависимости от значения β .

2. Рассмотрим еще один пример несимметричного роста трещины. Пусть неоднородные начальные напряжения отсутствуют, а несимметрия обусловлена тем, что рост правого плеча трещины прекратился вследствие локального повышения прочности среды. Для простоты будем предполагать, что возможное изменение упругих свойств локальной неоднородности вследствие ее небольших размеров несущественно скажется на профиле раскрытия, который по-прежнему можно рассчитывать на основе формулы (1.1).

В приближенной формулировке эта задача на начальной фазе развития трещины была рассмотрена в¹. Ниже дается ее точный анализ.

Обозначим X_+ и X_- — координаты границ заполнителя на правом и левом плече, φ_+ и φ_- — соответствующие значения угловой переменной $X_{\pm} = L \sin \varphi_{\pm}$.

Масштабные множители оставим прежними, как в п. 1. На левом плече распределение давления, согласно (1.5), описывается выражением

$$p(\varphi) = \int_{\varphi_-}^{\varphi} v^{-1}(\varphi) d\varphi, \quad \varphi < \alpha$$

¹ Алексеев О. П. Точные решения некоторых задач механики управляемого разрыва горных пород. Канд. дисс. Новосибирск, 1989, 133 с.

а справа от источника — формулой

$$p(\varphi) = \int_{\varphi_-}^{\alpha} v^{-1}(\phi) d\phi - \int_{\alpha}^{\varphi} v^{-1}(\phi) d\phi, \quad \varphi \geq \alpha \quad (2.1)$$

При такой записи давление на левой границе зоны заполнения автоматически обращается в нуль. На правой границе при неполном проникновении давление также отсутствует, т. е. справедливо равенство

$$\int_{\varphi_-}^{\alpha} v^{-1}(\phi) d\phi = \int_{\alpha}^{\varphi_+} v^{-1}(\phi) d\phi \quad (2.2)$$

Вследствие разной концентрации напряжений асимптотические соотношения теперь разные у подвижной и неподвижной вершин трещины

$$v_- = K_0 / \sqrt{\pi \tau DL}, \quad v_+ = K_+ / \sqrt{\pi \tau DL} \quad (2.3)$$

Здесь коэффициент интенсивности напряжений K_+ — переменная величина, характеризующая рост концентрации напряжений у фиксированной вершины, а $K_0 = K_-$ — константа однородной среды.

Переходя к безразмерной длине l , предыдущие соотношения можно привести к форме

$$l = v_-^2, \quad v_+ / v_- = K_+ / K_0 \quad (2.4)$$

Интегральное уравнение для v в данном случае упрощается и принимает вид

$$v(\varphi) = - \int_{\alpha} U(\varphi, \phi) v^{-1}(\phi) d\phi \quad (2.5)$$

Задачу нужно решать при условии неподвижности правого края трещины, начиная с момента, когда длина трещины достигла некоторого значения $2l_0$. В безразмерных переменных это условие записывается в виде

$$(1 - \sin \alpha) l = l_0 = \text{const} \quad (2.6)$$

Перейдем к анализу уравнения (2.5). Формально решение зависит от трех параметров α и φ_{\pm} и в принципе существует при их произвольных значениях. Однако при этом, вообще говоря, не будут удовлетворяться ранее сформулированные условия: равенство нулю давления на правой границе φ_+ зоны заполнения — условие (2.2), а также условие (2.6) — неподвижность правого края трещины. Наличие этих условий означает, что на самом деле независимо можно задавать только один параметр из трех, например φ_- .

Следует подчеркнуть, что условие (2.2) разрешимо не при любом значении φ_- . По мере заполнения трещины развитие может дойти до стадии полного проникания заполнителя в правое плечо, т. е. до стадии ненулевого давления p_+ . Согласно (2.1), его величина равна

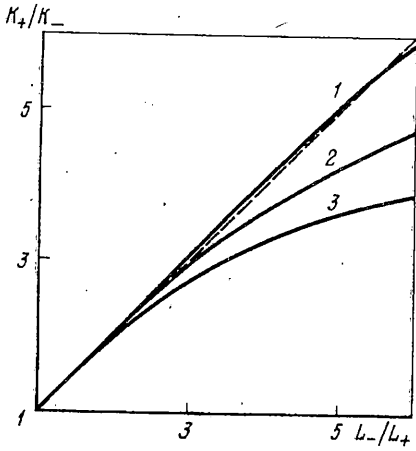
$$p_+ = \int_{\alpha} v^{-1}(\phi) d\phi$$

Таким образом, на этой стадии условие (2.2) не выполняется, но в нем и нет необходимости, так как один из параметров определен, а именно $\varphi_+ = \pi/2$.

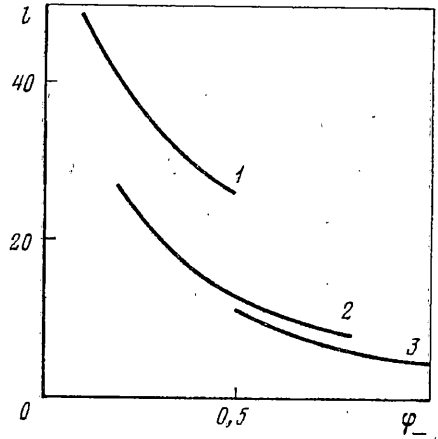
Для сходимости стандартной итерационной схемы вместо (2.5) нужно рассматривать, как и выше, модифицированное уравнение, которое в данном случае имеет вид

$$v = \sqrt{U_0}, \quad U_0 = -v(\varphi) \int_{\alpha} U(\varphi, \phi) v^{-1}(\phi) d\phi$$

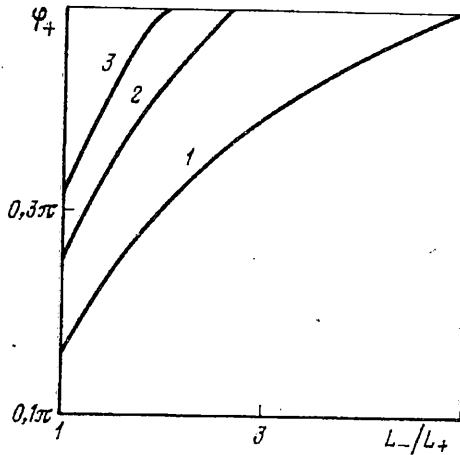
После получения решения в безразмерных переменных для расчета размерных величин удобно использовать постоянные масштабные множители, не зависящие



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

от L . Их можно получить из масштабных параметров «со звездочкой» заменой L на L_* . Во избежание недоразумений введем для них специальные обозначения $P_c = P_*$, $W_c = L_*(\tau/D)^{1/2}$, $\Omega_c = 2L_*^2(\tau/D)^{1/2}$. С их помощью выражения для размерных переменных записываются в виде

$$P = P_c p, \quad W = W_c l v \cos \varphi, \quad \Omega = \Omega_c l^2 \omega$$

$$L = L_* l, \quad X = L_* l \sin \varphi, \quad L_{\pm} = L_* l (1 \mp \sin \alpha)$$

Если в качестве параметра состояния выбрать, например, Ω , то величина формального параметра φ_- устанавливается из соотношения

$$\Omega/\Omega_c = l^2(\varphi_-) \omega(\varphi_-), \quad \omega(\varphi_-) = \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} v \cos^2 \phi \, d\phi$$

Приводимые кривые иллюстрируют особенности задачи. Основным интересом представляет отношение концентраций напряжений K_+/K_- у противоположных вершин трещины в зависимости от степени асимметрии L_-/L_+ . Оно приведено на фиг. 3 для разных начальных симметричных состояний трещины в момент встречи с локальной неоднородностью. Начальное состояние характеризуется значениями параметра φ_0 : 0,5; 0,8; 1 (кривые 1, 2, 3). Каждая из кривых имеет

начальный участок, близкий к биссектрисе первого квадранта, но не совпадающий с ней. Затем кривая становится более пологой. Размер начального участка больше при больших начальных размерах симметричной трещины (малые φ_0). Иными словами, более развитая трещина ведет себя устойчивее по отношению к локальным повышениям прочности среды, если под устойчивостью понимать стремление к сохранению симметрии. Имеется в виду, что при одинаковой степени асимметрии, если только она находится уже за пределами начального участка меньшей трещины, концентрация напряжений на остановившейся кромке развитой трещины растет быстрее, чем у трещины меньших размеров. Поэтому развитая трещина способна преодолеть локальный барьер при меньшей асимметрии.

Как видно из фиг. 3, на начальном участке приближенный закон вида $K_+L_+ \cong K_-L_- \cong \text{const}$ удовлетворяется с хорошей точностью. Чтобы понять его природу, обратимся к параметрам v_{\pm} , которые характеризуют интенсивность раскрытия трещины в малой окрестности вершин. Величина каждого параметра растет пропорционально «углу расклинивания» W_0/L_{\pm} соответствующего плеча; где $2W_0$ — раскрытие у источника (в частности, пропорциональность оказывается точной при однородном давлении в симметрично растущей трещине). При неполном проникании оба коэффициента пропорциональности не будут слишком отличаться друг от друга, и можно ожидать, что приближенно $v_+/v_- \cong L_-/L_+$.

Сравнивая со вторым соотношением (2.4), приходим к требуемому результату.

Перейдем к рассмотрению других свойств решения. На фиг. 4 изображены зависимости $l(\varphi_-)$ для различных начальных степеней заполнения φ_0 . Первая кривая соответствует $\varphi_0 = 0,5$; вторая — $\varphi_0 = 0,8$; наконец, третья — $\varphi_0 = 1$.

На фиг. 5 представлены зависимости степени заполнения φ_+ неподвижного плеча трещины от величины асимметрии L_-/L_+ при тех же значениях φ_0 . Из сравнения кривых фиг. 3 и фиг. 5 нетрудно заметить, что начальный участок заканчивается в момент достижения текучим материалом кромки правого плеча.

Заполнителю с большим сопротивлением труднее проникнуть в кромку. Поэтому среди трещин одной длины более устойчивыми к искажениям симметрии оказываются трещины, заполняемые менее текучим материалом.

Данный пример позволяет по существу выявить механизм саморегулировки формы трещины. После остановки правой вершины в результате встречи с локальной неоднородностью повышение концентрации напряжений на ней в конце концов достигнет локального критического значения. После преодоления неоднородности прочность снова окажется стандартной, в то время как концентрация напряжений здесь останется повышенной. Поэтому в дальнейшем преимущественно будет развиваться более короткое плечо, пока трещина не станет симметричной. Концентрация напряжений на этом плече соответственно опустится до характеристического значения для данной среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3—41.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтяного пласта. // ПИММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 475—486.
3. Алексеенко О. П., Вайсман А. М. Развитие круговой трещины с идеально пластическим заполнителем. // ПИММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 137—143.
4. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.