

УДК 539.388

© 1995 г. А. Б. ЕФИМОВ, С. Н. РОМАНЮК, Е. Н. ЧУМАЧЕНКО

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ТРЕНИЯ
В ПРОЦЕССАХ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

В процессах обработки металлов давлением (ОМД) трение является едва ли не определяющим фактором. Трение в значительной мере обуславливает усилия контактирования, качество изделия и прежде всего его поверхности, силовые и экономические показатели процесса и, как правило, что наиболее важно, надежность и ресурс технологического оборудования [1].

Удельная сила трения — это составляющая вектора напряжений, касательная к поверхности контактирования. Вектор напряжений как всегда в механике сплошной среды (МСС) вводится не для реального физического объекта, имеющего атомарную структуру, а для некоторой идеализации — континуума, которая должна быть оправданной с точки зрения возможности проведения осреднения по реальным ансамблям неоднородностей (атомы, молекулы, кристаллы, зерна, ...) среды. Выбор модели поверхности тела определяет уровень, масштаб модели, после чего в качестве силы трения можно рассматривать составляющую вектора напряжения касательную к поверхности в точке. В свою очередь частицы среды, формирующие окрестность точки модельной поверхности, можно рассматривать как новый континуум и вводя другой масштаб осреднения получать модель поверхности другого уровня в окрестности исходной точки со своим вектором напряжений, удельной силой трения и другими параметрами.

К определению удельной силы трения можно подходить экспериментально и теоретически, исходя из физики взаимодействия трущихся поверхностей. При последнем подходе задаются или определяются условия контактирования: механические свойства пары трения (в том числе поверхностных слоев), форма, рельеф поверхности, волнистость, шероховатость), свойства смазочного слоя (если есть такой), давление или величина сближения поверхностей, скорость относительного скольжения контактирующих поверхностей и т. п. Детализация условий контактирования в принципе ведет к более точному описанию процесса и определению удельной силы трения, хотя и связано со значительными теоретическими и экспериментальными трудностями. Перенос теоретических результатов на конкретную пару трения технологического процесса, как правило, неэффективен вследствие неопределенности в описании условий контактирования. Поэтому практический путь определения параметров трения состоит в выделении интегральных характеристик взаимодействующих поверхностей и определении их из некоторых модельных представлений.

Проблеме описания закономерностей трения в процессах ОМД и определения параметров принятых закономерностей уделяется большое внимание отечественными и зарубежными исследователями [2—15]. Поведение смазочного слоя рассматривается в работах [16—19] и иных.

Ниже приводится краткий обзор основных феноменологических закономерностей, описывающих силу трения на контактирующих поверхностях, постановка задачи контактного взаимодействия с реологическими соотношениями и трением весьма общего вида, а также аппроксимирующие ее задачи применительно к материалам с ярко выраженной скоростной чувствительностью. Для таким образом конкретизированной постановки проводится анализ ее корректности, исследуется сходимость конечномерных приближений к решению бесконечномерной задачи. Приводится одна из возможных постановок обратной задачи определения параметров закона трения из модельных представлений и наблюдений реального процесса ОМД, численные результаты ее решения. Использование предлагаемого критерия выбора закона трения проиллюстрировано примерами численных расчетов.

1. Закономерности, описывающие силу трения на контактирующих поверхностях. Простейшие классические закономерности для удельной силы трения

(законы Амонтона и Зибеля соответственно):

$$\tau = kp \quad (1.1)$$

$$\tau = \mu^* \tau_s \quad (1.2)$$

где p — нормальное давление, τ_s — сопротивление срезу, k, μ^* — коэффициент и показатель трения, описывают преимущественно случаи соответственно малых и больших нормальных давлений. Закон Амонтона (1.1) имеет современную физическую трактовку и обобщения, связанные с понятием фактической площади контакта S_f , вводимой помимо номинальной или кажущейся площади контакта S (той, что имела бы место для идеально гладких поверхностей без волнистости и шероховатости)

$$\tau \sim S_f/S \quad (1.3)$$

Если отождествить трение с процессом среза материала по фактической площади, как это делают Боуден, Тейбор, Бриджмен, Елифанов и другие сторонники теории сопротивления срезу поверхностных слоев, то удельная сила трения согласно закону Зибеля (1.2) будет

$$\tau = (S_f/S) \tau_{ss} \quad (1.4)$$

где τ_{ss} — сопротивление срезу поверхностного пластифицированного слоя. Для определения S_f привлекаются механические, математические модели шероховатых поверхностей. Приведем здесь формулу Бартенева — Лаврентьева [2] для упруго контактирующих шероховатых поверхностей

$$S_f/S = 1 - \exp(-\beta p/E) \quad (1.5)$$

где β — коэффициент, зависящий от качества поверхности, E — модуль Юнга, и формулу Макушка [8] для пластически контактирующих шероховатых поверхностей

$$S_f/S = 1 - \exp(-0,5p/\tau_{ds}) \quad (1.6)$$

где τ_{ds} — сопротивление срезу в «очаге деформации». В [5] предлагается формула

$$\tau = k_s (1 - \exp(-1,25p/\sigma_{st})) \tau_{ss} \quad (1.7)$$

рассматриваемая как одна из возможных аппроксимаций экспериментальных зависимостей $\tau/\tau_{ss} = \varphi(p/\sigma_{st}, k_s)$, в которой k_s — константа поверхности, σ_{st} — сопротивление деформации пограничного слоя ($\tau_{ss} = 0,58\sigma_{st}$).

Законы Амонтона и Зибеля позволяют учесть один фактор — нормальное давление и сопротивление срезу соответственно. Тем самым формулы типа (1.7) могут рассматриваться как обобщения законов Амонтона (1.1) и Зибеля (1.2). При больших нормальных давлениях p формула (1.7) асимптотически эквивалентна закону Зибеля, при малых p — закону Амонтона.

В ряде случаев наблюдается ярко выраженная зависимость силы трения от скорости скольжения, что связывают обычно с жидкостным характером трения. Классическим законом, выражающим такую зависимость является закон Ньютона

$$\tau = \eta v_s/h \quad (1.8)$$

где η — динамическая вязкость смазки, h — толщина смазочной пленки, v_s — скорость скольжения поверхностей друг относительно друга. Выше отмечалась роль учета фактической площади контактирования. На основании соображений относительно разбиения кажущейся площади контакта S на подобласти, в которых преобладает тот или иной характер трения (сухое, жидкостное), можем построить комбинированный закон граничного трения $\tau = \tau(p, \tau_s, v_s)$. Можно предположить,

что влияние скорости скольжения тем значительнее, чем ближе режим трения к жидкостному. Роль меры близости условий трения к граничному режиму выполняет коэффициент непрерывности смазочного слоя, равный отношению части площади номинального контакта, покрытого толстым слоем смазки к номинальной площади контакта. Этот показатель имеет достаточно четкий физический смысл и может быть определен из эксперимента. Введение такого показателя при описании граничного трения видимо впервые было использовано Боуденом и Тейбором. Позднее это отмечалось в [6, 11], такой показатель введен в формулу трения в [7]. Формула этого типа с учетом (1.7), (1.8) имеет вид

$$\tau = (1 - \gamma) k_s (1 - \exp(-1,25p/\sigma_{st})) \tau_{ss} + \gamma \frac{\eta}{h} v, \quad (1.9)$$

где γ — коэффициент непрерывности смазочного слоя.

При практическом использовании законов трения возникает проблема определения коэффициентов и констант, входящих в них. В ряде случаев в литературе приводятся рекомендации по их выбору (см., например, [4, 5]). Возможен и другой путь — определение их на основании простейших экспериментов по выдавливанию образцов простой формы. Описанию такого подхода посвящена публикуемая работа. При этом принимаем нижеследующие допущения. Пренебрегаем масштабным фактором (различием в характеристиках поверхности — волнистости, шероховатости заготовки и образца) и возможным изменением условий смазки на различных участках поверхности, а также при переходе с образца на заготовку (наличие или отсутствие гидродинамического режима). Полагаем, как обычно делается в теории ОМД, что коэффициенты, входящие в формулы трения являются инвариантами относительно протекающих процессов. Тем самым предполагаем по существу, что константы определяются в основном свойствами смазки. Это позволяет вместо определения коэффициентов трения для реальной заготовки рассмотреть задачу определения коэффициентов при экструзии простейшего образа цилиндрической формы. Любой реальный процесс характеризуется некоторым диапазоном скоростей и давлений. Скорость выдавливания берем такой, чтобы скорости скольжения и давление лежали в диапазонах, характерных для процесса деформирования реальной заготовки.

2. Постановка задачи контактного взаимодействия. Обратимся к математической модели характерного процесса обработки металлов давлением. Введем обозначения. Через $x = (x^1, x^2, x^3)$ обозначим аффинную ортонормированную Эйлерову (пространственную) систему координат, в которой символы Кристоффеля обращаются в нуль, ковариантные и контравариантные компоненты векторов и тензоров совпадают, что позволяет там, где используется компонентная форма записи, не следить за расположением индексов. Через $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ обозначим материальную систему координат, связанную с заготовкой.

Требуется найти закон движения

$$x = x(\xi, t) \quad (2.1)$$

который представляет собой решение начальной задачи

$$dx(\xi, t)/dt = v(x(\xi, t), t), \quad x(\xi, t)|_{t=t_0} = x_{t_0}(\xi) \quad (2.2)$$

в которой начальная конфигурация $x_{t_0}(\xi)$ считается известной, а поля скоростей $v(x, t)$ во всех текущих конфигурациях определяются в результате решения следующей краевой задачи. Считаем, что движение происходит таким образом, что выполняются условия квазистатического равновесия (массовыми и инерциальными слагаемыми ввиду их малости пренебрегаем)

$$\sigma_{ij}(x(\xi, t), t) = 0 \quad (2.3)$$

а также определяющие модель среды соотношения. Если принять принцип де-

терминизма и принцип локальности действия (имеется в виду аксиоматика Нолла [20]) и ограничиться рассмотрением класса простых материалов, напряжения σ_{ij} в которых определяются предысторией тензора дисторсии $\partial x / \partial \xi$, то можно записать

$$\sigma_{ij}(x(\xi, t), t) = \Phi_{ij}^{\infty} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, t-s), \xi, t \right) \quad (2.4)$$

где Φ_{ij} — некоторые функционалы. Обозначим через $\Omega(t)$ область пространства, занимаемую заготовкой в момент времени t ($\partial\Omega(t)$ — её граница). Типичное для рассматриваемой задачи разбиение границы $\partial\Omega(t) = \Gamma(t)$ будет

$$\Gamma(t) = \Gamma_v(t) \cup \Gamma_\sigma(t) \cup \Gamma_s(t) \cup \Gamma_k^\circ(t) \quad (2.5)$$

где Γ_k° — область фактического контакта заготовки с препятствием (штампом); на Γ_v и Γ_σ заданы вектор скорости и вектор напряжения соответственно

$$v_i(x, t) = U_i(x, t), \quad x \in \Gamma_v(t) \quad (2.6)$$

$$T_i(x, t) = P_i(x, t), \quad x \in \Gamma_\sigma(t) \quad (2.7)$$

где Γ_s — свободная поверхность. Вектор скорости в точках границы Γ может быть разложен на нормальную v_n и касательную v_τ составляющие

$$v = v_n + v_\tau, \quad v_n = (v \cdot n) n = v_n n, \quad v_\tau = (n \times v) \times n = v_\tau \tau, \quad (2.8)$$

где n, τ — единичная внешняя нормаль и единичный касательный вектор к Γ соответственно. Аналогичное разложение можно провести и для вектора напряжения T :

$$T = T_\tau + T_n, \quad T = (T \cdot n) n = T_n n, \quad T_\tau = (n \times T) \times n = T_\tau \tau \quad (2.9)$$

Всюду ниже предполагается, что препятствие абсолютно жесткое и поступательно перемещающееся, его движение будем рассматривать как переносное. Скорость в этом движении $v_*(x, t) = v_p(t)$ (т. е. характеризуется скоростью v_p любой точки штампа). С учетом этого имеет место разложение

$$v(x, t) = v_p(t) + v_o(x, t), \quad x \in \bar{\Omega}(t) \quad (2.10)$$

На Γ_k° — области фактического контакта условие непроникания заготовки в штамп может быть записано так

$$v_{on}(x, t) \leq 0, \quad x \in \Gamma_k^\circ(t) \quad (2.11)$$

Односторонний характер контакта приводит к ограничениям

$$T_n(x, t) \leq 0, \quad x \in \Gamma_k^\circ(t) \quad (2.12)$$

$$v_{on}(x, t) T_n(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma_k^\circ(t) \quad (2.13)$$

На тангенциальную составляющую вектора напряжения на контакте T_τ накладываются следующие условия, связанные с действием сил трения

$$|T_\tau(x, t)| \leq F(x, t), \quad F(x, t) \geq 0, \quad x \in \Gamma_k^\circ(t) \quad (2.14)$$

где F — сила трения, определяемая согласно какому-либо дополнительному соотношению (закону трения). Составляющую вектора напряжения $T_{\tau\tau}$ и составляющую вектора относительной скорости $v_{o\tau}$ обычно подчиняют ограничению

$$T_{\tau\tau} \cdot v_{o\tau} \leq 0 \quad (2.15)$$

в котором τ_T и τ_v вообще говоря, разные.

Отметим, что (2.15) в реальности может и не выполняться. Оно будет

нарушаться,¹ если скорость выдавливаемой из зазора смазки будет выше скорости относительного перемещения поверхностей. Однако изучение и учет подобных эффектов предполагает рассмотрение еще одной системы с распределенными параметрами — смазки. В публикуемой работе принимается (2.15), точнее дальнейшая его конкретизация $\tau_T = -\tau_v$. Принимая τ совпадающим с одним из векторов τ_v или τ_T получим $T_{\tau_T} \tau_v v_{\sigma_v} \tau_v = -T_{\tau_T} v_{\sigma_v} = T_{\tau} v_{\sigma_v}$.

Таким образом будем иметь

$$T_{\tau}(x, t) v_{\sigma_v}(x, t) \leq 0, \quad x \in \Gamma_k^{\circ}(t)$$

Область фактического контакта $\Gamma_k^{\circ}(t)$ разбивается на область скольжения $S_s(t)$ и область покоя (сцепления) $S_t(t)$:

$$\Gamma_k^{\circ}(t) = S_s(t) \cup S_t(t) \quad (2.16)$$

с помощью соотношения

$$|T_{\tau}(x, t)| - F(x, t) v_{\sigma_v}(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma_k^{\circ}(t) \quad (2.17)$$

Вспомогая, что имеет место соотношение

$$T_i(x, t) = \sigma_{ij}(x, t) n_j(x, t), \quad x \in \bar{\Omega}(t) \quad (2.18)$$

и что (2.2) равносильно интегральному уравнению

$$x(\xi, t) = x_{i_0}(\xi) + \int_{i_0}^t v(x(\xi, s), s) ds \quad (2.19)$$

закключаем, что искомое поле скоростей $v(x(\xi, t), t)$ должно определяться в результате решения системы уравнений ($i, j = \overline{1, 3}$):

$$\sigma_{ij,j}(x(\xi, t), t) = 0, \quad x \in \Omega(t)$$

$$\sigma_{ij}(x(\xi, t), t) = \Phi_{ij}^{\infty} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, t-s), \xi, t \right), \quad x \in \Omega(t)$$

$$x(\xi, t) = x_{i_0}(\xi) + \int_{i_0}^t v(x(\xi, s), s) ds, \quad x \in \Omega(t)$$

$$T_i(x, t) = \sigma_{ij}(x, t) n_j(x, t), \quad x \in \bar{\Omega}(t); \quad v_i(x, t) = U_i(x, t), \quad x \in \Gamma_v(t)$$

$$T_i(x, t) = P_i(x, t), \quad x \in \Gamma_{\sigma}(t); \quad T_i(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma_s(t) \quad (2.20)$$

$$v_{\sigma_n}(x, t) \leq 0, \quad x \in \Gamma_k^{\circ}(t); \quad T_n(x, t) \leq 0, \quad x \in \Gamma_k^{\circ}(t)$$

$$v_{\sigma_n}(x, t) T_n(x, t) = 0 \quad x \in \Gamma_k^{\circ}(t)$$

$$|T_{\tau}(x, t)| \leq F(x, t), \quad F(x, t) \geq 0, \quad x \in \Gamma_k^{\circ}(t)$$

$$T_{\tau}(x, t) v_{\sigma_v}(x, t) \leq 0, \quad x \in \Gamma_k^{\circ}(t)$$

$$(|T_{\tau}(x, t)| - F(x, t)) v_{\sigma_v}(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma_k^{\circ}(t)$$

Обозначим эту задачу через Π_1 . Полагаем, что входящие в постановку Π_1 функции обладают гладкостью, позволяющей рассмотреть Π_1 как классическую постановку. Постановка Π_1 является некоторым обобщением постановки,

¹ Александрович А. И., Сотников Н. И., Корноухов А. К., Щеринов В. Н. Закон трения в технологических процессах сверхпластического деформирования металлов // В сб.: Всес. совещание «Трибологические проблемы в процессах обработки материалов». Тез. докл., Москва, МИЭМ, 1990. с. 7.

приведенной в [21] на случай больших деформаций и более общих реологических соотношений, закона трения.

Любую полевою скалярную величину $E(x, t)$, связанную с протекающим во времени процессом можно рассматривать в виде абстрактной функции $E(t)$, значения которой в момент времени t принадлежат некоторому функциональному пространству $V(t)$, элементами которого являются функции от $x \in \Omega(t)$. Так что уместно обозначение $(E(t))(x)$ или просто $E(t)(x)$. Пользуясь этими обозначениями отметим, что нашей задачей является определение абстрактной функции $v(t)(x)$ для $\forall t \in [t_0, T]$, где T — время эволюции системы. Пользуясь тем, что первое уравнение в (2.20) имеет дивергентную форму, постановку Π_1 можно представить с использованием обычных приемов (см., например, [22], [23]) в виде слабой постановки, в качестве которой для задачи Π_1 будет выступать вариационное неравенство: найти $u(t) \in K(t)$, что

$$\int_{\Omega(t)} \sigma_{ij}(t) (v_{i,j} - u_{i,j}(t)) dx - \int_{\Gamma_o(t)} p_i(t) (v_i - u_i(t)) dS + \int_{\Gamma_k(t)} F(t) (|v_{\alpha}| - |u_{\alpha}(t)|) ds \geq 0 \quad \forall v \in K(t) \quad (2.21)$$

$$K(t) = \{v(x) \in M(t) | v_{\alpha n}(x) \leq 0, \quad x \in \Gamma_k^{\circ}(t)\} \quad (2.22)$$

$$M(t) = \{v(x) \in V(t) | v(x) = U(x), \quad x \in \Gamma_v(t)\} \quad (2.23)$$

В (2.21) величины, вычисляемые с помощью решения $u(t)$ или являющиеся известными функциями времени сопровождаются аргументом t . Для величин, не обязательно являющихся решением аргумент t не указываем. Обозначим через Π_1 постановку (2.21), (2.22). Нетрудно доказать следуя [22] утверждение.

Теорема 1. Задачи Π_1 и Π_1^* формально эквивалентны. Формальность рассуждений заключается прежде всего в предположении «достаточной» гладкости функций $\sigma_{ij}(t)$, $F(t)$ и т. п., в то время как в действительности, т. е. получаемые в результате решения задачи Π_1^* , эти функции могут такой гладкостью не обладать. Почти очевидно, что для доказательства неформальной эквивалентности задач Π_1 и Π_1^* потребуется расширение постановки Π_1 , трактовка входящих в нее уравнений в смысле распределений. Казалось бы есть и другая возможность получить неформально эквивалентные постановки Π_1 и Π_1^* (без расширения Π_1), связанная с рассмотрением достаточно гладких исходных данных в Π_1 . Однако, ввиду существования порога гладкости для вариационных неравенств, успех на этом пути маловероятен. Выше не конкретизировался выбор функционального пространства $V(t)$ и пространств исходных данных. Обычно выбор осуществляется таким образом, чтобы имела смысл слабая постановка (в данном случае вариационное неравенство (2.21)), т. е. подинтегральные выражения были измеримыми, суммируемыми функциями. При доказательстве эквивалентности, кроме того, используемые в выкладках переходы должны быть законны. Например должна быть справедлива формула Грина, строгое обоснование которой невозможно без точного определения функциональных пространств. Однако конкретизация функциональных пространств возможна лишь при конкретизации реологических соотношений и закона трения. Здесь же ограничимся схематичным изложением.

Первый интеграл в (2.21) можно рассматривать как оператор A из $V(t)$ в сопряженное пространство $V^*(t)$. Действительно, решению $u(t) \in V(t)$ этот интеграл ставит в соответствие функционал над $V(t)$, линейность которого очевидна, а непрерывность вытекает (при соответствующем выборе $V(t)$ и пространств исходных данных) из неравенства Гельдера. При соответствующем выборе пространства, которому принадлежит $P(t)$, второй интеграл в (2.21) представляет собой элемент $V^*(t)$. Третий интеграл в (2.21) при известной функции $F(t)$

может рассматриваться как разность значений недифференцируемого по Гато функционала над $V(t)$ в двух точках пространства $V(t)$. Однако, вообще говоря, $F(t)$ может зависеть от $u(t)$.

Перечислим нелинейности, имеющие место в постановке Π_1 . Нелинейность, связанная с односторонними ограничениями в области $\Gamma_k^\circ(t)$, выражающаяся в том, что решение ищется не в линейном многообразии $M(t)$, а в его замкнутом, выпуклом подмножестве $K(t)$, а также в том, что (2.21) представляет собой неравенство. Нелинейность оператора $A: V(t) \rightarrow V^*(t)$, вызванная неизвестностью $\sigma_y(t)$. Нелинейность оператора из $V(t)$ в $V^*(t)$, являющегося дифференциалом Гато функционала $\int F(t) u_{\alpha} (t) dS$, вызванная неизвестностью $F(t)$. Нелинейность, даже при известной, или зафиксированной $F(t)$, связанная с присутствием в последнем интеграле неравенства (2.21) модулей.

3. Постановка задачи определения параметров трения. Выше были рассмотрены классическая и слабая постановки прямой контактной задачи. В прямой постановке (2.21) предполагается заданным закон трения $F(t)$, в который входят известные константы-коэффициенты трения. Однако если некоторые функции из числа тех, что определяются в результате решения задачи (2.21), известны из эксперимента, то можно часть исходных данных задачи (2.21) рассматривать как неизвестные и определять их из условия минимизации невязки результатов численного моделирования и физического эксперимента. К числу объявляемых неизвестными данными целесообразно отнести величины, определение которых вызывает затруднения практического характера, либо величины и соотношения, определенные с большой погрешностью. Используемые при постановке задач соотношения МСС по уровню обоснованности, строгости и точности, можно разбить на три основные группы. К первой можно отнести уравнения баланса массы, импульса, момента импульса и энергии, выполняющиеся достаточно точно. Ко второй группе можно отнести уравнения, определяющие модель среды. Отнесение реального материала к тому или иному классу сред вносит некоторую погрешность. Однако наибольшая погрешность связана с соотношениями, определяющими силу трения. Формулы трения можно отнести к третьей группе наименее строго выполняющихся соотношений. Именно их целесообразно определять в результате решения обратной задачи исходя из предположения, что уравнения первой и второй групп выполняются точно.

Достаточно просто в физическом эксперименте определить общее усилие контакта $Q_b^*(t)$, $t \in [t_0, T]$. Задавшись некоторым законом трения $F(t)$, включающим коэффициент трения k , можно решить задачу (2.21) для закона движения штампа, при котором получена зависимость $Q_b^*(t)$ и определить тем самым $Q_b(t)$. Постановка обратной коэффициентной задачи при этом будет такой. Определить значение k_0 коэффициента трения, на котором реализуется минимум функционала невязки численных и экспериментальных данных:

$$k_0 = \arg \inf \|Q_b^*(t) - Q_b(t)\|_X \quad (3.1)$$

где X — пространство сеточных или обычных функций, в котором осуществляется сравнение результатов физического и вычислительного экспериментов. Если $X = L^1(t_0, T)$, то

$$k_0 = \arg \inf \int_{t_0}^T |Q_b^*(s) - Q_b(s)| ds \quad (3.2)$$

Естественно ожидать монотонную зависимость общего усилия контакта $Q_b(t)$ от коэффициента трения, что позволит решить задачу (3.1) для любого закона трения. Поэтому располагая функцией $Q_b^*(t)$ соответствующей лишь одной постоянной скорости движение штампа, которая очевидно, обеспечит движение

заготовки близкое к стационарному, трудно будет отдать предпочтение тому или иному закону трения. Более убедительным доводом в пользу некоторого закона трения будет наименьшая невязка численных и экспериментальных значений общего усилия контакта по результатам экспериментов с различными постоянными скоростями выдавливания при зафиксированных (найденных способом, описанным выше) значениях констант, входящих в закон трения.

4. Аппроксимация задачи контактного взаимодействия. При поиске решения (поля скоростей) в момент времени t , т. е. определения $u(t)$ необходимо воспользоваться (2.21). Однако поскольку практически невозможно вычислить поля во всех точках (t_0, T) , а можно вычислить их лишь в конечном числе точек, целесообразно потребовать, чтобы поле скоростей оказалось допустимым не только в момент времени t , но также и на некотором интервале $(t, t + \Delta t)$.

Если $u(t) \in K(t)$ и выполняется вариационное неравенство (2.21) для $\forall v \in K(t)$, то $u(t)$ — действительное поле скоростей. Если же рассмотреть не $K(t)$, а некоторое $\check{K}(t)$, обеспечивающее условие непроникания на интервале $(t, t + \Delta t)$, то получим в результате решения неравенства относительно $\check{K}(t)$ не действительное, а лишь, вообще говоря, возможное поле скоростей. Обозначим такую постановку через Π_2^* . Получающееся в результате возможное движение близко к действительному в той степени, в какой кусочно-постоянная по времени функция скорости аппроксимирует действительную функцию скорости. Приведем эту постановку: найти $\check{u}(t_n) \in \check{K}(t_n)$, что

$$\int_{\check{\Omega}(t_n)} \check{\sigma}_{ij}(t_n) (v_{i,j} - \check{u}_{i,j}(t_n)) dx - \int_{\check{\Gamma}_\sigma(t_n)} P_i(t_n) (v_i - \check{u}_i(t_n)) dS + \int_{\check{\Gamma}_k(t_n)} F(t_n) (|v_{\alpha}| - |\check{u}_{\alpha}(t_n)|) dS \geq 0 \quad \forall v \in \check{K}(t_n) \quad (4.1)$$

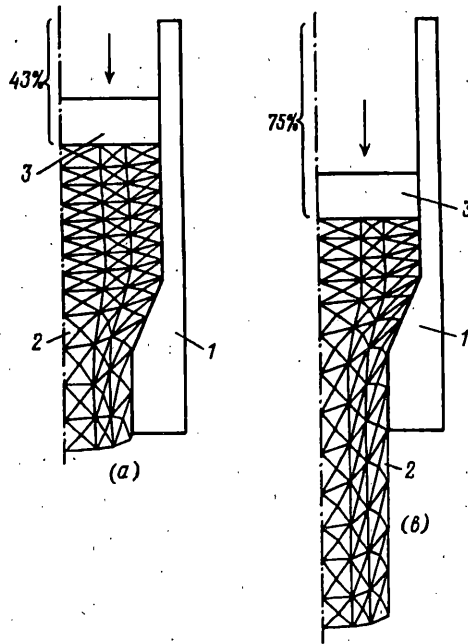
$$\check{K}(t_n) = \{v(x) \in \check{M}(t_n) | v_n(x) \leq \check{\Phi}(t_n)(x), \quad x \in \check{\Gamma}_k(t_n)\} \quad (4.2)$$

$$\check{M}(t_n) = \{v(x) \in \check{V}(t_n) | v(x) = U(t_n)(x), \quad x \in \check{\Gamma}_v(t_n)\} \quad (4.3)$$

где $\check{V}(t_n)$ — некоторое пространство функций, определенных на множестве $\check{\Omega}(t_n)$; $\check{\Phi}(t_n)(x)$ — известная, определяемая в частности Δt , функция; $\check{\Gamma}_k(t)$ — область поверхности заготовки, точки которой могут войти в контакт с препятствием на интервале $(t, t + \Delta t)$. Кроме того для $F(t_n)$ входящего в (4.1) необходимо потребовать зануления вне зоны фактического контакта $\check{\Gamma}_k^\circ(t_n)$ во избежание нефизического действия сил трения вне этой зоны. Это требование эквивалентно замене интегрирования по $\check{\Gamma}_k(t_n)$ на интегрирование по $\check{\Gamma}_k^\circ(t_n)$ в (4.1). Значок ($\check{\vee}$) служит указанием на то, что соответствующие величины определяются не по действительному, а по возможному движению. Ниже, если нет опасности спутать помеченные галочкой величины с непомеченными, т. е. с действительными, значок ($\check{\vee}$) будем опускать.

Если считать величину силы трения $F(t)$ и ее направление известными (например, определяемыми в ходе итераций), то вместо постановки Π_2^* получим постановку Π_3^* : найти $\check{u}(t_n) \in \check{K}(t_n)$, что

$$\int_{\check{\Omega}(t_n)} \check{\sigma}_{ij}(t_n) (v_{i,j} - \check{u}_{i,j}(t_n)) dx - \int_{\check{\Gamma}_\sigma(t_n)} P_i(t_n) (v_i - \check{u}_i(t_n)) dS - \int_{\check{\Gamma}_k(t_n)} F_i(t_n) (v_i - \check{u}_i(t_n)) dS \geq 0 \quad \forall v \in \check{K}(t_n) \quad (4.4)$$



Фиг. 1

Задачу Π_3^* в свою очередь можно аппроксимировать вариационными уравнениями: найти $\check{y}(t_n) \in M^m(t_n)$, что

$$\int_{\check{\Omega}(t_n)} \sigma_{ij}(t_n) (v_{i,j} - \check{y}_{i,j}(t_n)) dx - \int_{\check{\Gamma}_\sigma(t_n)} P_i(t_n) (v_i - \check{y}_i(t_n)) dS - \int_{\Gamma^m(t_n)} F_\tau(t_n) (v_\tau - \check{y}_\tau(t_n)) dS = 0 \quad \forall v \in M^m(t_n) \quad (4.5)$$

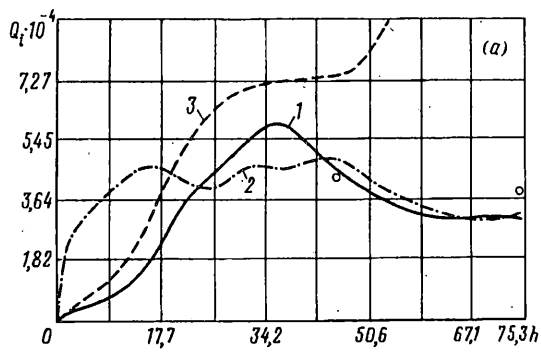
$$M^m(t_n) = \{v(x) \in \check{V}(t_n) \mid v(x) = U(t_n)(x), \quad x \in \check{\Gamma}_v(t_n);$$

$$v_n(x) = \check{\Phi}(t_n)(x), \quad x \in \Gamma^m(t_n)\} \quad (4.6)$$

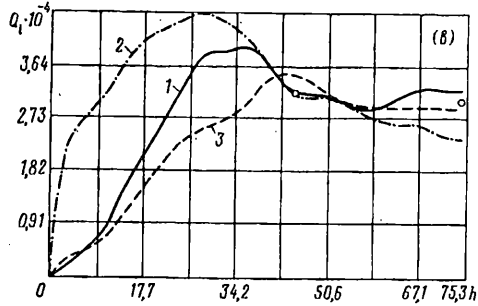
где $\Gamma^m(t_n)$ близко к фактической области контакта $\check{\Gamma}_k^\circ(t_n)$ и уточняется на каждом шаге по времени методом последовательных приближений при $m \rightarrow \infty$. Обозначим задачу (4.5), (4.6) через Π_4^* .

5. Численные результаты. Располагая экспериментальными данными по выдавливанию при температуре около 1000° в матрицу цилиндрических образцов, изготовленных из сплава ВТЗ-1, решим поставленную выше задачу выявления наиболее подходящего закона трения.

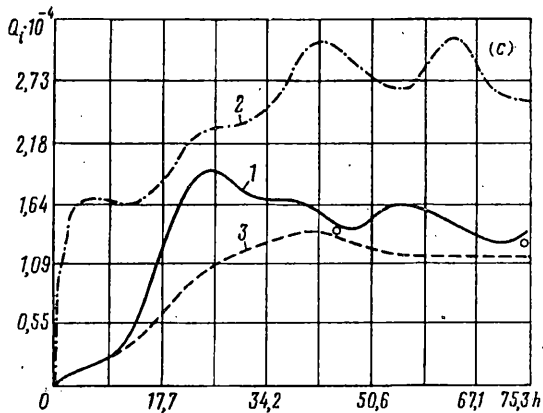
Исходный диаметр образца 18 мм, высота 20 мм, размеры и пропорции матрицы очевидны из фиг. 1, где 1 — матрица, 2 — заготовка, 3 — штамп. На этой фигуре показана конфигурация заготовки (скорость штампа $v_b = 5,0$ мм/с, закон Зибеля, показатель трения $\mu^* = 0,03$) с лагранжевой конечно-элементной сеткой при 43% хода штампа (a) и 75% хода штампа (b). Реологические свойства сплава ввиду его высокой скоростной чувствительности



Фиг. 2 а



Фиг. 2 б



Фиг. 2 в

аппроксимировались соотношениями

$$\sigma_{ij}^*(t)(x) = 2\mu(e_u^2(t)(x))e_{ij}^*(t)(x), \quad \sigma(t)(x) = K \int_{t_0}^t \operatorname{div} v(x(\xi, s), s) ds$$

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma(t) \delta_{ij} + \sigma_{ij}^*(t) \tag{5.1}$$

$$e_{ij}(t)(x) = 1/2(v_{i,j}(t)(x) + v_{j,i}(t)(x)), \quad e_{ij}(t) = 1/3 \operatorname{div} v(t) \delta_{ij} + e_{ij}^*(t)$$

$$e_u^2(t) = ce_{ij}^*(t)e_{ij}^*(t), \quad c = \sqrt{2/3} \tag{5.2}$$

$$\mu(e_u^2) = \begin{cases} 55 e_u^{0,62}, & e_u \leq 10^{-2} \\ 35 e_u^{0,2}, & e_u \geq 10^{-2} \end{cases} \tag{5.3}$$

где $v(t)(x)$ — поле скоростей заготовки в момент времени t . Вязкость μ приведена в МПа·с, e_u в с⁻¹, $K = 0.5 \cdot 10^4$ МПа.

Численное моделирование проводилось с использованием системы CONTR², позволяющей на каждом шаге (t_n, t_{n+1}) времени решать задачу P_n^* с итерационным уточнением (из условия строгого соблюдения условия непроникновения материала в штамп на интервале (t_n, t_{n+1})) зоны контакта $\Gamma^m(t_n)$ и направления силы трения в частности для реологических соотношений (5.1)—(5.3) и закона трения из числа приведенных в п. 1. Основные результаты, касающиеся используемой при численном решении постановки, а также ее конечномерных аппроксимаций, приведены в п. 6.

Для сопоставительного анализа были отобраны законы Амонтона, Зибеля, Ньютона. Многократным решением прямой задачи выдавливания при скорости штампа $v_b = 0,783$ мм/с были определены коэффициенты пропорциональности между напряжениями трения τ и p , τ_s, v_s в формулах (1.1), (1.2), (1.8) (т. е. приближенно решена задача (3.1)). Эти коэффициенты оказались равными 0,006; 0,03; 0,7 соответственно. Получившиеся при этом графики усилия Q_b на верхний штамп приведены на фиг. 2, б. В соответствии со сформулированным в п. 3 критерием выбора закона трения было проведено решение задачи (с найденными константами) при наименьшей ($v_b = 0,053$ мм/с) и наибольшей ($v_b = 5,0$ мм/с) скоростями выдавливания из диапазона характерных скоростей, для которых проводился физический эксперимент. Результаты приведены на фиг. 2 с, а. Кривые 1—3 на фиг. 2 соответствуют законам трения Амонтона, Зибеля и Ньютона; светлые точки — данные физического эксперимента (ход штампа h дается в процентах).

Все решения, с целью снижения влияния анизотропии сетки на выводы, были получены при одинаковом исходном разбиении цилиндрической заготовки. Отметим, что меньшие осцилляции усилия при использовании закона Ньютона связаны с отсутствием в этом случае зон покоя (сцепления); поскольку падение скорости скольжения до нуля приводит к снижению до нуля порогового напряжения, достижение которого позволяет частице заскользить. Анализ графиков показывает, что наиболее близкие значения усилия во всем диапазоне скоростей получаются при использовании закона Амонтона (кривые 1). Следовательно при моделировании реального процесса ОМД с условиями (тип смазки, характерный диапазон скоростей) подобными тем, что имели место в физическом эксперименте, целесообразно использовать именно закон Амонтона. Не исключено, однако, что при наличии более полной информации о характерном изменении усилия в физическом эксперименте вид графика усилия подтолкнул бы к поискам иного закона трения.

6. Корректность вариационной постановки (4.5), (4.6), (5.1)—(5.3) и сходимость решений ее пространственных дискретизаций. Проанализируем более подробно практически решаемую задачу (4.5), (4.6), (5.1)—(5.3). В качестве $V(t)$ в этом случае естественно рассмотреть $(H^1(\Omega(t)))^3$. Напомним, что по теореме о следах (см., например [24]) существует оператор следа $\gamma: (H^1(\Omega))^3 \rightarrow (H^{1/2}(\Gamma))^3$, причем $\gamma \in L((H^1(\Omega))^3, (H^{1/2}(\Gamma))^3)$. Известно [24], что для достаточно регулярной границы Γ — существует изоморфизм $(H^{1/2}(\Gamma))^3$ на $H^{1/2}(\Gamma) \times H_\tau(\Gamma)$, где $H_\tau(\Gamma) = \{v \in (H^{1/2}(\Gamma))^3 \mid v n_i = 0 \text{ почти всюду на } \Gamma\}$, существуют непрерывные линейные отображения γ_n из $(H^1(\Omega))^3$ на $H^{1/2}(\Gamma)$ и γ_τ из $(H^1(\Omega))^3$ на $H_\tau(\Gamma)$ такие, что

$$\gamma(u) = \gamma_n(u) + \gamma_\tau(u) \quad \forall u \in (H^1(\Omega))^3$$

$$\gamma_n(u) = u|_{\Gamma} n_p, \quad \gamma_\tau(u) = u|_{\Gamma} - \gamma_n(u) n \quad \forall u \in (D(\bar{\Omega}))^3$$

² Автор системы Романюк С. Н.

С учетом введенных обозначений можно записать

$$V^m(t) = \{v(x) \in (H^1(\Omega))^3 \mid \gamma(v(x)) = 0, x \in \Gamma_v(t); \gamma_n(v(x)) = 0, x \in \Gamma^m(t)\} \quad (6.1)$$

Ниже аргумент t для упрощения обозначений опускается. Множество Ω предполагается ограниченным. При условии $\text{mes } \Gamma_v(t) > 0$ в силу первого неравенства Корна выражение

$$\|v\|_{V^m} = \left\{ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}^2 dx \right\}^{1/2} \quad (6.2)$$

определяет в V^m норму эквивалентную норме в $(H^1(\Omega))^3$.

$$\|v\|_{V^m}^2 = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^3 e_{ij}^{*2}(v) + \frac{1}{3} \text{div}^2(v) \right] dx \quad (6.3)$$

Обозначим через φ правую часть главных граничных условий, заданных на Γ_v и Γ^m , точнее:

$$\varphi(x) \in (H^1(\Omega))^3 \text{ такова, что } \gamma(\varphi(x)) = U(x), x \in \Gamma_v$$

$$\text{и } \gamma_n(\varphi(x)) = \Phi(x), x \in \Gamma^m \quad (6.4)$$

Воспользовавшись введенными обозначениями задачу Π_4^* с учетом (5.1) — (5.3) можно записать в таком виде: найти $u \in V^m$, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ [\sigma^* + K\Delta t \text{div}(u + \varphi)] \text{div} v + 2\mu(e_u^2(u + \varphi)) e_{ij}^*(u + \varphi) e_{ij}^*(v) \} dx - \\ & - \int_{\Gamma_v} P\gamma(v) dS - \int_{\Gamma^m} F_{\tau}^* \gamma_{\tau}(v) dS = 0 \quad \forall v \in V^m \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $K, \Delta t$ — константы, σ^*, P, F_{τ}^* — заданные на Ω функции, μ — функция из R_+ в R известного вида. Через F_{τ}^* обозначен вектор $F_{\tau} \tau$, где τ компоненты единичного касательного вектора. Ниже звездочка везде опускается. Потребуем также

$$p \in (L^2(\Gamma_v))^3, \quad F_{\tau} \in (L^2(\Gamma^m))^3, \quad \sigma^* \in L^2(\Omega) \quad (6.6)$$

Для удобства дальнейших ссылок приведем здесь такие условия

$$\mu(\zeta) \in C^0([0, \infty)) \quad (6.7)$$

$$\mu(\zeta) \leq a_1, \quad a_1 > 0 \quad (6.8)$$

$$\mu(\zeta) \geq a_2, \quad a_2 > 0 \quad (6.9)$$

$$\mu(\zeta) \in C^1((0, \infty)) \quad (6.10)$$

$$\mu(\zeta) + 2\zeta d\mu(\zeta)/d\zeta \geq a_3, \quad a_3 > 0 \quad (6.11)$$

$$d\mu(\zeta)/d\zeta \leq 0 \quad (6.12)$$

Если справедливы соотношения (6.1), (6.4), (6.6) — (6.8), то задача (6.5) имеет смысл и может рассматриваться как операторное уравнение

$$Gu = 0; \quad G: V^m \rightarrow (V^m)^* \quad (6.13)$$

Действительно, выражение (6.5) имеет смысл, если подынтегральные выражения измеримы и суммируемы. Функции $\sigma^*, K\Delta t \text{div}(u + \varphi) \text{div} v$ измеримы, поскольку принадлежат $L^1(\Omega)$ (в силу выбора пространства, которому принадлежат u, v, φ). Для того, чтобы доказать измеримость функции $2\mu(e_u^2(u + \varphi)) e_{ij}^*(u + \varphi) e_{ij}^*(v)$ достаточно показать, что $\mu(e_u^2(u + \varphi))$ измерима, поскольку $e_{ij}^*(u + \varphi)$ и $e_{ij}^*(v)$

суммируемы (а значит и измеримы), а произведение и сумма измеримых функций дают измеримую функцию. Достаточным условием измеримости функции, представляющей композицию измеримых, является [25] удовлетворение свойству Каратеодори. Достаточным условием последнего свойства является непрерывность. Отсюда в силу измеримости e_u^2 подынтегральное выражение измеримо.

Суммируемость подынтегрального выражения вытекает из непрерывности оператора Немыцкого $H(e_u^2, e_v^*)$, $H: L^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, определяемого функцией $h(\xi) = \mu(\xi_1) \xi_2$, где $\xi_1 = e_u^2(u + \varphi)$, $\xi_2 = e_v^*(u + \varphi)$. Отмеченную непрерывность H нетрудно показать опираясь на известную теорему (см. например, с. 66 [25]). Таким образом будем иметь

$$\mu(e_u^2(u + \varphi)) e_v^*(u + \varphi) \in L^2(\Omega) \quad (6.14)$$

Тем самым в силу неравенства Коши подынтегральные выражения в (6.5) суммируемы по Лебегу. Выражение (6.5) можно рассматривать как операторное уравнение $Au = F$ (или $Gu \equiv Au - F = 0$), где $A: V \rightarrow (V^m)^*$, $F \in (V^m)^*$. В самом деле, фиксация u дает функционал $\langle Au, v \rangle$ над V^m . Функционал линеен

$$\langle Au, c_1 v_1 + c_2 v_2 \rangle = c_1 \langle Au, v_1 \rangle + c_2 \langle Au, v_2 \rangle \quad (6.15)$$

Непрерывность функционала следует из оценки, имеющей место на основании (6.14), неравенства Коши и эквивалентности норм в $(H^1(\Omega))^3$ и V^m :

$$\langle Au, v \rangle \leq c_0 \|\operatorname{div} v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^3 c_{ij} \|e_{ij}^*(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq c^* \|v\|_{V^m} \quad (6.16)$$

Функционал F , задаваемый формулой

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Gamma_\sigma} P_\gamma(v) dS + \int_{\Gamma^m} F_{\gamma\tau}(v) dS \quad (6.17)$$

является очевидно линейным. Непрерывность его вытекает из оценок, получаемых ниже на основе неравенства Коши и теоремы о следах

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^m} P_\gamma(v) dS &\leq \|P\|_{(L^2(\Gamma_\sigma))^3} \|\gamma(v)\|_{(H^{1/2}(\Gamma_\sigma))^3} \leq c^* \|P\|_{(L^2(\Gamma_\sigma))^3} \|v\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \\ &\leq c^* \|P\|_{(L^2(\Gamma_\sigma))^3} \|v\|_{V^m} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Аналогично

$$\int_{\Gamma^m} F_{\gamma\tau}(v) dS \leq c^* \|F_\tau\|_{(L^2(\Gamma^m))^3} \|v\|_{V^m} \quad (6.19)$$

Таким образом действительно $A: V \rightarrow (V^m)^*$ и $F \in (V^m)^*$.

Доказывается серия лемм, касающаяся свойств оператора G .

Лемма 1. Пусть выполняются условия (6.1), (6.4), (6.6) — (6.8). Тогда оператор $A: V^m \rightarrow (V^m)^*$ ограничен.

Лемма 2. Пусть выполняются условия (6.1), (6.4), (6.6) — (6.8). Тогда отображение $G: V^m \rightarrow (V^m)^*$, определяемое формулой (6.5) непрерывно.

Лемма 3. Пусть выполняются условия (6.1), (6.4), (6.6) — (6.9). Тогда для оператора $G: V^m \rightarrow (V^m)^*$, определяемого формулой (6.5) имеет место оценка

$$\langle Gv, v \rangle \geq c_1 \|v\|_{V^m}^2 - c_2 \|v\|_{V^m} \quad (6.20)$$

где c_1, c_2 — положительные константы.

Лемма 4. Пусть выполняются условия (6.1), (6.4), (6.6) — (6.8). Если функция

$\gamma \rightarrow \mu (\gamma^2) \gamma$ неубывающая, то отображение $G: V^m \rightarrow (V^m)^*$ определяемое формулой (6.5) является монотонным.

Замечание. Если в условиях леммы 4 дополнительно потребовать, чтобы выполнялось (6.9), а также строгого возрастания функции $\gamma \rightarrow \mu (\gamma^2) \gamma$, то оператор G — строго монотонный.

Лемма 5. Пусть выполняются условия (6.1), (6.4), (6.6), (6.8) — (6.12). Тогда оператор $G: V^m \rightarrow (V^m)^*$, задаваемый формулой (6.5) является сильно монотонным.

С использованием сформулированных выше лемм доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть имеют место (6.1), (6.4), (6.6) — (6.9) и функция $\gamma \rightarrow \mu (\gamma^2) \gamma$ — неубывающая. Тогда существует решение задачи (6.13).

Доказательство основывается на теореме Браудера (см., например, с. 262 [26]). Для того, чтобы воспользоваться ею необходимо убедиться, что: а) пространство V^m — рефлексивное банахово пространство; б) оператор G хеминепрерывен; в) оператор G монотонный; д) $\exists M > 0$, что из $\|u\|_{V^m} \geq M \Rightarrow \langle G(u), u \rangle > 0$.

Условие (а) удовлетворяется, поскольку V^m представляет собой замкнутое подпространство рефлексивного пространства $(H^1(\Omega))^3$. Оператор G — непрерывный оператор (т. к. выполняются условия леммы 2), следовательно, и хеминепрерывный. Поскольку удовлетворяются условия леммы 4 и леммы 3, то выполняются условия (в), (д), что завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. Пусть удовлетворяются условия теоремы 1, и пусть, кроме того, функция $\gamma \rightarrow \mu (\gamma^2) \gamma$ строго возрастающая. Тогда решение задачи (6.13) единственно.

Доказательство. Удовлетворены условия замечания к лемме 4, поэтому оператор G строго монотонный. Поскольку строго монотонный оператор из нормированного пространства в сопряженное к нему не может иметь более одного решения (см. лемму на с. 194 [26]), то единственность решения задачи (6.13) доказана.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (6.1), (6.4), (6.6) — (6.12). Тогда решение задачи (6.13) непрерывно зависит от σ^* , K , Δt , μ , φ , P , F_γ .

Доказательство. Поскольку отображение G при выполнении условий теоремы является непрерывным и сильно монотонным оператором (выполняются условия леммы 5), то непрерывная зависимость от входных данных вытекает из теоремы, приведенной на с. 273 [26], согласно которой сильно монотонное, непрерывное отображение $G: V^m \rightarrow (V^m)^*$ является гомеоморфизмом V^m на $(V^m)^*$, что в частности означает существование отображения $G^{-1}: (V^m)^* \rightarrow V^m$, причем G^{-1} инъективно и непрерывно.

Реально на компьютере решаются конечномерные задачи. Проанализируем взаимосвязь решений конечномерных задач, получаемых методом Галеркина с решением исходного операторного уравнения (6.13).

В гильбертовом пространстве V^m задается базис, т. е. линейно независимая система векторов g_1, g_2, \dots , обладающая тем свойством, что всякий вектор из V^m представляется единственным образом в виде

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k \quad (6.21)$$

Строится последовательность конечномерных подпространств $\{V_n^m\}$, где V_n^m — n -мерное пространство, натянутое на векторы g_1, g_2, \dots, g_n . Галеркинским приближением уравнения $Gu = 0$ называется вектор $u^{(n)} \in V_n^m$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\langle Gu^{(n)}, g_i \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.22)$$

а система (6.22) называется системой Галеркина.

Теорема 4. Пусть выполнены (6.1), (6.4), (6.6)—(6.9). Тогда система Галеркина (6.22) разрешима при любом n , и существует такое $M > 0$, что галеркинские приближения $u^{(n)}$ лежат в шаре радиуса M .

Доказательство. Опираясь на лемму, приведенную на с. 342 [26]. В этой лемме предполагается хеминепрерывность оператора G и выполнение условия

$$\langle Gv, v \rangle > 0 \text{ на сфере } \|v\|_{V^m} = M \quad (6.23)$$

Условия теоремы 4 таковы, что справедливы утверждения лемм 2, 3. Это позволяет утверждать, что оператор G хеминепрерывен и выполняется (6.23). Теорема доказана.

Замечание. Если в условиях теоремы 4 потребовать дополнительно, чтобы функция $\gamma \rightarrow \mu(\gamma)^2 \gamma$ была строго возрастающей, то в утверждении теоремы 4 при $\forall n$ решение системы Галеркина единственно. Это следует непосредственно из теоремы 2.

Теорема 5. Пусть выполнены (6.1), (6.4), (6.6)—(6.9) и функция $\gamma \rightarrow \mu(\gamma)^2 \gamma$ строго возрастающая. Предполагаем, что последовательность пространств $\{V_n^m\}$ удовлетворяет условиям предельной плотности в V^m , т. е. для $\forall h \in V^m$, $h = h^{(n)} + h^{*(n)}$ (где $h^{*(n)} \in V^m \setminus V_n^m$) имеет место $h^{*(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда последовательность галеркинских приближений слабо сходится к решению u операторного уравнения (6.13).

Доказательство. Выполнены условия теорем 1, 2, что гарантирует $\exists!$ решения операторного уравнения $Gu = 0$. Удовлетворяются также условия теоремы 4 и замечания к ней, что гарантирует для $\forall n \exists!$ галеркинских приближений. Покажем, что

$$\langle G(u^{(n)}, v) \rangle \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для } \forall v \in V^m \quad (6.24)$$

Так как $u^{(n)}$ — решение галеркинской системы, то $\langle Gu^{(n)}, \omega_i \rangle = 0$ для $\forall \omega_i \in \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, где $\{\omega_1, \dots, \omega_n\} = V_n^m$. Домножая на коэффициенты разложения $v^{(n)}$ по системе $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ и суммируя, получим

$$\langle Gu^{(n)}, v^{(n)} \rangle = 0 \text{ для } \forall v^{(n)} \in V_n^m \quad (6.25)$$

Отсюда, учитывая, что $v = v^{(n)} + v^{*(n)}$:

$$\langle Gu^{(n)}, v \rangle = \langle Gu^{(n)}, v^{*(n)} \rangle \quad (6.26)$$

Поскольку оператор G ограничен (см. лемму 1), а $\|u^{(n)}\|_{V^m} \leq c$ не зависит от n (это вытекает из теоремы 4) можем, учитывая, что $v^{*(n)} \rightarrow 0$, записать

$$|\langle Gu^{(n)}, v^{*(n)} \rangle| \leq \|G(u^{(n)})\|_{(V^m)^*} \|v^{*(n)}\|_{V^m} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (6.27)$$

Таким образом доказано условие (6.24), т. е. $G(u^{(n)}) \rightarrow G(u)$ при $n \rightarrow \infty$ в $(V^m)^*$.

Покажем, что

$$u^{(n)} \rightarrow u \text{ в } V^m \quad (6.28)$$

Поскольку пространство V^m рефлексивно, $\|u^{(n)}\|_{V^m} < c$, то \exists подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ последовательности $\{u^{(n)}\}$ такая, что

$$u_{n_k} \rightarrow u_0 \quad (6.29)$$

Для доказательства совпадения u_0 с u воспользуемся монотонностью оператора G :

$$\langle Gu_{n_k} - Gv, u_{n_k} - v \rangle \geq 0 \text{ для } \forall n_k, \forall v \in V^m \quad (6.30)$$

Учитывая, что u_{n_k} — решение галеркинской системы, а также то, что

$\lim \langle Gu_{n_k}, v \rangle = 0$ при $n_k \rightarrow \infty$ (см. (6.24)) и то, что имеет место (6.29), переходя к пределу в (6.30) получим

$$\langle Gv, v - u_0 \rangle \geq 0 \quad (6.31)$$

Далее воспользуемся методом Минти: рассмотрим $v = u_0 \pm \lambda \omega$, $\lambda > 0$. Подстановка в (6.31) с дальнейшим предельным переходом по $\lambda \rightarrow 0$ (на который дает право непрерывность оператора G) дает $\langle Gu_0, \omega \rangle = 0$, т. е. u_0 является решением исходного операторного уравнения $Gu_0 = 0$. В силу единственности решения исходного уравнения получаем $u = u_0$.

Можно рассмотреть любую другую подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ рассматривавшейся выше последовательности $\{u^{(n)}\}$ и аналогичными рассуждениями показать, что $u_{n_k} \rightarrow u$ в V^m . Однако известно [27], что если все слабо сходящиеся подпоследовательности ограниченной последовательности в рефлексивном банаховом пространстве сходятся к одному и тому же элементу, то этот элемент является слабым пределом этой последовательности. Таким образом доказали, что $u^{(n)} \rightarrow u$ в V^m .

Теорема 6. Пусть выполнены условия леммы 5. Тогда галеркинские приближения $u^{(n)}$ сильно сходятся к решению u операторного уравнения (6.13).

Доказательство дается краткой ссылкой на теорему со с. 347 [26] с учетом того, что имеет силу лемма 3.

Поставленная в данной работе задача сводится к определению коэффициентов в законах трения известного вида и выбору лучшего из законов на основе серии экспериментальных кривых типа: зависимость общей силы контакта в задаче штамповки от движения инструмента. Выше обсуждались некоторые принципиальные свойства аппроксимаций P_4^* (точнее (6.5)) прямой задачи P_1^* : существование, единственность, непрерывная зависимость от входных данных, в частности непрерывная зависимость общего усилия штамповки от сдвигающей силы и от движения инструмента. Исследовались также существование, единственность, непрерывная зависимость решения дискретизованной по пространственным переменным задачи, а также сходимость ее решений к решению исходной задачи P_4^* . Расчеты проводились с использованием пакета программ CONTR, ориентированного на исследование эволюционных задач медленного течения нелинейной среды с односторонними связями и трением на части границы, методом конечных элементов. Вычислительный эксперимент включал прямые и обратные задачи.

Открытым остается вопрос о корректности постановки P_1^* и сходимости решений задач P_4^* к решению задачи P_1^* при законе трения достаточно общего вида. Установление монотонной зависимости решения от коэффициентов в законе трения позволило бы, по-видимому, обосновать корректность обратной к P_1^* задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Охрименко Я. М. Технология кузнечно-штамповочного производства. М.: Машиностроение, 1976. 560 с.
2. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 525 с.
3. Боуден Ф., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел. М.: Машиностроение, 1968. 543 с.
4. Грудев А. П., Зильберг Ю. В., Тилик В. Т. Трение и смазки при ОМД: Справочник. М.: Металлургия, 1982. 312 с.

5. Леванов А. Н., Колмогоров В. А., Буркин С. П. и др. Контактное трение в процессах ОМД. М.: Metallurgiya, 1976. 416 с.
6. Чертавских А. К., Белосевич В. К. Трение и технологическая смазка при ОМД. М.: Metallurgiya, 1968. 362 с.
7. Исаченков Е. И. Контактное трение и смазки при ОМД. М.: Машиностроение, 1978. 208 с.
8. Макушок Е. М. Механика трения. Минск: Наука и техника, 1974. 254 с.
9. Рыжов Э. В., Колесников Ю. В., Суслов А. Г. Контактное трение твердых тел при статических и динамических нагрузках. Киев: Наук. думка, 1982. 172 с.
10. Мур Д. Основы и применения трибоники. Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 520 с.
11. Губкин С. И. Пластическая деформация металлов. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1961. 416 с.
12. Колмогоров В. Л. Механика ОМД. М.: Metallurgiya, 1986. 687 с.
13. Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов. М.: Машиностроение, 1969. 503 с.
14. Бэкоффен В. Процессы деформации. М.: Metallurgiya, 1977. 288 с.
15. Обработка металлов давлением в машиностроении/под ред. П. И. Полухина и др. Москва, София, Машиностроение, Техника, 1983. 278 с.
16. Колмогоров Г. Л. Гидродинамическая смазка при ОМД. М.: Metallurgiya, 1986. 166 с.
17. Галахов М. А., Гусятников П. Б., Новиков А. П. Математические модели контактной гидродинамики. М.: Наука, 1985. 296 с.
18. Галахов М. А., Усов П. П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. М.: Наука, 1990. 280 с.
19. Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. М.: Metallurgiya, 1972. 408 с.
20. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
21. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986. 270 с.
22. Дюво Г., Лионс Ж.—Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
23. Nečas J., Hlaváček I. Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies. An introduction. Amsterdam: Elsevier, 1981. 342 p.
24. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. М.: Мир, 1989. 494 с.
25. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
26. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972. 416 с.
27. Гаевский Х., Греггер К., Захарьяс К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.XI.1993