

УДК 533.6.013.42

© 1995 г. А. Г. ГОРШКОВ, Н. И. ДРОБЫШЕВСКИЙ

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ЗАДАЧЕ О ПРОНИКНОВЕНИИ ТЕЛ В ЖИДКОСТЬ

Решение задачи проникания тел в жидкость связано со значительными математическими трудностями, которые вызваны необходимостью вычисления в процессе погружения движения контактных и свободных поверхностей [1]. При этом только применение численных методов позволяет достаточно точно учесть движение этих поверхностей, причем жидкость считается как правило сжимаемой, что позволяет получить приемлемые решения только при достаточно больших скоростях входа (для сферы и цилиндра порядка 50 м/с и больше). При исследовании проникания затупленных тел (цилиндр, сфера и т. д.) в воду со скоростями входа порядка нескольких м/с используется, как правило, метод Вагнера для несжимаемой жидкости [2], в котором встречное движение жидкости учитывается в упрощенной форме.

В публикуемой работе рассматривается плоская задача погружения бесконечно длинного затупленного тела боковой поверхностью в несжимаемую жидкость (фиг. 1). Решение задачи находится при помощи метода граничных элементов, который позволяет, с одной стороны, свести задачу к одномерной, с другой стороны — учесть все особенности движения свободных и контактных поверхностей.

1. Движение жидкости рассматривается в неподвижной системе координат  $x_1, O x_2$ . Ось  $x_1$  направлена по первоначально невозмущенной поверхности жидкости, ось  $x_2$  вертикально вниз, нормально к свободной поверхности жидкости (фиг. 1). Считается, что движение будет потенциальным и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial^2 \varphi / \partial x_1^2 + \partial^2 \varphi / \partial x_2^2 = 0 \quad (1.1)$$

На смоченной поверхности тела  $S_2$  и на бесконечности должны выполняться следующие условия:

$$\partial \varphi / \partial n |_{S_2} = w \cos \beta, \quad (\text{grad } \varphi)_{\infty} = 0 \quad (1.2)$$

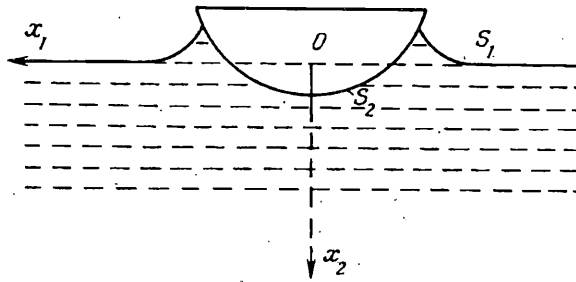
где  $w \cos \beta$  — проекция на нормаль  $n$  скорости погружения тела  $w$ ,  $\beta$  — угол между нормалью к поверхности жидкости и осью  $x_2$ .

На свободной поверхности  $S_1$  должны выполняться динамические и кинематические граничные условия. Динамическое условие сводится к заданию нулевого давления на свободной поверхности, что на основании интеграла Коши—Лагранжа дает следующую зависимость:

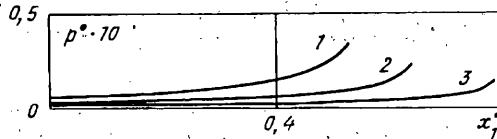
$$\partial \varphi / \partial t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = 0 \quad (1.3)$$

Представляя уравнение свободной поверхности в виде  $x_2 = \eta(x, t)$ , для кинематического условия получим следующее выражение:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где  $\partial\varphi/\partial x_1 = v_1$ ,  $\partial\varphi/\partial x_2 = v_2$  — составляющие вектора скорости. После несложных преобразований получим

$$\partial\eta/\partial t = v_2 - v_1 \operatorname{tg} \beta \quad (1.5)$$

$$\partial\eta/\partial t = (v_2 \cos \beta - v_1 \sin \beta) / \cos \beta \quad (1.6)$$

$$\partial\eta/\partial t = -v_n / \cos \beta, \quad v_n = \partial\varphi/\partial n \quad (1.7)$$

где  $v_n$  — нормальная составляющая скорости на границе жидкости.

Для нахождения скорости погружения тела воспользуемся следующим соотношением:

$$m \frac{\partial w}{\partial t} = - \int_{-x_*}^{x_*} p dx \quad (1.8)$$

где  $m$  — масса единицы длины погружающегося тела,  $x_*$  — полуширина смоченной поверхности тела.

Давление определяется на основании интеграла Коши—Лагранжа

$$p = -\rho \left[ \partial\varphi/\partial t + \frac{1}{2} [\nabla\varphi]^2 \right] \quad (1.9)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости.

Начальные условия задаются в следующем виде:

$$\varphi|_{t=0} = 0, \quad \eta|_{t=0} = 0 \quad (1.10)$$

2. Решение задачи (1.1)—(1.10) проводится с помощью комбинации разностной схемы типа «предиктор-корректор» [3] (при расчете движения свободных поверхностей и значений потенциала на них) и метода граничных элементов (для решения уравнения Лапласа (1.1) в области жидкости, определенной заново на каждом временном шаге). На первом этапе (предиктор) находим форму поверхности и значение потенциала на ней в промежуточном шаге по времени

$$\frac{\varphi^{k+1/2} - \varphi^k}{\Delta t/2} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi^k)^2 = 0$$

$$\frac{\eta^{k+1/2} - \eta^k}{\Delta t/2} = - \frac{\partial\varphi^k}{\partial n} \frac{1}{\cos \beta^k} \quad (2.1)$$

где  $\Delta t$  — значение шага по времени,  $k$  — номер шага по времени.

Ширина смоченной поверхности тела определяется путем нахождения точки пересечения новых положений поверхности тела и свободной поверхности жидкости. Значение  $\partial\varphi/\partial n$  на поверхности тела  $S_2$  находится из условия (1.2). Затем, решая для полученной расчетной области методом граничных элементов уравнение Лапласа, находим недостающие значения потенциалов  $\varphi$  и потоков  $\partial\varphi/\partial n$ . Далее аналогичным образом выполняется второй этап (корректор) шага по времени.

$$\frac{\varphi^{k+1} - \varphi^k}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi^{k+1/2})^2 = 0$$

$$\frac{\eta^{k+1} - \eta^k}{\Delta t} = - \frac{\partial\varphi^{k+1/2}}{\partial n} \frac{1}{\cos\beta^{k+1/2}} \quad (2.2)$$

и решается для вновь полученной конфигурации уравнение Лапласа методом граничных элементов. Новая скорость погружения тела находится на каждом шаге по времени, используя соотношения (1.8), (1.9).

3. Рассмотрим особенности применения метода граничных элементов к решению уравнения Лапласа в области  $\Omega$ :

$$\Delta\varphi(x) = 0 \quad (3.1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\varphi(x)|_{s_1} = \bar{\varphi}(x), \quad q(x)|_{s_2} = (\partial\varphi(x)/\partial n)|_{s_2} = \bar{q}(x) \quad (3.2)$$

где  $n$  — нормаль к поверхности жидкости,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{q}$  — известные функции.

Для решения данной задачи воспользуемся прямой формулировкой метода граничных элементов [4].

Ошибка, получаемую за счет замены функций приближенными представителями, можно свести к минимуму, если в соответствии с методом взвешенных невязок записать следующее соотношение:

$$\int_{\Omega} \Delta\varphi(x) \varphi^*(\xi, x) d\Omega(x) = \int_{s_2} [q(x) - \bar{q}(x)] \varphi^*(\xi, x) dS(x) -$$

$$- \int_{s_1} [q(x) - \bar{q}(x)] \varphi^*(\xi, x) dS(x), \quad q^*(\xi, x) = \frac{\partial\varphi^*(\xi, x)}{\partial n(x)} \quad (3.3)$$

где  $\varphi^*(\xi, x)$  — весовая функция. Дважды интегрируя по частям, получим

$$\int_{\Omega} \Delta\varphi^*(\xi, x) \varphi(x) d\Omega(x) = - \int_{s_1} q(x) \varphi^*(\xi, x) dS(x) - \int_{s_2} \bar{q}(x) \varphi^*(\xi, x) dS(x) +$$

$$+ \int_{s_1} \varphi(x) q^*(\xi, x) dS(x) + \int_{s_2} \bar{\varphi}(x) q^*(\xi, x) dS(x) \quad (3.4)$$

Предположение о том, что функция  $\varphi^*$  является фундаментальным решением уравнения Лапласа дает

$$\Delta\varphi^*(\xi, x) = -2\pi\delta(\xi, x) \quad (3.5)$$

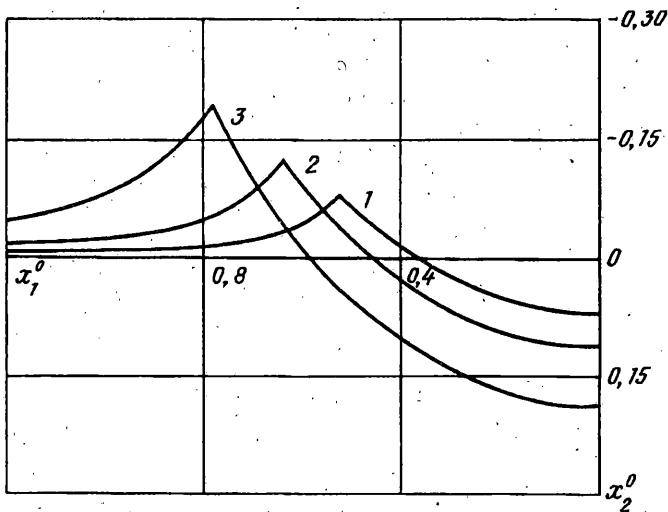
где  $\delta(\xi, x)$  — дельта-функция Дирака.

Для плоского случая фундаментальное решение будет

$$\varphi^*(\xi, x) = \ln(1/r)/(2\pi), \quad r = [(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2]^{1/2}$$

Используя равенства (3.4), (3.5), получим

$$c(\xi) \varphi(\xi) + \int_S \varphi(x) q^*(\xi, x) dS(x) = \int_S q(x) \varphi^*(\xi, x) dS(x) \quad (3.6)$$



Фиг. 3

Граница разбивается на ряд прямолинейных элементов, внутри которых потенциал и его нормальная производная считаются постоянными и равными значению в узле (середине) элемента (так называемые постоянные элементы); в этом случае  $c(\xi) = 1/2$ . Тогда дискретная форма представления уравнения для постоянных элементов будет иметь вид

$$\frac{1}{2} \varphi + \sum_{j=1}^N \left( \int_{s_j} q^* dS \right) \varphi_j = \sum_{j=1}^N \left( \int_{s_j} \varphi^* dS \right) q_j \quad (3.7)$$

Представленные интегралы могут быть легко вычислены, что позволит преобразовать систему уравнений к матричной форме. Сгруппировав известные и неизвестные значения потенциалов и их нормальных производных в отдельные вектора, получим систему уравнений

$$\|A\| Y = F \quad (3.8)$$

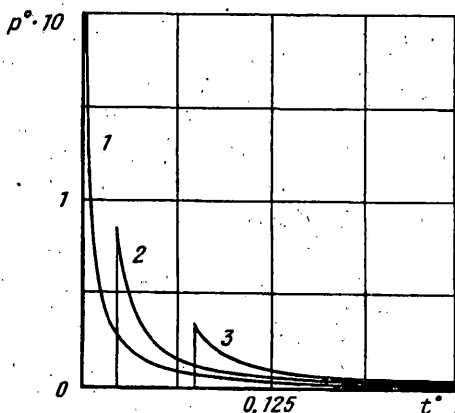
где  $Y$  — вектор, компонентами которого являются неизвестные значения функций  $\varphi$  и  $q$ . Отметим, что матрица  $\|A\|$  является несимметричной полностью заполненной матрицей порядка  $N$ .

После того, как система уравнений (3.8) будет решена, станут известны все значения потенциала и потока на границе, что дает возможность вычислить значения потенциалов, потоков и давлений в произвольной точке.

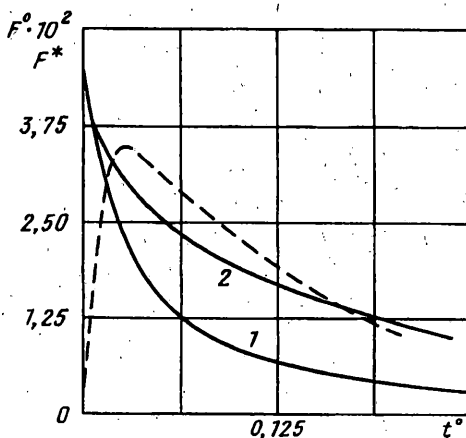
Таким образом, решение задачи сводится к последовательному пересчету конфигурации границ и решению методом граничных элементов уравнения Лапласа. Граничная поверхность разбивается на интервалы, сгущающиеся с двух сторон точки пересечения свободной и контактной поверхностей, причем на каждом временном шаге гранично-элементная сетка перестраивается заново.

4. В качестве тестового примера рассмотрим погружение в воду (несжимаемую жидкость) бесконечно длинного цилиндрического тела. Образующая цилиндра в процессе погружения параллельна первоначально невозмущенной поверхности жидкости. Начальная скорость входа цилиндра в воду бралась равной  $w_0 = 10$  м/с, масса тела на единицу длины равна  $m^* = m/(\rho R^2) = 1,0$  ( $R$  — радиус цилиндра).

На фиг. 2, 3 для моментов времени  $t^* = tw_0/R = 0,081$  (кривые 1),  $t^* = 0,136$  (кривые 2),  $t^* = 0,246$  (кривые 3) приведены распределения давления  $p^* = p/(\rho c w_0)$  по поверхности жидкости и формы поверхности жидкости



Фиг. 4



Фиг. 5

( $x_1^\circ = x_1/R$ ,  $x_2^\circ = x_2/R$ ,  $c$  — скорость звука в сжимаемой жидкости). Зависимости давления от времени в точках контактной поверхности  $x_1^\circ = 0$  (кривая 1),  $x_1^\circ = 0,3$  (кривая 2),  $x_1^\circ = 0,5$  (кривая 3) приведены на фиг. 4. На фиг. 5 представлена зависимость от времени силы  $F^\circ = F/(R\rho c w_0)$ , действующей на погружающееся тело (кривая 1); кривая 2 соответствует  $F^\circ = F^*$  при входе в жидкость с постоянной скоростью  $w = 100$  м/с (для этого случая приводятся также результаты расчета из [5], полученные методом конечных разностей с учетом сжимаемости жидкости — штриховая кривая).

Отметим высокую эффективность предложенной методики по сравнению с конечно-разностными или конечно-элементными методами, так как на каждом шаге по времени решается только одномерная задача, возможность простой перестройки сетки в каждый момент времени (вследствие её одномерности), что позволяет всегда наиболее точно (наименьшими элементами) описать зону пересечения свободной и контактной поверхностей, а также отсутствие осцилляций, устранение которых вызывает наибольшие затруднения при решении подобных задач разностными или конечно-элементными методами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00535).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вестяк А. В., Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техники. Механика деф. твердого тела. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 15. С. 69—148.
2. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Удар и погружение. Л.: Судостроение, 1976. 200 с.
3. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987. 286 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 527 с.
5. Дробышевский Н. И. Наклонный вход цилиндрических тел в жидкость // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 92—98.

Москва

Поступила в редакцию  
6.IV.1995